

提高篇之约数与倍数

约数与倍数

注：0 被排除在约数与倍数之外

最大公约数：

如果一个自然数同时是若干个自然数的约数，那么称这个自然数是这若干个自然数的公约数。在所有公约数中最大的一个公约数，称为这若干个自然数的最大公约数。例如 $(8,12) = 4$ ， $(6,9,15) = 3$

最小公倍数：

如果一个自然数同时是若干个自然数的倍数，那么称这个自然数是这若干个自然数的公倍数。在所有公倍数中最小的一个公倍数，称为这若干个自然数的最小公倍数。例如： $[8,12] = 24$ ， $[6,9,15] = 90$

求最大公约数：

(一) 分解质因数

(二) 短除法

求最小公倍数：

(一) 分解质因数

(二) 短除法

(三) 求最大公约数法

最大公约数与最小公倍数的常用性质

- ①两个自然数分别除以它们的最大公约数，所得的商互质。
- ② 两个数的最大公约和最小公倍的乘积等于这两个数的乘积。
- ③对于任意 3 个连续的自然数，如果三个连续数的奇偶性为
 - a)奇偶奇，那么这三个数的乘积等于这三个数的最小公倍数
 - b)偶奇偶，那么这三个数的乘积等于这三个数最小公倍数的 2 倍

课上经典例题：

【例 1】把 20 个梨和 25 个苹果平均分给小朋友，分完后梨剩下 2 个，而苹果还缺 2 个，
一共最多有多少个小朋友？

【例 2】两个自然数的和是 50，它们的最大公约数是 5，试求这两个数的差。

【例 3】一次考试，参加的学生中有 $\frac{1}{7}$ 得优， $\frac{1}{3}$ 得良， $\frac{1}{2}$ 得中，其余的得差，已知参加
考试的学生不满 50 人，那么得差的学生有（ ）人。

课后习题

基础篇：

【闯关1】.两个数的差是6，它们的最大公约数可能是多少？

解析：设这两个数为 A 、 B ， $(A, B) = M$ ， $A = Ma$ $B = Mb$

$$A - B = M \times (a - b) = 6$$

$\therefore M$ 有可能为 1、2、3、6。

【闯关2】张阿姨把225 个苹果、350 个梨和150 个桔子平均分给小朋友们，最后剩下9 个苹果、26个梨和6 个桔子没有分出去。请问：每个小朋友分了多少个苹果？

解析：苹果： $225 - 9 = 216$ （个）

梨： $350 - 26 = 324$ （个）

桔： $150 - 6 = 144$ （个）

$$(216, 324, 144) = 36$$

苹果每个小朋友分了： $216 \div 36 = 6$ （个）。

提高篇

【闯关3】有4 个不同的正整数，它们的和是1111。请问：它们的最大公约数最大能是多少？

解析： $1111 = 11 \times 101$ ，11 能表示成4 个互质的数之和

\therefore 最大公约数最大可能是 101。

【闯关4】两个数的最大公约数是6，最小公倍数是420，如果这两个数相差18，那么较小的数是多少？

解析： $420 \div 6 = 70$ $18 = 3 \times 6$

$70 = 1 \times 70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10$

只有 $10 - 7 = 3$

\therefore 较小数为 $7 \times 6 = 42$ 。

巅峰篇

【闯关5】甲、乙两个数的最小公倍数是90，乙、丙两个数的最小公倍数是105，甲、丙两个数的最小公倍数是126。请问：甲数是多少？

解析： $[\text{甲}, \text{乙}] = 90 = 2 \times 3 \times 5 \times 3$

$[\text{乙}, \text{丙}] = 105 = 3 \times 5 \times 7$

$[\text{甲}, \text{丙}] = 126 = 2 \times 3 \times 7 \times 3$

乙可能是 $5 \times \square$ 或 $3 \times \square$ 或 $3 \times 5 \times \square$

丙可能是 $7 \times \square$ 或 $3 \times \square$

甲可能是 $2 \times \square$ $2 \times 3 \times \square$, $2 \times 3 \times 3 \times \square$ $3 \times 3 \times \square$

但只有乙是 $3 \times 5 = 15$ 甲： $2 \times 3 \times 2 = 18$ 丙： 7 。