

第十二届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 七年级决赛答案

一、填空题

1. 答案：-7

解答： $\because (m-x)(-x) - (x+m)(-n) = 5x + x^2 - 6$

$$\therefore x^2 + (n-m)x + mn = x^2 + 5x - 6$$

$$\therefore n-m=5, \quad mn=-6$$

$$\therefore m(n-1) + n(m+1) = 2mn + n - m = -12 + 5 = -7$$

2. 答案：1157

解答：由已知， $k = x + y + m + n = \frac{5^3}{8^3}n + \frac{5^2}{8^2}n + \frac{5}{8}n + n = \frac{1157}{8^3}n$

因 x, y, m, n 为自然数， $\therefore k$ 也为自然数

而 $(1157, 8^3) = 1$ ，故 $n = 8^3$ 时，最小值 $k = 1157$

3. 答案：20119

解答： $\frac{N}{10} = \frac{2011^{2012} + 2012^{2013}}{2011^{2011} + 2012^{2012}}$

$$= \frac{2011(2011^{2011} + \frac{2012}{2011} \cdot 2012^{2012})}{2011^{2011} + 2012^{2012}} > 2011;$$

$$\frac{N}{10} - 2011 = 2011 \left(\frac{2011^{2011} + \frac{2012}{2011} \cdot 2012^{2012}}{2011^{2011} + 2012^{2012}} - 1 \right)$$

$$= 2011 \cdot \frac{\frac{1}{2011} \cdot 2012^{2012}}{2011^{2011} + 2012^{2012}}$$

$$= \frac{2012^{2012}}{2011^{2011} + 2012^{2012}}$$

$$1 > \frac{2012^{2012}}{2011^{2011} + 2012^{2012}} = \frac{1}{\frac{1}{2012} \times \left(\frac{2011}{2012}\right)^{2011} + 1} > \frac{1}{\frac{1}{2012} + 1} > 0.9 \Rightarrow 1 > \frac{N}{10} - 2011 > 0.9$$

即 $10 > N - 20110 > 9 \Rightarrow 20120 > N > 20119$ ，所以答案为 20119。

4. 答案: 900°

解答: 连接 NK, KI, IF, FC, 则所求式=多边形 $ABCFIKN$ 的内角和, 答案为 900°

5. 答案: $\frac{13}{2}$

解答: 如果 $a < 6$, 那么当 $x = a$ 时, 有

$$|x+1|+|x-6|+2|x-a|=|a+1|+|a-6|=(a+1)+(6-a)=7, \text{ 小于 } 8, \text{ 与已知条件矛盾.}$$

所以 $a \geq 6$.

而算式 $|x+1|+|x-6|+2|x-a|$ 的几何意义是点 x 到 -1 、 6 、 a 、 a 的 4 个点的距离之

和, 当 $6 \leq x \leq a$ 时取最小值。因此令 $x = 6$ 可得 $7+2|6-a|=8$, 解得 $a = \frac{13}{2}$ 。

6. 答案: 189

解答: $x^{10} - 6x^5 + 4x^2 - 4xy + y^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^5 - 3)^2 + (2x - y)^2 = 0$, 所以 $\begin{cases} y = 2x \\ x^5 = 3 \end{cases}$ 。

而 $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 = \frac{y^6 - x^6}{y - x}$, 将 $y = 2x$ 代入得

$$\frac{y^6 - x^6}{y - x} = \frac{(2x)^6 - x^6}{(2x) - x} = \frac{63x^6}{x} = 63x^5 = 63 \times 3 = 189。$$

7. 答案: 98, 38

解答: 设 A 的单价为 x 元, B 的单价为 y 元 ($x, y \in \mathbb{Z}^+$)

由题意, 得 $\begin{cases} 20x + 27y + 10 + \alpha = 3000 \\ 25x + 14y + 10 + \beta = 3000 \end{cases}$, 其中 $1 \leq \alpha \leq 9, 1 \leq \beta \leq 9, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$;

$$\therefore 79y + 5\alpha - 4\beta = 2990, \text{ 即 } y = \frac{2990 - 5\alpha + 4\beta}{79};$$

$$\text{令 } \alpha=9, \beta=1, y \geq \frac{2990-5 \times 9+4 \times 1}{79} = \frac{2949}{79} = 37 \frac{26}{79};$$

$$\text{令 } \alpha=1, \beta=9, y \leq \frac{2990-5 \times 1+4 \times 9}{79} = \frac{3021}{79} = 38 \frac{19}{79};$$

$$\therefore 37 \frac{26}{79} \leq y \leq 38 \frac{19}{79} \Rightarrow y=38;$$

$$\therefore 20x + \alpha = 1964, \text{ 即 } x = \frac{1964 - \alpha}{20}$$

$$\text{令 } \alpha=9, x \geq \frac{1964-9}{20} = 97 \frac{3}{4};$$

$$\text{令 } \alpha=1, x \leq \frac{1964-1}{20} = 98 \frac{3}{20};$$

$$\therefore 97 \frac{3}{4} \leq x \leq 98 \frac{3}{20} \Rightarrow x=98.$$

$$8. \text{ 答案: } \begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=3 \end{cases}, \begin{cases} x_3=-3 \\ y_3=2 \end{cases}, \begin{cases} x_4=2 \\ y_4=-3 \end{cases}$$

解答: $|(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}+y)| = \sqrt{6}$ 等价于两个方程: $(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}+y) = \sqrt{6}$ 或

$(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}+y) = -\sqrt{6}$ 。对于 $(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}+y) = \sqrt{6}$ 来说, 展开得到

$$6 + \sqrt{6}(x+y) + xy = \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} 6+xy=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=3 \end{cases}; \text{ 对于}$$

$(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}+y) = -\sqrt{6}$ 来说, 展开得到

$$6 + \sqrt{6}(x+y) + xy = -\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} 6+xy=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-3 \\ y_3=2 \end{cases}, \begin{cases} x_4=2 \\ y_4=-3 \end{cases}$$

9. 答案: 1

解答:

$$a^2 + b^2 + ab + a + b$$

$$= a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 + ab \cdot 1 + a \cdot 1 + b \cdot 1$$

$$= a^2(x-by) + b^2(y-ax) + ab(bx+ay) + a(y-ax) + b(x-by)$$

$$= bx + ay$$

$$= 1$$

10. 答案: $(6,4), (6,3), (4,4)$

解答: 设这两个数的最大公约数为 d , 则这两个数分别为 $a = dm, b = dn$, 最小公

倍数为 dmn 。根据题意，得等式 $dmn + d = dmdn - dm - dn \Rightarrow dmn = mn + m + n + 1$ 。

所以 $dmn = (m+1)(n+1) \Rightarrow d = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n+1}{n}$ 。容易知道

$\frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m} \leq 2, \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ ，所以 $d = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{n+1}{n} \leq 4$ 。显然 $d > 1$ ，由此尝试

$d = 2, 3, 4$ 。依次代入原式，可以求得解为 $(6, 4), (6, 3), (4, 4)$

二、动手动脑题

1. 证明：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x+2)(x-2)(x-3)(x-7)+100 \\ &= (x^2-5x-14)(x^2-5x+6)+100 \\ &= (x^2-5x)^2-8(x^2-5x)-84+100 \\ &= (x^2-5x)^2-8(x^2-5x)+16 \\ &= (x^2-5x-4)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

所以 $(x^2-4)(x-3)(x-7)+100$ 的值为非负数，得证

2. 答案： $x_1=6, x_2=-1, x_3=-3, x_4=2$

解答：

$$\begin{aligned} x - \frac{17}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{36}{x^3} &= 4 \\ \Rightarrow x^2 - 17 + \frac{24}{x} + \frac{36}{x^2} &= 4x \\ \Rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} &= 4x - \frac{24}{x} + 17 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} &= 4\left(x - \frac{6}{x}\right) + 17 \\ \Rightarrow x^2 - 12 + \frac{36}{x^2} &= 4\left(x - \frac{6}{x}\right) + 5 \\ \Rightarrow \left(x - \frac{6}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{6}{x}\right) - 5 &= 0 \\ \Rightarrow \left[\left(x - \frac{6}{x}\right) - 5\right] \left[\left(x - \frac{6}{x}\right) + 1\right] &= 0 \end{aligned}$$

所以 $\left(x - \frac{6}{x}\right) - 5 = 0$ 或 $\left(x - \frac{6}{x}\right) + 1 = 0$ 。当 $\left(x - \frac{6}{x}\right) - 5 = 0$ 时，

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ 或 $x = -1$ ；当 $\left(x - \frac{6}{x}\right) + 1 = 0$ 时，

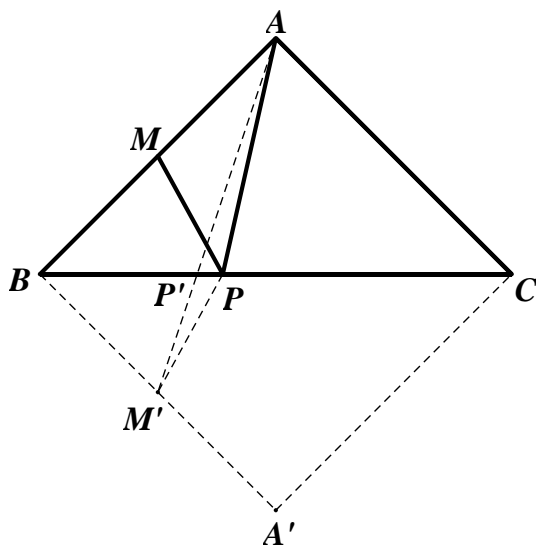
$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3$ 或 2 ，所以一共四个解。

3. 答案：2

解：如下图，做 $\triangle ABC$ 关于 BC 的对称图形 $\triangle A'BC$ ， M 的对称点为 M' ，当 A, P, M' 在同一直线上时，也就是点 P 运动到点 P' 时， $PA + PM$ 最小，所以

$t = AM' = \sqrt{AB^2 + BM'^2} = \sqrt{5}$ ；当 P 运动到点 C 时， $PA + PM$ 最大，所以

$s = CA + CM = CA + \sqrt{AC^2 + AM^2} = 2 + \sqrt{5}$ ，所以 $s - t = 2$ 。



4. 证明：因为 $\frac{a}{bc-a^2} + \frac{b}{ca-b^2} + \frac{c}{ab-c^2} = 0$ ，

故 $\frac{a}{bc-a^2} = -\frac{b}{ca-b^2} - \frac{c}{ab-c^2} = \frac{-ab^2 + bc^2 - c^2a + b^2c}{(ca-b^2)(ab-c^2)}$ ，

从而 $\frac{a}{(bc-a^2)^2} = \frac{-ab^2 + bc^2 - c^2a + b^2c}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}$ ，

同理， $\frac{b}{(ca-b^2)^2} = \frac{-bc^2 + ca^2 - a^2b + c^2a}{(ca-b^2)(ab-c^2)(bc-a^2)}$ ，

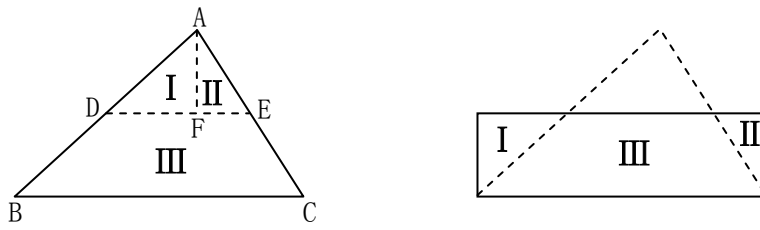
$\frac{c}{(ab-c^2)^2} = \frac{-ca^2 + ab^2 - b^2c + a^2b}{(ab-c^2)(bc-a^2)(ca-b^2)}$ 。

因此 $\frac{a}{(bc-a^2)^2} + \frac{b}{(ca-b^2)^2} + \frac{c}{(ab-c^2)^2}$
 $= \frac{-ab^2 + bc^2 - c^2a + b^2c}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)} + \frac{-bc^2 + ca^2 - a^2b + c^2a}{(ca-b^2)(ab-c^2)(bc-a^2)} + \frac{-ca^2 + ab^2 - b^2c + a^2b}{(ab-c^2)(bc-a^2)(ca-b^2)}$
 $= \frac{(-ab^2 + bc^2 - c^2a + b^2c) + (-bc^2 + ca^2 - a^2b + c^2a) + (-ca^2 + ab^2 - b^2c + a^2b)}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)} = 0$ 。

5. 答案：有很多剪法。下面举出两种方法：

连接 AB 、 AC 两边上的中点 D 与 E ，作 $\triangle ADE$ 的高 AF ，把 $\triangle ABC$ 分成 I、II、III，

然后按下图拼接。



取 AB 的中点 D ， AC 的中点 E ，分别作垂线 DF ， EG 将 $\triangle ABC$ 分成 I 、 II 、 III ，然后按下图拼接。

