

提高篇之完全平方数

知识讲解：

我们把一个自然数的平方所得到的数叫做完全平方数

性质：

- 1.完全平方数的尾数只能是 0, 1, 4, 5, 6, 9。不可能是 2, 3, 7, 8。
- 2.在两个连续正整数的平方数之间不存在完全平方数。
- 3.完全平方数的约数个数是奇数，约数的个数为奇数的自然数是完全平方数。
- 4.若质数 p 整除完全平方数 a^2 ，则 p 能整除 a

平方差公式回顾：

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

完全平方数的判别方法：

- (1)两个连续自然数的乘积不是完全平方数。
- (2)两个连续自然数的平方数之间不再有平方数。
- (3)一个整数如果除以 4 余 2 或者除以 4 余 3，那么这个整数肯定不是完全平方数。
- (4)一个整数如果除以 3 余 2，那么这个整数肯定不是完全平方数
- (5)完全平方数的个位数字是奇数时，其十位上的数字必为偶数若个位数字是 6 时，其十位上的数字必为奇数。

课上习题：

【例 1】已知自然数 n 满足： $12!$ 除以 n 得到一个完全平方数，则 n 的最小值是多少？

【例 2】有 2008 盏灯，分别对应编号为 1 至 2008 的 2008 个开关现在有编号为 1 至 2008 的 2008 个人来按动这些开关。已知第 1 个人按的开关的编号是 1 的倍数（也就是说他把所有的开关都按了一遍），第 2 个人按的开关的编号是 2 的倍数，第 3 个人按的开关的编号是 3 的倍数……依此做下去，第 2008 个人按的开关的编号是 2008 的倍数。如果刚开始的时候，灯全是亮着的，那么这 2008 个人按完后，还有多少盏灯是亮着的？

【例题 3】已知 $n!+3$ 是一个完全平方数，试确定自然数 n 的值。（ $n!=1\times 2\times 3\times \dots\times n$ ）

课后习题：

基础篇：

【闯关 1】一个数减去 100 是一个平方数，减去 63 也是一个平方数，问这个数是多少？

解析：第一个平方数为 b^2 ，第二个平方数为 a^2 ，由题意得：

$$b^2+100=a^2+63,$$

$$a^2-b^2=100-63=37,$$

$$\text{即：} a^2-b^2=37=37\times 1$$

考虑同奇偶性，可知 $a=19$ ， $b=18$ ，

这个数为 $a^2+63=19\times 19+63=424$ ；

【闯关 2】两个完全平方数的差为 77，则这两个完全平方数的和最大是多少？最小是多少？

解析：第一个平方数为 b^2 ，第二个平方数为 a^2 ，

由题意得： $a^2 - b^2 = 77 = 77 \times 1 = 7 \times 11$

所以 $a - b = 1$ ， $a + b = 77$ ，可知 $a = 39$ ， $b = 38$ ，完全平方数的和是 2965

$a - b = 7$ ， $a + b = 11$ ，可知 $a = 9$ ， $b = 2$ ，完全平方数的和是 89

提高篇：

【闯关 3】有一个正整数的平方，它的最后三位数字相同但不为 0，试求满足上述条件的最小的正整数

解析：平方数的末尾只能是 0，1，4，5，6，9，因为 111，444，555，666，999 都不是完全平方数，所以所求的数最小是 4 位数。考察 1111，1444.....可以知道 $1444 = 38 \times 38$ ，所以满足条件的最小正整数是 1444。

【闯关 4】三个连续正整数，中间一个是完全平方数，将这样的三个连续正整数的积称为“美妙数”。问：所有小于 2008 的美妙数的最大公约数是多少？

解析：(1) 任何连续三个正整数必有一个能为 3 整除，所以任何“美妙数”必有因子 3。

(2) 中间的数是偶数，它又是完全平方数，必定能为 4 整除，若中间的数是奇数，则第一和第三个数是偶数，所以任何“美妙数”必有因子 4。

(3) 完全平方数的个位只能是 1,4,5,6,9,0，若个位是 5 和 0，则中间的数必能被 5 整除，若其各位是 1 和 6，则第一个必能被 5 整除，若其个位是 4 和 9，则第三个数必能被 5 整除，所以，任何“美妙数”必有因子 5

(4) 上述说明“美妙数”都有因子 3,4,5，也就是有因子 60，即所有的美妙数的最大公约数至少是 60， $60 = 3 \times 4 \times 5$ ，美妙数的最大公约至多是 60，所以只能是 60。

巅峰篇：

【闯关 5】设 p, a, b, c 均为互不相等的质数，且满足 $p = a^4 + b^4 + c^4 - 3$ ，则满足条件的 p 的和为多少？

解析：显然 a, b, c 中必有 2，否则若 a, b, c 都不等于 2，则 a, b, c 均为奇数，则 p 为非零偶数。

不妨设 $c=2$ ，则 $p = a^4 + b^4 + 13$ ，如果 a, b 都不等于 3，则 a, b 都可以写成 $6n \pm 1$ 的形式，因而 $a^4 + b^4 = 6m + 2$ ，所以 $p = 6m + 15$ ，此时 p 显然是合数，矛盾，所以 a, b 中必有 3。

不妨设 $b=3$ ， $p = a^4 + 94$ ，由于 a 必为奇数，其个位数只能是 1, 3, 5, 7, 9，除了 5 之外，其余四个数的四次方的个位数都是 1，与 94 相加后个位数为 5，显然导致 p 为合数，所以 a 的个位数为 5，因为 a 为质数，所以 $a=5$ 。

综上， p 只有 1 个， $p=719$ 。