# 第一届鹏程杯数学邀请赛

# 小学六年级试题参考解答和评分标准

（考试时间 100 分钟，满分 120 分）

## 一、填空题（满分 60 分，每小题 6 分）

1. 计算：4780×99－(476.4×284＋4764×71.6)÷（$1+\frac{1}{99}$ ）＝（　　　　）。

**考查内容：速算与巧算.**

答：1584.

解：原式＝4780×99－4764×（28.4＋71.6）×0.99

＝4780×99－4764×99

＝16×99

＝1600－16

＝1584.

**2.** 字母 $A$，$B$，$C$，$D$ 代表不同的数码，恰使得 $\overline{AAAA}+\overline{BBB}+\overline{CC}-D=2014$ 成立. 则 $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{D}+\frac{D}{A}=$____.

**考查内容：数字谜和四则运算.**

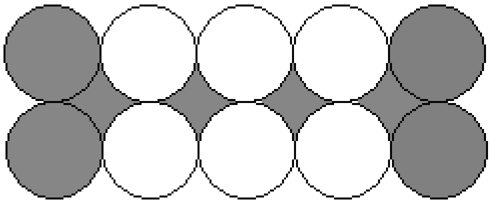
答：$11\frac{23}{56}$.

解：由逐次估算可知，只有 1111+888+22-7=2014.则

$A=1, B=8, C=2, D=7.$

所以 $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{D}+\frac{D}{A}=\frac{1}{8}+\frac{8}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{1}=\frac{1}{8}+4+\frac{2}{7}+7=11\frac{23}{56}$.

**3.** 如图，10 个圆的半径相等，已知阴影部分的面积是 48 平方厘米，这 10 个圆的面积之和是多少平方厘米？（π取 3.14）



**考查内容：图形的面积计算.**

**答：**94.2.

**解:**四个圆夹在中间的一块可以看成是一个边长为 2r 的正方形面积减去四个$\frac{1}{4}$圆的面积，也就是减去一个圆的面积，即是（2r）$^2$－π$r^2$＝4$r^2$－π$r^2$.

阴影部分的面积可表示为：4π$r^2$＋(4$r^2$－π$r^2$)×4＝48　即是 $r^2$＝3.
那么 10π$r^2$＝10×3.14×3＝94.2（平方厘米）.

故这 10 个圆的面积之和是 94.2 平方厘米。

**4.** 桌上的盘子里放着 60 块饼干， 5 个孩子用它来招待客人。每个孩子从盘子里给每个自己认识的客人拿了 1 块饼干，然后，客人也从盘子里给每个不认识的孩子拿了 1 块饼干，此时，盘子里的饼干刚好被拿空。在场一共有____个客人。

**考查内容：简单应用题**

**答：**12

**解：**每个孩子认识的客人数加不认识的客人数的和相等　60÷5=12（人）

**5.** 将一个大正方体木块的六个面都染成红色，然后将这个大正方体切割成$n^3$个小正方体积木. 已知至少有 2 个面为红面的小积木共有 44 块，则 6 个面都没染红的小正方体积木共有____块.

**考查内容：空间观念，简易方程.**

**答：27 块.**

**解：**不妨设大正方体棱长为$n$，则共有$n^3$个单位正方体小积木.小单位正方体两个面为红色的有$12(n-2)$个，3 个面为红色的有 8 个.因此至少有 2 个面为红面的小积木块共有$12(n-2)$+8 个，列得方程$12(n-2)+8=44$,解得$n=5$.所以 6 个面都没染红色的单位正方体积木共有$(5-2)^3=27$块.

**6.** 电子钟指示时刻由 00.00.00 到 23.59.59. 每个时刻显示 1 秒钟. 如图 2 显示的时刻有两个数字 0. 那么，在一昼夜期间钟表上显示 3 个数字 7 的时刻共有___秒.


图 2

**考查内容：简单组合计数.**

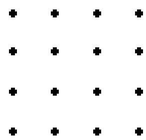
**答：** 72 秒.

解：如果在表盘上显示的数字为 $ab:cd:mn$，因为 $a\le 2$, $c\le 5$, $m\le 5$， 那么 $a\ne 7$, $c\ne 7$, $m\ne 7$. 所以出现的 3 个 7 只能是 $b=d=n=7$. 此时

$$a=0\text{或}1,\quad c=0,1,2,3,4,5,\quad m=0,1,2,3,4,5.$$

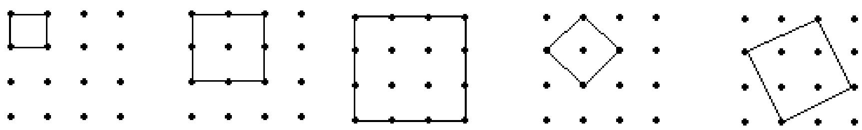
全部得到 $2\cdot 6\cdot 6=72$ 个出现 3 个 7 的时刻，而每个时刻显示 1 秒钟.总计 72 秒.

7. 在下面的钉子板上，用橡皮筋最多可以围出（　　）个正方形。



**考查内容：分类讨论、计数.**

**答：** 20



9 个　　4 个　　1 个　　4 个　　2 个

9+4+1+4+2=20 个

**8.** 已知 $a$ 与 $b$ 是互质的自然数，且 $b$ 小于 50， 则满足 $\frac{1}{7}<\frac{a}{b}<\frac{1}{6}$ 的有序对 $(a,b)$ 的个数是_____.

**考查内容：分类讨论、计数.**

**答:** 18

**解:** 由 $a,b$ 是互质的自然数，和 $\frac{1}{7}<\frac{a}{b}<\frac{1}{6}$，得 $6a<b<7a$.注意到 $b$ 小于 50.

当 $a=1$ 时，没有符合条件的 $b$；当 $a=2$ 时，$b=13$；　当 $a=3$ 时，$b=19,20$；

当$a=4$时，$b=25,27$； 当$a=5$时，$b=31,32,33,34$； 当$a=6$时，$b=37,41$； 当$a=7$时，$b=43,44,45,46,47,48$；当$a=8$时，$b=49$. 所以有 18 个.

**9.** 一个 6 位的自然数$\overline{ABCBCA}$是 7 的倍数，则$2B+C$的最大值等于______.

**考查内容：整数整除和最值.**

答: 27

解: $\overline{ABCBCA}=A\times100000+B\times10000+C\times1000+B\times100+C\times10+A$,

$$=A\times100001+B\times10100+C\times1010$$

$$=A\times\left(14285\times7+6\right)+B\times\left(1442\times7+6\right)+C\times\left(144\times7+2\right)$$

$$=7\times\left(14285\times A+1442\times B+144\times C\right)+6A+6B+2C$$

则$6A+6B+2C$被 7 整除. 因为 $B$、$C$ 是阿拉伯数码，所以 $B=C=9$时，$2B+C$可取得最大值 27，此时$6B+2C=72$，除以 7 余 2，故取 $A=2$，则$6A+6B+2C$可以被 7 整除. 所以$B=C=9$是可以成立的.

**10.** 已知 3 个不同的非零自然数，它们两两互质，且其中任二数之和都能被第三个数整除，则$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}=$______.

**考查内容：整数整除和计算求值.**

**答:** $2\dfrac{4}{7}$

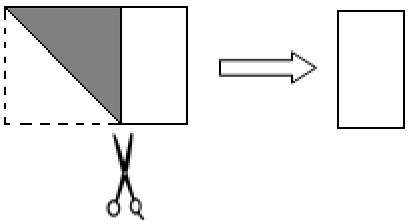
解：由于 $a, b, c$ 对称，可设$a<b<c$. 则$a+b<2c$，即$\dfrac{a+b}{c}<2$，既然 $a, b, c$ 中任二数之和都能被第三个数整除，则有$\dfrac{a+b}{c}=1$，也就是$a+b=c$.

因为$b\mid a+c$，所以$b\mid(2a+b)$，但$(a,b)=1$，所以$b|2$. 此时，$b=1$或$b=2$. 但$b=1$时，有 $a<b=1$，则 $a=0$ 不合题意. 所以 $b=2$. 此时有 $a=1$，$b=2$，$c=a+b=3$为所求的三个自然数. 所以,

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}=\frac{36}{14}=2\frac{4}{7}..$$

**二、解答题（满分 60 分，其中第 11-13 题各 10 分,第 14、15 题各 15 分）**

11. 一张长方形纸片，长为 200 厘米，将它按如图所示的方式折一下，剪下一个边长等于长方形纸片宽的正方形（称为第一次操作）；再把剩下的长方形纸片继续按相同的方式操作，剪下一个边长等于此时长方形纸片宽的正方形，如此操作下去。若在第 3 次操作后，剩下的长方形纸片恰好为正方形，求原长方形纸片的宽.



**解**:如下图所示，分四种情况考虑：

（1）剪 4 个一样大的正方形，原长方形纸片宽：200÷4＝50（厘米）.

……（3 分）

（2）剪 2 个较大的和 2 个较小的，原长方形纸片宽：200÷5×2＝80（厘米）.

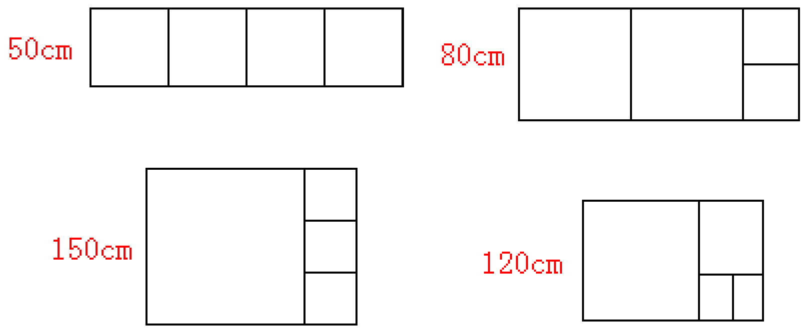
……(6 分)

（3）剪 1 个较大的和 3 个较小的，原长方形纸片宽：200÷4×3＝150（厘米）.

……(8 分)

（4）剪 1 个较大的和 3 个较小的，原长方形纸片宽：200÷5×3＝120（厘米）.

……(10 分)




12. 小明家离外婆家有 2500 米的路程，其中平路占$\frac{1}{5}$，到外婆家上山路是下山路的$\frac{2}{3}$，小明从家出发，用了 50 分钟到达外婆家。已知小明上山路的速度比

平路慢 20%，下山路的速度比平路快 20%，照这样计算，小明从外婆家返回家里要走多少分钟？

**解**:小明到外婆家，上山路是全程的（$1-\frac{1}{5}$）$\times\frac{2}{2+3}=\frac{8}{25}$，下山路是全程的（$1-\frac{1}{5}$）$\times\frac{3}{2+3}=\frac{12}{25}$． ……(1 分)

平路、上山路与下山路的路程比是$\frac{1}{5}:\frac{8}{25}:\frac{12}{25}=5:8:12$. ……(2 分)

平路、上山路与下山路的速度比是 1∶(1－20%)∶(1＋20%)＝5∶4∶6.

……（3 分）

那么他在平路、上山路与下山路所用时间的比是$\frac{5}{5}:\frac{8}{4}:\frac{12}{6}=1:2:2$）. ……（5 分）

在平路上所用的时间是 $50\times\frac{1}{1+2+2}=10$（分），在平路的速度是 $2500\times\frac{1}{5}\div10=50$（米/分），上山路的速度是 50×（1－20%）＝40（米 /分），下山路的速度是 50×（1＋20%）＝60（米/分）． ……（7 分）

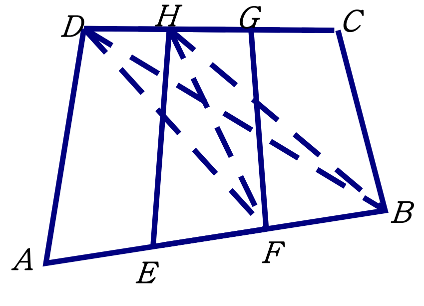
返回家里的用时为：$10+2500\times\frac{8}{25}\div60+2500\times\frac{12}{25}\div40=10+13\frac{1}{3}+30=53\frac{1}{3}$（分）. ……（10 分）

答：小明从外婆家返回家里要走 $53\frac{1}{3}$ 分钟.

13、如图四边形 $ABCD$ 为任意四边形，且它的面积为 $30cm^2$，$E$、$F$ 将 $AB$ 三等分，$G$、$H$ 将 $CD$ 三等分，连接 $FG$ 和 $EH$，则原四边形被分成三个小的四边形，试求中间的小四边形 $EFGH$ 的面积.

**解**： 连接 $DB$、$DF$、$BH$、$HF$．因为

$S_{\Delta DFB}=\frac{1}{3}S_{\Delta DAB}$,,  $S_{\Delta BHD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}$



所以，$S_{\Delta DFB}+S_{\Delta BHD}=\frac{1}{3}(S_{\Delta DAB}+S_{\Delta BCD})$，

即 $S_{DFBH}=\frac{1}{3}S_{DABC}$. ……(5 分)

因为 $S_{\Delta HEF}=S_{\Delta HFB}$，$S_{\Delta FGH}=S_{\Delta FHD}$，

所以，$S_{\Delta HEF}+S_{\Delta FGH}=S_{\Delta HFB}+S_{\Delta FHD}$，

即 $S_{HEFG}=S_{DFBH}$，因此，$S_{HEFG}=\frac{1}{3}S_{DABC}=10cm^2$. ……(10 分)

说明：只给出答案“$S_{HEFG}=10cm^2$”的给 1 分.

**14**.为了准备参加“鹏程杯”数学竞赛，小明用 5 天时间共做了 31 道练习题.每天做题的数量都比前一天有所增加.如果他第一天做题量是第五天的三分之一，问他第四天作了几道题？简述你的理由.

**考查内容：题目不难，主要考察说明理由的逻辑表述.**

**答：**8 道题.

**解**：如果小明在第一天作了不多于两道题, 即这意味着在第五天他做了不多于六道题. 并且 5 天做题总数不多于$5\cdot6=30$道，小于总题数 31 道. 不符.

如果在第一天他做了不少于 4 道题，那么在第二天做了不少于 5 道题，在第三天做了不少于 6 道题， 第四天不少于 7 道题，而在第五天不少于 12 道题. 这样他五天做题总数不少于 4+5+6+7+12=34 道题. 大于总题数 31 道题. 不符.

由此得出，在第一天小明只能做 3 道题. 在第五天他作了 9 道题.

我们假设，在第四天他做了不多于 7 道题，则在第三天他做了不多于 6 道题，在第二天他做了不多于 5 道题.五天共做不多于 3+5+6+7+9=30 道题.不合题意.这样一来，在第四天他只能做 8 道题.

例如：从第一天到第五天分别做 3，5，6，8，9 道题，或分别做 3，4，7，8，9 道题——满足题设条件.

评分说明：猜到第四天做 8 道题，可给 1 分；同时列举了从第一天到第五天分别做 3，5，6，8，9 道题，或分别做 3，4，7，8，9 道题的 3 分；猜到第四天做 8 道题，并说明了理由的 5 分；进一步说明“第一天不能做两道题或少于两道题”的另得 5 分；进一步说明“第一天不能做四道题或多于四道题”的也另得 5

分.

**15.** 如果存在连续的$n$个非零自然数，每个数的质因数分解式（相同的质因数都写成乘方的形式）中，所有质数的乘方次数都是奇数，这样的$n$个连续自然数称作一组“$n$朵梅花数”.

如$13=13^1,14=2^1\times7^1,15=3^1\times5^1$就是一组“3 朵梅花数”.

（1）请你写出一组“4 朵梅花数”.

（2）试确定$n$的最大值.并说明理由.

**考察内容：对新概念的理解，会举符合定义的实例，考察离散极值的求法.**

**解**:（1）如$21=3^1\times7^1,22=2^1\times11^1,23=23^1,24=2^3\times3^1$,就是一组“4 朵梅花数”. ……（5 分）

（2）我们先证明$n\geq8$时不存在“8 朵梅花数”.

因为$n\geq8$时，其中连续的 8 个非零自然数必有一个是 8 的倍数，设这个数是$m$,则$m-4,m+4$至少有一个属于这$n$个连续的自然数.不妨设$m+4$属于这$n$个连续的自然数，则$m+4$被 4 整除但不被 8 整除，即$m+4$得质因数分解式中 2 的乘方指数为 2（偶数），不符合“梅花数”定义的要求.所以$n\geq8$时不存在“$n$朵梅花数”.因此$n\leq7$. ……（10 分）

我们举例$n=7$是可以达到的.

如 $29=29^1,30=2^1\times3^1\times5^1,31=31^1,32=2^5,33=3^1\times11^1,34=2^1\times17^1,35=5^1\times7^1$,就是一组“7 朵梅花数”. ……（15 分）