

# 第 14 届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 七年级决赛答案

## 一、填空题：

1. 【答案】 0

【解答】 令  $2013=a$ ，则

$$\begin{aligned} & \frac{2014^4 + 4 \times 2013^4}{2013^2 + 4027^2} - \frac{2012^4 + 4 \times 2013^4}{2013^2 + 4025^2} \\ &= \frac{(a+1)^4 + 4a^4}{a^2 + (2a+1)^2} - \frac{(a-1)^4 + 4a^4}{a^2 + (2a-1)^2} \\ &= \frac{(a+1)^4 + 4a^2(a+1)^2 + 4a^4 - 4a^2(a+1)^2}{a^2 + (2a+1)^2} \\ &\quad - \frac{(a-1)^4 + 4a^2(a-1)^2 + 4a^4 - 4a^2(a-1)^2}{a^2 + (2a-1)^2} \\ &= \frac{\left[ (a+1)^2 + 2a^2 \right]^2 - 4a^2(a+1)^2}{a^2 + (2a+1)^2} - \frac{\left[ (a-1)^2 + 2a^2 \right]^2 - 4a^2(a-1)^2}{a^2 + (2a-1)^2} \\ &= \frac{\left[ (a+1)^2 + 2a^2 + 2a(a+1) \right] \left[ (a+1)^2 + 2a^2 - 2a(a+1) \right]}{a^2 + (2a+1)^2} \\ &\quad - \frac{\left[ (a-1)^2 + 2a^2 + 2a(a-1) \right] \left[ (a-1)^2 + 2a^2 - 2a(a-1) \right]}{a^2 + (2a-1)^2} \\ &= (a^2 + 1) - (a^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

2. 【答案】

【解答】 通过全等的证明，我们发现  $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$ ， $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ，所以  
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

3. 【答案】 196

【解答】 设  $\begin{cases} 2014=a \\ 2000=b \end{cases}$ ，注意到  $\begin{cases} 56196=a^2-b^2 \\ 196=(a-b)^2 \end{cases}$ ，从而得到换元后的方程组

$$\begin{cases} ax+by=a^2-b^2 \\ ay-bx=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow (a^2+b^2)x=a(a^2-b^2)-b(a-b)^2=(a^2+b^2)(a-b), \text{ 显然 } a^2+b^2 \neq 0, \text{ 从而推}$$

出  $x=a-b$ ，代入  $ax+by=a^2-b^2 \Rightarrow y=a-b$ ，至此，将  $\begin{cases} 2014=a \\ 2000=b \end{cases}$  代入，得到  $x=y=14$ ，所以

$$x^2 - xy + y^2 = 196$$

4. 【答案】  $x=0$

【解答】令  $\begin{cases} 2^x = a \\ 3^x = b \\ 5^x = c \end{cases}$ ，则原方程转化为  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ，从而推出

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0, \text{ 所以 } a=b=c \Rightarrow 2^x = 3^x = 5^x \Rightarrow x=0$$

## 5. 【答案】9

【解答】本题最简的方法就是拿一个数举例，当然不是很严谨，这里给出严谨的做法。设这个“上升数”为  $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} (n \leq 9)$ ，则  $9A = \underbrace{\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} + \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} + \cdots + \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}}_{9 \text{ 个相加}}$ 。根据乘法

表，我们发现，9个  $a_n$  相加，肯定发生  $a_n - 1$  次进位（比如9个7相加，必然发生6次进位）。考虑到个位数的进行，而且  $a_{n-1} < a_n$ ，则“ $9a_{n-1}$  + 个位数产生的进位”会导致十位数上发生了  $a_{n-1}$  次进位（举例： $34 \times 9$ ，显然个位数上发生3次进位，而十位数上也发生3次进位）。依次类推， $9a_{n-2}$  会产生  $a_{n-2}$ ，……， $9a_1$  会产生  $a_1$ ，所以

$$9A = \underbrace{\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} + \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} + \cdots + \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}}_{9 \text{ 个相加}} \text{ 共产生了 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + (a_n - 1) = (a_1 + \cdots + a_n) - 1 \text{ 次进位}$$

位，所以最后的数字和为  $9(a_1 + \cdots + a_n) - 9[(a_1 + \cdots + a_n) - 1] = 9$

## 6. 【答案】16

【解答】1~7中除了1和4，剩下的所有数字的和是23，所以不在1和4之间的数字和为3。考虑到数字1已经用掉了，所以不在1和4之间只有一个数字3，所以3、1、4的排列方法有  $A_2^2 \times A_2^2 = 4$  种。而5和7之间的数字之和为6，只能是5和7夹着一个数字6，所以总共有  $4 \times 2 \times A_2^2 = 16$

## 7. 【答案】2014

【解答】这个多项式可以设为  $f(x) = a(x-42)(x-68)(x-97)(x-123) + 10$ ，容易发现

$f(x) = f(165-x)$ ，所以

$$\begin{aligned} & f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(165) \\ &= [f(1) - f(164)] - [f(2) - f(163)] + [f(3) - f(162)] - \cdots + f(165) \\ &= f(165) = 2014 \end{aligned}$$

## 8. 【答案】8

【解答】令  $10^{100} = x$ ，则  $M = \left[ \frac{10^{19900}}{10^{100} + 3} \right] = \left[ \frac{x^{199}}{x+3} \right] = \left[ \frac{x^{199} + 3^{199} - 3^{199}}{x+3} \right]$ ，容易知道

$$\frac{x^{199} + 3^{199}}{x+3} = x^{198} - 3x^{197} + 3^2 x^{196} - \cdots + 3^{196} x^2 - 3^{197} x + 3^{198}, \text{ 其中只有 } 3^{198} \text{ 会影响到个位数字。根据之}$$

前的推导，我们有  $M = \left[ \frac{x^{199} + 3^{199} - 3^{199}}{x+3} \right] = \left[ x^{198} - 3x^{197} + 3^2 x^{196} - \cdots + 3^{196} x^2 - 3^{197} x + 3^{198} - \frac{3^{199}}{x+3} \right]$ ，容

易证明  $\frac{3^{199}}{x+3} = \frac{3^{199}}{10^{100}+3} < \frac{3^{199}}{9^{100}+3} = \frac{3^{199}}{3^{200}+3} < 1$ ，所以最后的答案就是  $3^{198}$  的个位数字减1。容易知道  $3^{198}$  的个位数字为9，所以答案为  $9-1=8$

#### 9. 【答案】1230

【解答】设只喜欢羽毛球、只喜欢排球、只喜欢壁球、同时喜欢羽毛球和排球、同时喜欢羽毛球和壁球、同时喜欢排球和壁球的人数分别为  $a, b, c, d, e, f$ ，我们知道  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ d, e, f \geq 1 \end{cases}$ ，且  $a+b+c+d+e+f=5$ ，我们用  $(a, b, c, d, e, f)$  来表示一种人数的分布，接下来讨论几种可能：

(1) 形如  $(0, 0, 0, 3, 1, 1)$  的分布，有  $3 \times C_3^3 \times A_2^2 = 60$  种（其中3表示可以是  $\begin{cases} (0, 0, 0, 3, 1, 1) \\ (0, 0, 0, 1, 3, 1) \\ (0, 0, 0, 1, 1, 3) \end{cases}$  中的一  
种）；

(2) 形如  $(0, 0, 0, 2, 2, 1)$  的分布，有  $3 \times C_3^2 \times C_3^2 = 90$  种（其中3表示可以是  $\begin{cases} (0, 0, 0, 2, 2, 1) \\ (0, 0, 0, 2, 1, 2) \\ (0, 0, 0, 1, 2, 2) \end{cases}$  中的一  
种）；

(3) 形如  $(0, 1, 0, 2, 1, 1)$  的分布，有  $3 \times 3 \times C_3^2 \times A_3^3 = 540$  种（其中第一个3表示  $a, b, c$  哪个取1，第二个3表示  $d, e, f$  哪个取2）；

(4) 形如  $(1, 1, 0, 1, 1, 1)$  的分布，有  $3 \times A_3^5 = 360$  种（其中3表示  $a, b, c$  哪个取0）；

(5) 形如  $(2, 0, 0, 1, 1, 1)$  的分布，有  $3 \times C_3^2 \times A_3^3 = 180$  种（其中3表示  $a, b, c$  哪个取2）；

综上所述，一共有  $60+90+540+360+180=1230$  种组合方式

#### 10. 【答案】 $25^\circ$

【解答】如下图，我们有  $2\angle 2 + 2\angle 3 + (180^\circ - 2\angle 1) = 360^\circ \Rightarrow \angle 3 = 90^\circ + \angle 1 - \angle 2$ ，所以

$$\angle 5 = 180^\circ - \angle 2 - (180^\circ - 2\angle 3) = 2\angle 3 - \angle 2 = 180^\circ + 2\angle 1 - 3\angle 2,$$

$$\angle 4 = 180^\circ - 2\angle 5 = 180^\circ - 2(180^\circ + 2\angle 1 - 3\angle 2) = 6\angle 2 - 4\angle 1 - 180^\circ. \text{ 由于 } \angle 4 + \angle 3 = 90^\circ, \text{ 所以}$$

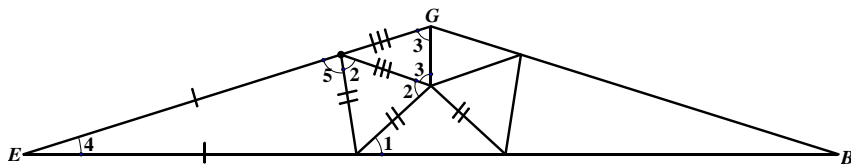
$$(6\angle 2 - 4\angle 1 - 180^\circ) + (90^\circ + \angle 1 - \angle 2) = 90^\circ \Rightarrow \angle 2 = \frac{180^\circ + 3\angle 1}{5}, \text{ 从而推出}$$

$$\angle GEF = \angle 4 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - (90^\circ + \angle 1 - \angle 2) = \angle 2 - \angle 1 = \frac{180^\circ + 3\angle 1}{5} - \angle 1 = \frac{180^\circ - 2\angle 1}{5}. \text{ 由于两个三}$$

角形的角度关系完全相同，所以推出

$$\angle CAB = \frac{180^\circ - 2\angle GEF}{5} = \frac{180^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - 2\angle 1}{5}}{5} = \frac{3}{25} \times 180^\circ + \frac{4}{25} \angle 1 = 21^\circ + \frac{15^\circ + 4\angle 1}{25}. \text{ 由于题目说了,}$$

$$\angle CAB \text{ 是一个完全平方数, 而 } 21^\circ < \angle CAB < 21^\circ + \frac{15^\circ + 4 \times 90^\circ}{25} = 36^\circ, \text{ 所以 } \angle CAB = 25^\circ$$



## 二、动手动脑题：

11. 【答案】不存在

【证明】对于任意实数  $x$ ， $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 < x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{x}\right| < \left|x + \frac{1}{x}\right|$ ，所以  $\left|a_1 - \frac{1}{a_1}\right| < \left|a_1 + \frac{1}{a_1}\right|$ ，

$\left|a_2 - \frac{1}{a_2}\right| < \left|a_2 + \frac{1}{a_2}\right|$ ，……， $\left|a_{2013} - \frac{1}{a_{2013}}\right| < \left|a_{2013} + \frac{1}{a_{2013}}\right|$ 。全部乘起来得

$\left|\left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 - \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(a_{2013} - \frac{1}{a_{2013}}\right)\right| < \left|\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(a_{2013} + \frac{1}{a_{2013}}\right)\right|$ ，所以不可能出现

$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(a_{2013} + \frac{1}{a_{2013}}\right) = \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 - \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(a_{2013} - \frac{1}{a_{2013}}\right)$

12. 【证明】容易知道  $3n^2 + 3n = 3n(n+1) \equiv 0 \pmod{6}$ ，所以推出

$m^3 = 3n^2 + 3n + 7 \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow m \equiv 1 \pmod{6}$ 。令  $m = 6k + 1$ ，代入  $3n^2 + 3n + 7 = m^3$  得

$3n^2 + 3n + 7 = m^3 = (6k + 1)^3 = 6^3 k^3 + 3 \cdot 6^2 k^2 + 3 \cdot 6k + 1 \Rightarrow n^2 + n + 2 = 2 \cdot 6^2 k^3 + 6^2 k^2 + 6k$ ，所以

$n^2 + n + 2 \equiv 0 \pmod{6}$ 。将  $n = 6a, 6a + 1, 6a + 2, 6a + 3, 6a + 4, 6a + 5$  代入检验，发现没有一个满足  $n^2 + n + 2 \equiv 0 \pmod{6}$ ，所以方程没有正整数解

13. 【证明】令  $\begin{cases} BC = a \\ BA = c \\ AP = x \\ PR = y \end{cases}$ ，则可以推出  $\begin{cases} QR = PR = y \\ CQ = a + x - c \end{cases}$ ，利用角平分线定理我们有

$\frac{BC}{BA} = \frac{CR}{AR} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a + x + y - c}{x + y} \Rightarrow a(x + y) = c(a - c) + c(x + y) \Rightarrow (c - a)(x + y - c) = 0$ 。如果

$x + y = c$ ，则  $\begin{cases} AB = AR \\ CB = CR \end{cases} \Rightarrow AB + CB = AC$ ，与三角形两边之和大于第三边矛盾，所以

$c = a$ ，所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形

14. 【答案】 $abc = 3$

【解答】首先容易证明，若  $a, b, c$  中有一个为 0，会导致三个数都为 0，不符合题目中“三个互不相等的数”这个条件。将三个式子相乘，得  $abc = (a - 2)(b - 2)(c - 2)abc$ 。考虑到  $abc \neq 0$ ，从而推出  $(a - 2)(b - 2)(c - 2) = 1$ ；

其次，将三个方程全部展开，得  $\begin{cases} a = bc - 2c \\ b = ca - 2a \\ c = ab - 2b \end{cases}$ ，将三个方程相加，得

$$3(a+b+c) = ab+bc+ca;$$

由于  $\begin{cases} a = bc - 2c \\ b = ca - 2a \end{cases}$ ，两个方程相减得  $a-b=c(b-a)+2(a-c) \Rightarrow (a-b)(1+c) = -2(c-a)$ ，同理可

以得到另外两个式子，最后写在一起为  $\begin{cases} (a-b)(1+c) = -2(c-a) \\ (b-c)(1+a) = -2(a-b) \\ (c-a)(1+b) = -2(b-c) \end{cases}$ ，将三个式子相乘，得

$(a-b)(b-c)(c-a)(1+a)(1+b)(1+c) = -8(a-b)(b-c)(c-a)$ 。由于题目告诉我们  $a, b, c$  互不相等，所以  $(1+a)(1+b)(1+c) = -8$ ；

至此，我们得到三个关系式： $\begin{cases} (a-2)(b-2)(c-2) = 1 \\ 3(a+b+c) = ab+bc+ca, \text{ 展开} \\ (1+a)(1+b)(1+c) = -8 \end{cases}$

$(a-2)(b-2)(c-2) = 1 \Rightarrow abc - 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) - 8 = 1$ ，将  $3(a+b+c) = ab+bc+ca$  代入，得  $abc - 2 \cdot 3(a+b+c) + 4(a+b+c) - 8 = 1 \Rightarrow abc = 2(a+b+c) + 9$ 。将  $\begin{cases} abc = 2(a+b+c) + 9 \\ ab+bc+ca = 3(a+b+c) \end{cases}$

$$abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1 = -8$$

往  $(1+a)(1+b)(1+c) = -8$  里代，得  $\Rightarrow [2(a+b+c) + 9] + 3(a+b+c) + (a+b+c) + 1 = -8$

$$\Rightarrow 6(a+b+c) = -18$$

$$\Rightarrow a+b+c = -3$$

将  $a+b+c = -3$  代入  $abc = 2(a+b+c) + 9 \Rightarrow abc = 3$

### 15. 【答案】

