

## 提高篇之约数与倍数（二）

### 因数个数定理

一个整数的约数的个数是在对其严格分解质因数后，将每个质因数的指数(次数)加1后所得的乘积。

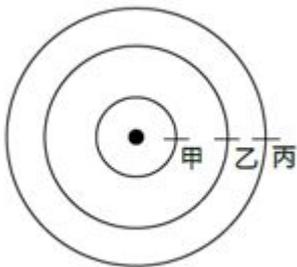
### 两个最简分数的最小公倍数和最大公约数

### 课堂练习：

【例题1】(1) 20000 的约数有多少个？(2) 720 的约数有多少个？

【例题2】72 共有多少个约数？其中有多少个约数是3 的倍数？

【例题3】三条圆形跑道，圆心都在拐卖中的旗杆处。里圈跑道长 $\frac{1}{5}$ 千米，中圈跑道长 $\frac{1}{4}$ 千米，外圈跑道长 $\frac{3}{8}$ 千米。甲、乙、丙三人分别在里圈、中圈、外圈沿同样的方向跑步。开始时，三人都在旗杆的正东方向，甲每小时跑 \_\_\_\_\_ 千米，乙每小时跑4 千米，丙每小时跑5 千米。他们同时出发。请问：几小时后，三人第一次同时回到出发点？



课后习题：

基础篇：

【闯关 1】5400 共有多少个约数？

解析： $5400=2^3 \times 3^3 \times 5^2$ ，约数个数有  $P=(3+1) \times (3+1) \times (2+1)=48$  (个)

【闯关 2】两数乘积为 2800，已知其中一个数的约数个数比另一个数的约数个数多 1。这两个数分别是多少？

解析： $2800=2^4 \times 5^2 \times 7$

$\therefore (2+1) \times (1+1)=6$  (个)  $4+1=5$  (个)

$\therefore$  这两个数为  $2^4=16$ ， $5^2 \times 7=175$ 。

提高篇：

【闯关 3】360 共有多少个奇约数？所有这些奇约数的和是多少？

解析： $360=2^3 \times 3^2 \times 5$ ，奇约数有： $(2+1) \times (1+1)=6$  (个)

奇约数的和是： $(3^0+3^1+3^2) \times (5^0+5^1)=78$

【闯关 4】所有 70 的倍数中，共有多少个恰有 70 个约数？

解析：设 70 的  $N$  倍恰有 70 个约数。

$$70=2 \times 5 \times 7 \text{ 有 } : (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 2^3 = 8$$

$\therefore 8$  不整除  $70 \therefore N$  内可能有 2、5、7

若有 4 个不同质因数，但 70 只能表示为  $2 \times 5 \times 7$

$\therefore N$  内必含 2、7、5 中几个

$$\therefore 70N = 2^{(a+1)} \times 5^{(b+1)} \times 7^{(c+1)}$$

$$(a+1+1) \times (b+1+1) \times (c+1+1) = 70$$

$a$ 、 $b$ 、 $c$  分别是 0, 3, 5 中一个

$N$  为  $2^3 \times 5^5$ ,  $2^3 \times 7^5$ ,  $2^5 \times 3^3$ ,  $2^5 \times 7^3$ ,  $5^3 \times 7^5$ ,  $5^5 \times 7^3$  一共 6 组

巅峰篇：

【闯关 5】一根长为  $L$  的木棍，用红色刻度线将它分成  $m$  等份，用黑色刻度线将它分成  $n$  等份 ( $m > n$ )

(1) 设  $x$  是红色与黑色刻度线重合的条数，请说明： $x+1$  是  $m$  和  $n$  的公约数；

(2) 如果按刻度线将该木棍锯成小段，一共可以得到 170 根长短不等的小棍，其中最长的木棍恰有 100 根，试确定  $m$  和  $n$  的值

解析：(1) 红色每段长  $L/m$ ，黑色每段长  $L/n$ ，他们的最小公倍数是： $[L/m, L/n] = L/(m, n)$ ，这样的段数共有： $L/[L/(m, n)] = (m, n)$  段，中间重合的刻度点有  $(m, n) - 1$  条，即  $x = (m, n) - 1$ ，即  $x + 1 = (m, n)$ ，故结论成立。

(2) 红线与黑线重合的刻度线是  $(m, n) - 1$  条，则木棍上刻度线的总数是  $(m - 1) + (n - 1) - ((m, n) - 1) = m + n - (m, n) - 1$  (重合的线看作 1 条)

按这些刻度线锯断长木棍，可以得到 170 根长短不等的小棍，所以

$$m + n - (m, n) = 170$$

长木棍上部和红色刻度线重合的黑色刻度线的条数是  $n-1-((m, n)-1) = n-(m, n)$

由于黑色刻度线少，红色刻度线多，两条相邻的红线的距离要小于两条相邻的黑线的距离，所以，两条相邻的红线中间最多只有一条黑色刻度线。按红色刻度线锯下的  $m$  个小木棍中，其中  $n-(m,n)$  个有黑色刻度线，相邻两条红色刻度线，如果中间没有黑色刻度线，那么按这两条红色刻度线锯下来的就是最长的短棍，所以  $m-n+(m,n) = 100$

所以得出  $m=135$ ，把  $m=135$  代入  $(135, n) = n-35$

$(135,n)$  是  $n$  的约数，就整除 35，因此， $(135, n)$  是 135 和 35 的公约数，即  $(135, n) = 1$  或 5.

$(135, n) = 1$ ，则  $n=36$ ， $(135,36) = 9$  矛盾！若  $(135, n) = 5$ ，则  $n=40$ ，

$(135,40) = 5$ ，满足条件

$M=135, n=40$