

第十一届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 七年级决赛答案

一、填空题

1. 【答案】1

【解答】因为 $|a|, |b|, |c|$ 只能等于0, 1, 2, 3等非负整数, 又 $|a| + |b| + |c| = 1$, 故 $|a|, |b|, |c|$ 中一个等于1, 另两个等于0。所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 。

2. 【答案】-3

【解答】设 $x-y=a$ $y-z=b$ $z-x=c$, 则 $a+b+c=0$

$$\begin{aligned} \frac{(y-z)^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{(z-x)^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{(x-y)^2}{(z-x)(z-y)} &= \frac{b^2}{-ac} + \frac{c^2}{-ab} + \frac{a^2}{-bc} = \frac{a^3+b^3+c^3}{-abc} \\ &= -\frac{[(a+b)^3-3ab(a+b)]+c^3}{abc} = -\frac{-c^3+3abc+c^3}{abc} = -3 \end{aligned}$$

3. 【答案】 $a > c > b$

【解答】两式相加得 $3c = a^2 - 2a - 8 = (a-4)(a+2)$ 。

由已知, $3b = (a-1)(a-5)$ 。

因为 $a, b, c > 0$, 所以 $5 < a < 6$ 。

因为 $3a - 3c = 8 - a(a-5) > 0$, 所以 $a > c$ 。

因为 $3c - 3b = 4a - 13 > 0$, 所以 $c > b$ 。

所以 $a > c > b$ 。

4. 【答案】 80°

【解答】通过作辅助线, 构造内错角、同旁内角, 把 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 联系起来, 过C点作 $CF \parallel AB$ 。

5. 【答案】19 或 35

【解答】因为 $mn + 9m + 11n + 133 = (m+11)(n+9) + 34$, 所以 $(m+11) \mid 34, (n+9) \mid 34$, 且 $m+11 = n+9$ 。故 $m+11 = n+9 = 17$ 或 34 , 分别求得每人捐款数为19或35元。

6. 【答案】6

【解答】A的周长可以看作是A、B合起来的正方形周长, 记为 C_{AB} , $\therefore C_{AB} : C_B = 5 : 2$ 。同样, $C_B : C_{BC} = 1 : 2$, $\therefore C_{AB} : C_B : C_{BC} = 5 : 2 : 4$ 也等于边长之比。 \therefore B的面积是

4, $\therefore B$ 的边长为 2, 这样得出 D 的面积为 $3 \times 2 = 6$ 。

7. 【答案】 536

【解答】 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{40}^2$ 取得最大值的策略是一个数取得尽可能大, 其余数取的最小。不妨设 x_1 最大, 那么 x_1 最大可取 $59 - 39 = 20$, 最大值为 $= 20^2 + 39 = 439$ 。

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{40}^2$ 取得最小值的策略是所有的数取得尽可能接近。由于 $1 < \frac{59}{40} < 2$, 我们取 $59 - 40 = 19$ 个 2, $40 - 19 = 21$ 个 1 就可。最小值为 $= 19 \times 2^2 + 21 = 97$ 。
所以 $A + B = 439 + 97 = 536$ 。

8. 【答案】 270

【解答】 设六条线段分别为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6$ 。依题, $a_1 + a_2 \leq a_3, a_2 + a_3 \leq a_4, a_3 + a_4 \leq a_5, a_4 + a_5 \leq a_6$, 注意到 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 21$, \therefore 只能取 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 9$, \therefore 它们的积为 270。

二、动手动脑题

1. 【答案】 甲在北京工作, 教数学; 乙在广州工作, 教英语; 丙在上海工作, 教语文。

【解答】 乙不在北京工作, 则乙不教数学, 且乙不教语文, 所以乙必教英语; 乙不在上海, 且乙不在北京, 所以乙必在广州; 甲不在上海工作, 也不在广州工作, 所以甲必在北京工作, 且教数学。

2. 【答案】 2 点 $20\frac{140}{143}$ 分开始, 4 点 $11\frac{107}{143}$ 分结束。

【解答】 设会议在 2 点 x 分开始, 在 4 点 y 分结束。

$$\text{由题意, 得} \begin{cases} x = 20 + \frac{y}{12}, & \text{①} \\ y = 10 + \frac{x}{12}, & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②代入①, 得 } x = 20 + \frac{10 + \frac{x}{12}}{12}$$

$$\therefore x = 20\frac{140}{143}, \quad y = 11\frac{107}{143}。$$

3. 【答案】 17

【解答】 乙、丙首次相遇是 $\frac{1}{4} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5}$ (分钟), 以后每 $1 \div \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$ (分钟) 相遇一次。甲、丙首次相遇是 $\left(1 - \frac{1}{6}\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{7}$ (分钟), 以后每 $1 \div \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{6}{7}$ (分钟) 相遇一次。

设乙、丙第 $(x+1)$ 次相遇时，甲丙恰好第 $(y+1)$ 次相遇，于是 $t = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x = \frac{5}{7} + \frac{6}{7}y$ ，

整理得： $14x = 9 + 15y$ 。

x, y 的最小整数解是 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$ ， x, y 的通解为 $\begin{cases} x = 6 + 15k \\ y = 5 + 14k \end{cases}$ ， k 为自然数。

当 $k = 0$ 时，三人第一次同时相遇，当 $k = 1$ 时，三人第二次同时相遇。

所以 $t = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times (6+15) = 17$ （分钟）。即在出发 17 分钟后三人第二次同时相遇。

4. 【答案】（1）1.1，15.72

（2）如图

