

## 第十届“中环杯”中小学生思维能力训练活动

### 四年级 决赛答案

一、填空题：（每题5分，共50分。）

1、自然数1，2，3，……，1010的所有数码之和是\_\_\_\_\_。

【分析与解】

（方法一）

因为000~999的所有的数码和为 $(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times (100 \times 3) = 13500$ ；

又因为0的数码为0，1000的数码之和为 $1+0+0+0=1$ ，1001的数码之和为 $1+0+0+1=2$ ，  
1002的数码之和为 $1+0+0+2=3$ ，1003的数码之和为 $1+0+0+3=4$ ，1004的数码之和为 $1+0+0+4=5$ ，  
1005的数码之和为 $1+0+0+5=6$ ，1006的数码之和为 $1+0+0+6=7$ ，1007的数码之和为 $1+0+0+7=8$ ，  
1008的数码之和为 $1+0+0+8=9$ ，1009的数码之和为 $1+0+0+9=10$ ，1010的数码之和为 $1+0+1+0=2$ ；  
所以自然数1，2，3，……，1010的所有数码之和是

$13500 - 0 + (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+2) = 13557$ 。

（方法二）

因为 $(0+999) + (1+998) + \cdots + (499+500)$ 在运算中未产生进位；

所以上各数数码和就是自然数0，1，2，3，……，999的所有数码和；

所以自然数0，1，2，3，……，999的所有数码之和是 $(9+9+9) \times 500 = 13500$ ；

因为 $(1000+1009) + (1001+1008) + \cdots + (1004+1005)$ 在运算中未产生进位；

所以上各数数码和就是自然数1000，1001，……，1009的所有数码和；

所以自然数1000，1001，……，1009的所有数码之和是 $(2+0+0+9) \times 5 = 55$ ；

又因为0的数码为0，1010的数码之和为 $1+0+1+0=2$ ；

所以自然数1，2，3，……，1010的所有数码之和是 $13500 + 55 - 0 + 2 = 13557$ 。

---

2、在200~300之间，有三个连续的自然数，其中最小的数是3的倍数，中间的数有约数5，最大的数能被7整除，这三个数的和是\_\_\_\_\_。

【分析与解】

$[3, 5, 7] = 3 \times 5 \times 7 = 105$ ；

$105 + 3 = 108$ 是3的倍数；

$105 + 5 = 110$ 有约数5；

$105 + 7 = 112$ 能被7整除；

故三个连续的自然数，满足最小的数是3的倍数，中间的数有约数5，最大的数能被7整除，

其中最小的一组是 $108 \div 2 = 54$ ， $110 \div 2 = 55$ ， $112 \div 2 = 56$ ；

又因为这三个在200~300之间；

所以这三个数是 $54 + 105 \times 2 = 264$ ， $55 + 105 \times 2 = 265$ ， $56 + 105 \times 2 = 266$ ；

这三个数的和是 $264 + 265 + 266 = 795$ 。

3、今年世博会将于5月1日开始，10月31日结束。将这几个数字连接起来构成一串数字：05011031。紧接05011031后面写一串数字，写下的每一个数字都是它前面两个数字乘积的个位数，例如 $3 \times 1 = 3$ ，在1的后面写3； $1 \times 3 = 3$ ，在3的后面写3； $3 \times 3 = 9$ ，在3后面写9； $3 \times 9 = 27$ ，在9的后面写7……这样得到一串数字为050110313397……。世博会一共持续184天，问这串数字从0开始往右数，第184个数字是\_\_\_\_\_。

【分析与解】

因为紧接05011031后面写一串数字，写下的每一个数字都是它前面两个数字乘积的个位数；  
所以从第1个3开始出现连续2个数相同，即可判断出周期性变化规律；

050110 $\boxed{31}$ 3397 $\boxed{31}$ ……；

从第1个3开始出现周期性变化规律，以“313397”循环；  
第1个3之前有050110这6个数字；

$$(184 - 6) \div 6 = 29 \cdots 4;$$

故第184个数字与“313397”中第4个数字相同，是3。

4、四位数1234可通过下面的变换变成1541：

$$1234 \xrightarrow[3 \times 1 + 3 + 1]{12 + 1 + 2} 1541$$

现在有一个四位数，通过以上方法变换成3779，那么原来的这个四位数是\_\_\_\_\_。

【分析与解】

设原来的四位数是 $\overline{abcd}$ ；

则变换后新的四位数前两位是 $\overline{ab} + a + b$ ，后两位是 $\overline{cd} + c + d$ ；

$$\overline{ab} + a + b = (10a + b) + a + b = 11a + 2b = 37; \text{ 解得 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases};$$

$$\overline{cd} + c + d = (10c + d) + c + d = 11c + 2d = 79; \text{ 解得 } \begin{cases} c = 7 \\ d = 1 \end{cases};$$

故 $\overline{abcd} = 3271$ ，即原来的这个四位数是3271。

5、四(1)班共有47人，要从甲、乙、丙三人中投票选举出一人担任班长。已知每个人都投了一票给三人中的一人，并且在计票过程中的某一时刻，甲得到15票，乙得到13票，丙得到8票。如果得票数比其他两人都多的候选人将成为班长，那么甲最少再得\_\_\_\_\_票就能够保证当选。

【分析与解】

现在还剩下 $47 - 15 - 13 - 8 = 11$ 张选票没有统计。

如果甲再得4张，乙再得7张，则乙当选为班长；

如果甲再得5张选票，则无论剩余6张选票投给谁，甲必定当选为班长；

所以甲最少再得5票就能够保证当选。

6、四年级同学春游时租船游湖。如果每条船坐 14 人，有一条船上多 2 个座位没人坐；如果每条船多坐 4 人，可以少租一条船，这时每人可节省 1 元。租一条船需要 \_\_\_\_\_ 元。

【分析与解】

如果每条船坐 14 人，有一条船上多 2 个座位没人坐，即少 2 人；

如果每条船多坐 4 人，即每条船坐  $14 + 4 = 18$  人，可以少租一条船，即少 18 人；

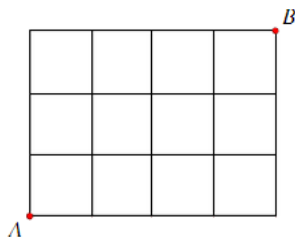
原来准备租  $(18 - 2) \div 4 = 4$  条船；

四年级同学一共有  $14 \times 4 - 2 = 54$  或  $18 \times (4 - 1) = 54$  人；

每人节省 1 元，则四年级同学一共节省  $1 \times 54 = 54$  元；

所有四年级同学节省下来的钱相当于租一条船的费用；故租一条船需要 54 元。

7、灰太狼住在 A 处，它收到消息，喜洋洋现在在 B 处睡觉。图中的横线和竖线均表示道路，横线和竖线的交点表示道路的交叉处。灰太狼只能沿着道路走，若他要在最短的时间里抓到喜洋洋，则他共有 \_\_\_\_\_ 种不同的走法。



【分析与解】

(方法一)

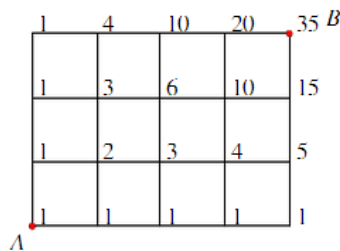
灰太狼要在最短的时间里抓到喜洋洋；

则灰太狼从 A 处到 B 处要走最短路线；

故只能向右或者向上走；

从 A 处走到某个点的最短路线的条数

= 其左边一个点的最短路线的条数 + 其下边一个点的最短路线的条数；



由标数法，灰太狼要在最短的时间里抓到喜洋洋，则他共有 35 种不同的走法。

(方法二)

灰太狼要在最短的时间里抓到喜洋洋；

则灰太狼从 A 处到 B 处要走最短路线；

故只能向右或者向上走；

无论哪一种走法都需要走过 4 步向右和 3 步向上；

那么可以从  $4 + 3 = 7$  个步骤中，任选 4 个向右，而其它均向上；或者任选 3 个向上，而其它均向右；

灰太狼要在最短的时间里抓到喜洋洋，则他共有  $C_7^4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$  或  $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$  种不同的走法。

【说明】题目中“喜洋洋”正确的写法是“喜羊羊”。

8、图书馆的阅览室里若干张3条腿的凳子和4条腿的椅子，且每张凳子和椅子上都坐着一个人，每个人有2条腿。小红数了一下，阅览室里凳子的腿、椅子的腿和人的腿的总数为44，那么有\_\_\_\_\_张凳子，\_\_\_\_\_张椅子，\_\_\_\_\_个人。

【分析与解】

设有 $x$ 张凳子， $y$ 张椅子，则有 $(x+y)$ 个人；

由题意，得 $3x+4y+2(x+y)=44$ ， $5x+6y=44$ ，自然数解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ ；

故有4张凳子，4张椅子， $4+4=8$ 个人。

9、亮亮骑着自行车，以每分钟400米的速度，从46路汽车的始发站出发，沿46路车的线路前进。当他骑出1400米时，一辆46路车从始发站开出。已知这辆车每分钟行600米，每4分钟到达一站并停车1分钟。那么汽车开出\_\_\_\_\_分钟后能追上亮亮。

【分析与解】

汽车开出4分钟后，亮亮和汽车相距 $1400-(600-400)\times 4=600$ 分钟；

之后每5分钟，汽车先停1分钟，再行驶4分钟，汽车追近亮亮 $600\times 4-400\times 5=400$ 米；

$600\div 400=1\cdots 200$ ；

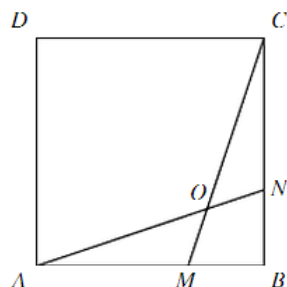
即汽车开出4分钟后，再过5分钟，汽车和亮亮相距200米；

汽车第2次停车1分钟后，汽车和亮亮相距 $200+400\times 1=600$ 米；

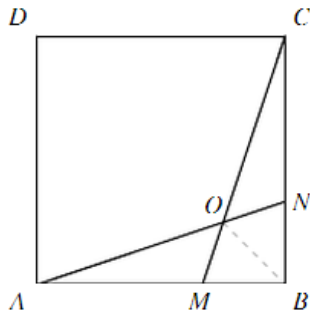
汽车第2次停车后行驶 $600\div (600-400)=3$ 分钟追上亮亮；

故汽车开出 $4+5+1+3=13$ 分钟后能追上亮亮。

10、如图， $ABCD$ 是边长为18厘米的正方形， $M$ 、 $N$ 分别为 $AB$ 边与 $BC$ 边上的点， $AM:MB=CN:NB=2:1$ ， $AN$ 与 $CM$ 相交于点 $O$ 。四边形 $AOCD$ 的面积是\_\_\_\_\_平方厘米。



【分析与解】



连接  $OB$ ；

因为正方形  $ABCD$  中， $AB = CB$ ；又因为  $AM:MB = CN:NB = 2:1$ ；

所以由对称性可得  $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CBM}$ ， $S_{\triangle BOM} = S_{\triangle BON}$ ， $S_{\triangle AOM} = S_{\triangle CON}$ ， $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COB}$ ；

因为  $AM:MB = 2:1$ ；所以  $S_{\triangle AOM}:S_{\triangle BOM} = 2:1$ ；所以  $S_{\triangle AOM}:S_{\triangle BOM}:S_{\triangle BON} = 2:1:1$ ；

因为  $S_{\triangle ABN} = AB \times BN \div 2 = AB \times (BC \div 3) \div 2 = 18 \times (18 \div 3) \div 2 = 54$  平方厘米；

所以  $S_{\triangle BOM} = S_{\triangle ABN} \div 4 = 54 \div 4 = 13.5$  平方厘米， $S_{\triangle AOM} = S_{\triangle ABN} \div 4 \times 2 = 54 \div 4 \times 2 = 27$  平方厘米；

所以  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BOM} = 27 + 13.5 = 40.5$  平方厘米；所以  $S_{\triangle COB} = S_{\triangle AOB} = 40.5$  平方厘米；

因为  $S_{\text{square } ABCD} = a_{\text{square } ABCD}^2 = 18^2 = 324$  平方厘米；

所以  $S_{\text{quadrilateral } A OCD} = S_{\text{square } ABCD} - S_{\triangle COB} - S_{\triangle AOB} = 324 - 40.5 - 40.5 = 243$  平方厘米。

二、动手动脑题：（每题 10 分，共 50 分。）

1、能否用 7 个图 1 所示的卡片拼成一个图 2 所示的图形？如果能，请画出拼法；如果不能，请说明理由。

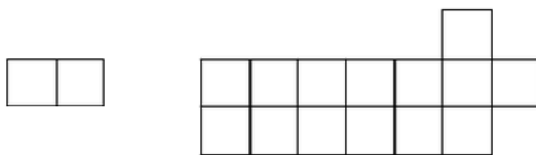


图 1

图 2

【分析与解】

将图 2 中的这 14 个小方格黑、白相间染色；

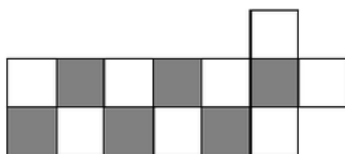


图 3

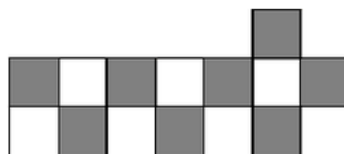


图 4

如图3所示,有6个黑格,8个白格(或如图4所示,有6个白格,8个黑格);

黑格与白格的数量不相等;

而相邻两个方格必然是一黑一白;

如果用7个图1所示的卡片拼成一个图2所示的图形,那么14个格应当是黑、白各7个;

所以不能用7个图1所示的卡片拼成一个图2所示的图形。

2、一个两位数,加上45以后,十位数字正好与个位数字互换位置。原来的这个两位数是多少?请写出所有可能。

【分析与解】

设这个两位数是 $\overline{ab}$ ;

由题意,得 $\overline{ab} + 45 = \overline{ba}$ ,  $(10a + b) + 45 = 10b + a$ ,  $9b - 9a = 45$ ,  $9(b - a) = 45$ ,  $b - a = 5$ ;

小于10的正整数解为 $\begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a=2 \\ b=7 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a=4 \\ b=9 \end{cases}$ ;

所以这个两位数是16或27或38或49。

3、一块长方形铁皮,长130厘米,宽90厘米。现在要把这块铁皮制成一个深为10厘米的无盖长方体铁盒(焊接处与铁皮厚度忽略不计),求这个长方体铁盒的容积最大是多少立方厘米?并请你画出铁皮的分割方法,标上数据。

【分析与解】

设这个长方体铁盒的长为 $a$ 厘米,宽为 $b$ 厘米;

$$a \times b + [(a+b) \times 2] \times 10 = 130 \times 90,$$

$$a \times b + 20a + 20b = 11700,$$

当 $V = a \times b \times 10 = 10ab$ 一定时,底面 $S_{\text{底}} = a \times b$ 也为定值;

$$\text{铁皮所用的面积为 } a \times b + [(a+b) \times 2] \times 10 = a \times b + (a+b) \times 20;$$

面积一定长方形中,正方形的周长最小;

故当 $a=b$ 时,铁皮所用的面积 $a \times b + [(a+b) \times 2] \times 10 = a \times b + (a+b) \times 20$ 最小;

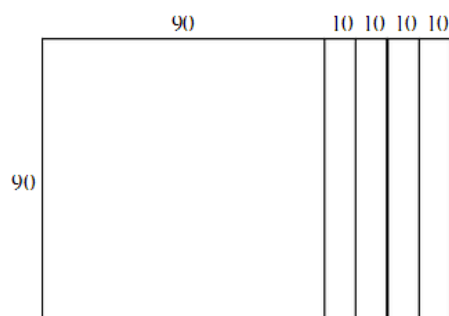
反之,要使容积 $V = a \times b \times 10 = 10ab$ 达到最大时, $a=b$ ;

$$a \times b + 20a + 20b = a \times a + 20a + 20a = a \times (a+40) = 11700;$$

经尝试,当 $a=90$ 时, $a \times (a+40) = 90 \times (90+40) = 11700$ ;

故当 $a=b=90$ 时, $V_{\text{max}} = 10ab = 10 \times 90 \times 90 = 81000$ ;

这个长方体铁盒的容积最大是81000 立方厘米；  
铁皮的分割方法如图所示。



4、 一个小孩在沙滩上把16个贝壳分成8个，3个，5个共三堆。按照下面的规则进行移动：取其中的任意两堆贝壳，记为1号堆和2号堆，且1号堆的贝壳不少于2号堆，然后从1号堆拿取与2号堆相同数量的贝壳，放入2号堆。经若干次这样的移动，使所有的贝壳成为一堆。以下是一种移动方法： $(8, 3, 5) \rightarrow (8, 6, 2) \rightarrow (8, 4, 4) \rightarrow (8, 8, 0) \rightarrow (16, 0, 0)$ ，共移动了4次。现在把16个贝壳分成9个，5个，2个共三堆，那么按照上面的规则，最少移动多少次，就能使所有的贝壳成为一堆？请写出移动过程。

【分析与解】

采用倒推法。

最后一步是 $(16, 0, 0)$ ；

倒数第二步必定是 $(8, 8, 0)$ ；

倒数第三步是 $(12, 4, 0)$ 或 $(8, 4, 4)$ ；

倒数第四步是 $(14, 2, 0)$ 或 $(12, 2, 2)$ 或 $(10, 6, 0)$

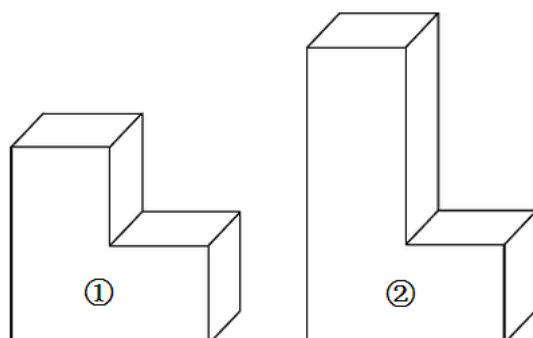
或 $(6, 6, 4)$ 或 $(10, 4, 2)$ 或 $(8, 6, 2)$ ；

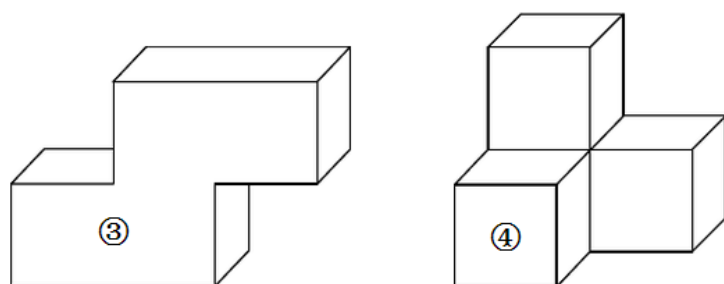
发现 $(9, 5, 2)$ 可以变成 $(10, 4, 2)$ ；

所以至少要移动4次，移动方法如下：

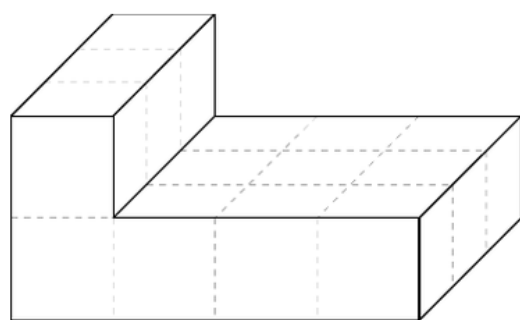
$(9, 5, 2) \rightarrow (10, 4, 2) \rightarrow (8, 4, 4) \rightarrow (8, 8, 0) \rightarrow (16, 0, 0)$

5、 图一中编号①~④的立体图形，分别是由3个或4个棱长为1的小正方体组成的，请你按照提供给你的卡纸上的折叠方法，制作出这4个几何体，并将它们拼成如图二的立体图形。每个几何体必须且只能用一次，可翻转拼搭。请在图二上用粗线条画出你的拼法，并标上每个几何体的编号。





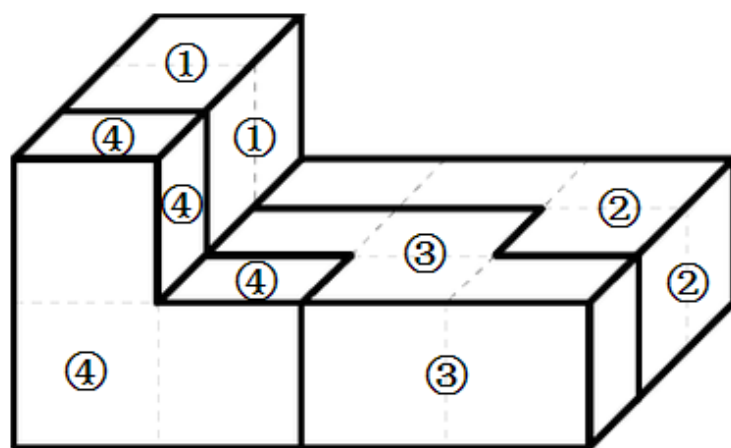
图一



图二

【分析与解】

答案如图三所示；答案不惟一。



图三