

巅峰篇之物不知数

故事引入：

韩信点兵

淮安民间传说着一则故事——“韩信点兵”其次有成语“韩信点兵，多多益善”。韩信带 1500 名兵士打仗，战死四五百人，站 3 人一排，多出 2 人；站 5 人一排，多出 4 人；站 7 人一排，多出 6 人。韩信马上说出人数：1049。

中国剩余定理：

《孙子算经》中有记载：“今有物不知其数：三三数之余二，五五数之余三，七七数之余二，问物几何？”它的意思就是，有一些物品，如果 3 个 3 个的数，最后剩 2 个；如果 5 个 5 个的数，最后剩 3 个；如果 7 个 7 个的数，最后剩 2 个；求这些物品一共有多少？这个问题人们通常把它叫作“孙子问题”，西方数学家把它称为“中国剩余定理”。到现在，这个问题已成为世界数学史上闻名的问题。到了明代，数学家程大位把这个问题的算法编成了四句歌诀：

三人同行七十稀，

五树梅花廿一枝；

七子团圆正半月，

除百零五便得知。

用现在的话来说就是：一个数用 3 除，除得的余数乘 70；用 5 除，除得的余数乘 21；用 7 除，除得的余数乘 15。最后把这些乘积加起来再减去 105 的倍数，就知道这个数是多少。

同余概念

两个整数 a b 若它们除以整数 m 所得的余数相等，则称

a 与 b 对于模 m 同余或 a 同余于 b 模 m 或 b 模 m 余 a

记作 $a \equiv b \pmod{m}$

课上习题：

【例 1】一个大于 10 的数，除以 3 余 1，除以 5 余 2，除以 11 余 7，问满足条件的最小自然数是多少？

【例 2】一个大于 10 的自然数，除以 5 余 3，除以 7 余 1，除以 9 余 8，那么满足条件的自然数最小为 。

【例 3】有连续的三个自然数 a 、 $a+1$ 、 $a+2$ ，它们恰好分别是 9、8、7 的倍数，求这三个自然数中最小的数至少是多少？

总结

①凑“多”相同，即把余数处理成相同

条件：余数与除数的和相同

②凑“缺”相同，即把余数处理成缺的数字相同

条件：除数与余数的差相同

③先考虑上面两种，如果都不行，可使用逐步满足法或使用“中国剩余定理”。

④逐步满足法：先满足条件一，得 N ，再用“ $M = N + \text{已满足除数公倍数}$ ”来满足下一个条件。

课后习题：

【闯关1】刘叔叔养了400多只兔子。如果每3只兔子关在一个笼子里，那么最后一个笼子里有2只；如果5只兔子关在一个笼子里，那么最后一个笼子里有4只；如果每7只兔子关一个笼子里，那么最后一个笼子里有5只。请问：刘叔叔一共养了多少只兔子？

【闯关2】有三个连续的自然数，它们从小到大依次是5、7、9的倍数。这三个连续自然数最小是多少？

【闯关3】有一些自然数 n ，满足： $2^n - n$ 是3的倍数， $3^n - n$ 是5的倍数， $5^n - n$ 是2的倍数。请问：这样的 n 中最小的是多少？