

第 14 届“中环杯”中小學生思维能力训练活动 四年级决赛答案

一、填空题：

1. 【答案】 750

【解答】

$$\begin{aligned} & 75 \times 4.7 + 15.9 \times 25 \\ &= 25 \times 3 \times 4.7 + 15.9 \times 25 \\ &= 25 \times 14.1 + 15.9 \times 25 \\ &= 25 \times (14.1 + 15.9) \\ &= 25 \times 30 = 750 \end{aligned}$$

2. 【答案】 43

【解答】从两位数开始尝试即可。

3. 【答案】 11

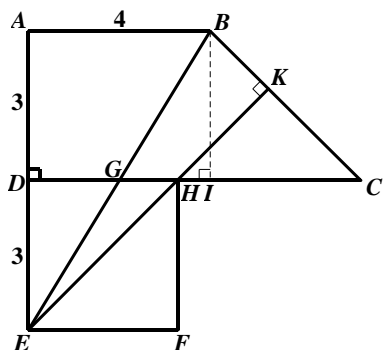
【解答】 $4 + 4 + 2 + 1 = 11$

4. 【答案】 273

【解答】容易发现，10、11、12月里的日期已经包含在1月的表示中了，最后有效的就是1~9月里的日期，一共有 $365 - 31 - 30 - 31 = 273$ （天）。由于每一天都有一个三位数与之对应，所以有273个这样的三位数。

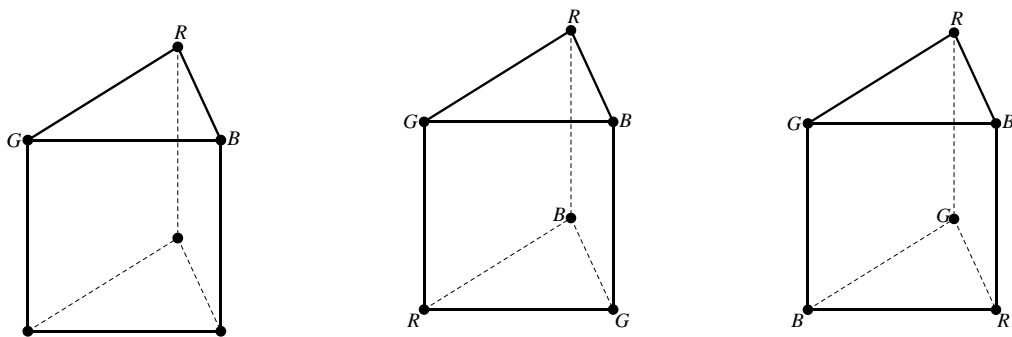
5. 【答案】 4

【解答】作 $BI \perp CD$ 。容易知道， $\angle KHD = 135^\circ$ 。在五边形 $ADHKB$ 中，通过内角和为 540° 很容易求出 $\angle ABK = 135^\circ$ 。在梯形 $ABCD$ 中，利用内角和为 360° 很容易求出 $\angle BCD = 45^\circ$ 。所以 $CI = IB \Rightarrow CD = AB + AD = 7$ 。考虑到 $DH = DE = 3$ ，所以 $CH = 4$ 。由于 $\angle BCD = 45^\circ$ ，所以 $\triangle CHK$ 为等腰直角三角形，所以 $S_{\triangle CHK} = \frac{1}{4} CH^2 = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$ 。



6. 【答案】 12

【解答】首先对上底面三个点进行染色，有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ （种）方法。一旦上底面定了之后，比如下左图中的颜色，那么下底面就只有两种染色方法了，如下中、右图。所以一共有 $6 \times 2 = 12$ （种）染色方法。



7. 【答案】60

【解答】首先，这五个数的平均数为 $\frac{24+27+55+64+x}{5} = 34 + \frac{x}{5}$ ，所以 x 肯定是5的倍数。根据题意，55不可能是中间的数，中间的数只能是 x 或27。接下来分类讨论：

（1）如果中间的数是27，也就意味着 $x < 27$ ，所以 $34 < 34 + \frac{x}{5} < 40$ 。在这个范围内的质数只有37，此时 $x = 15$ ；

（2）如果中间的数是 x ，也就意味着 $27 < x < 55$ 。根据题意， $3|x$ 。结合我们之前的推导，有 $5|x$ ，所以 $15|x$ 。在 $27 < x < 55$ 范围内，15的倍数只有30、45。将30、45代入 $34 + \frac{x}{5}$ ，发现只有当 $x = 45$ 时， $34 + \frac{x}{5} = 43$ 是一个质数。

综上所述，满足条件的 x 为15或45，它们的和为60。

8. 【答案】1984

【解答】从左边的数字谜中可分析出“决”和“成”相差1，“赛”和“功”相差3。右边的数字谜中，显然有 $\overline{\text{中环}} = 19$ 。

（1）若右边算式个位没有向十位进位，则“力”、“棒”分别是0.4，“强”、“杯”是8.3或6.5。当“强”、“杯”是8.3时，剩下的四个数字就是2.5.6.7，能满足左边数字谜“决、成差1，赛、功差3”的要求。当“强”、“杯”是6.5时，剩下的四个数字就是2.3.7.8，无法满足左边数字谜“决、成差1，赛、功差3”的要求。

（2）若右边算式个位向十位进位了，力+棒=14，“力”、“棒”只能分别是8.6；强+杯=10，“强”、“杯”只能分别是3.7。此时剩下的四个数字就是0.2.4.5，无法满足左边数字谜“决、成差1，赛、功差3”的要求。

综上所述，只有“力”、“棒”分别是0.4，“强”、“杯”分别是8.3时，满足我们的要求，此时“ $\overline{\text{中环杯棒}}$ ”最大为1984。

9. 【答案】43

【解答】①我们知道， $6 = 2 \times 3$ 、 $9 = 3 \times 3$ ，所以只要学生的人数 n 满足 $n \equiv 0 \pmod{3}$ ，都可以用6粒装、9粒装这两种盒装巧克力表示。

②如果 $n > 43$ 且 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ ，我们可以用 $40 + 3k (k \geq 2)$ 表示这样的人数，也就是说可用两盒 20 粒装的巧克力与若干盒 6 粒装或 9 粒装盒装巧克力来表示。

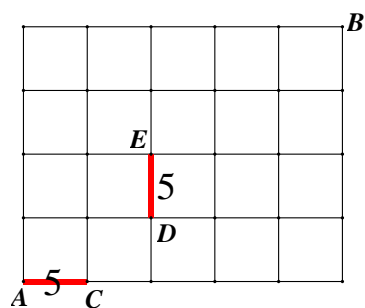
③如果 $n > 43$ 且 $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ ，我们可以用 $20 + 3k (k \geq 8)$ 表示这样的人数。

综上所述，超过 43 个学生，全部可以用这三种巧克力表示人数。而 43 显然无法表示，所以 43 就是我们要求的最大值。

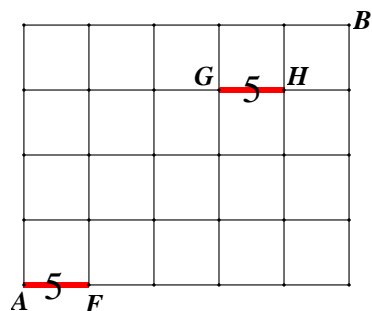
10. 【答案】 28

【解答】 由于最后结果的末尾恰好有两个零，所以必须恰好经过两条粗线。接下来分类讨论：

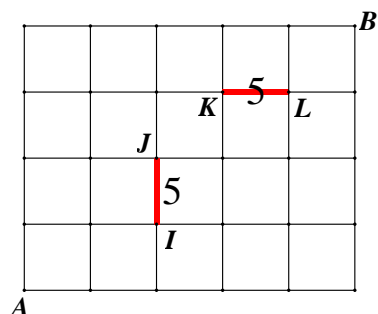
①如下图，经过这两条时，根据乘法原理，我们只要计算 $C \rightarrow D$ 的可能性，再乘以 $E \rightarrow B$ 的可能性，最后答案就是 $C_2^1 \times C_5^3 = 2 \times 10 = 20$ （种）；



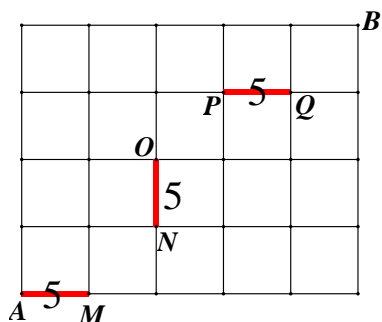
②如下图，经过这两条时，根据乘法原理，我们只要计算 $F \rightarrow G$ 的可能性，再乘以 $H \rightarrow B$ 的可能性，最后答案就是 $C_5^2 \times C_2^1 = 10 \times 2 = 20$ （种）；



③如下图，经过这两条时，根据乘法原理，我们只要计算 $A \rightarrow I$ 的可能性，再乘以 $J \rightarrow K$ 的可能性，再乘以 $L \rightarrow B$ 的可能性，最后答案就是 $C_3^2 \times C_2^1 \times C_2^1 = 3 \times 2 \times 2 = 12$ （种）。



④但是要注意，同时经过三条红线段的方法被计算了三次，要全部减去（否则末尾有三个零了）。如下图，同时经过三条红线的走法为： $M \rightarrow N$ 的可能性，再乘以 $O \rightarrow P$ 的可能性，再乘以 $Q \rightarrow B$ 的可能性，为 $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ （种）。



综上所述，最后的答案就是 $20 + 20 + 12 - 3 \times 8 = 52 - 24 = 28$ （条）路径满足要求。

二、动手动脑题：

11. 【答案】900 米

【解答】设家离银行有 x 米，哥哥走了 $x + 180$ 米，妹妹走了 $x - 180$ 米，从而得到关系式

$$\frac{x + 180}{90} = t = \frac{x - 180}{60} \Rightarrow 60x + 180 \times 60 = 90x - 180 \times 90 \Rightarrow x = 900 \text{ 米}。$$

12. 【答案】8

【解答】容易知道， $198 = 2 \times 9 \times 11$ 。为了使得排成的五位数是 9 的倍数，数字和必须为 9 的倍数。由于 $0 + 1 + 2 + 6 + 6 = 15$ 并不是 9 的倍数，所以肯定需要将一些卡片旋转。由于只有

⑥ 旋转后会发生变化，尝试一下 $\begin{cases} 0 + 1 + 2 + 6 + 9 = 18 \\ 0 + 1 + 2 + 9 + 9 = 21 \end{cases}$ ，发现这样的五张卡片必须为 ①、②、

③、⑥、⑨。

设这个五位数为 \overline{abcde} ，为了使得其为 11 的倍数，则 $11 \mid [(a + c + e) - (b + d)]$ 。对于 ①、②、

③、⑥、⑨来说，这样的组合只有一种： a, c, e 取 1, 2, 6， b, d 取 0, 9。

最后，由于这个五位数是 2 的倍数，所以 e 必须为偶数，只能是 2 或 6。

综上所述，利用乘法原理，这样的五位数有 $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$ （个）（其中第一个 2 表示 b, d 的取法，第二个 2 表示 e 的取法，第三个 2 表示 a 的取法）。

13. 【答案】（1）不能；（2）能，走了 44239 米

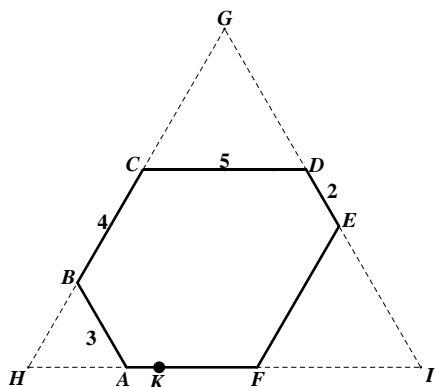
【解答】由于这个机器人每走 6 次就是一个循环，要看它能否走到点 Z，就是看它一个周期内是否能笔直往东方移动（不能与东方产生角度）。如下图，画出一个周期内的情况，注意：第五次行走的距离为 EF ，并没有标注其长度，而 AF 的方向就是东方。我们就是要看看，当走完一周后，要使得其最后的效果为向东方移动，那么第五次行走的长度 EF 应该是多少。

由于这个六边形每个内角都是 120° ，将其补成一个三角形，则 $\triangle GCD$ 、 $\triangle HAB$ 、 $\triangle IEF$ 、 $\triangle GHI$ 都是等边三角形，所以 $GH = GC + CB + BH = 5 + 4 + 3 = 12$ 。而

$GI = GD + DE + EI = 5 + 2 + EF$ ，所以 $EF = 5$ ，也就是说第五次行走的距离必须为 5，才能使得总效果为向东方行走。

(1) 由于第五次行走的距离为 6 米，所以行走完一个周期后，往东偏南的方向走了一段距离，之后每走完一个周期都会这样，所以无法到达 Z 点。

(2) 由于第五次行走的距离为 5 米，所以可能可以到达 Z 点。接下来我们来求一下 AF 的长度。容易知道 $HA + AF + FI = 12 \Rightarrow AF = 12 - 3 - 5 = 4$ ，而题目中第六次行走的距离为 3 米，到达点 K，所以一个周期后，机器人相当于向东方移动了 1 米，所以肯定可以到达点 Z。接下来要算算需要运动几个周期。注意，不是 2014 个周期。当运动完 2010 个周期的时候，此时已经走到了距离 A 点 2010 米的地方。在第 2011 个周期的第五次行走结束时，由于 $AF = 4$ ，所以直接到达点 Z。由于机器人在一个周期里行走的距离为 $3 + 4 + 5 + 2 + 5 + 3 = 22$ （米），所以它一共走了 $22 \times 2010 + (3 + 4 + 5 + 2 + 5) = 44220 + 19 = 44239$ （米）。



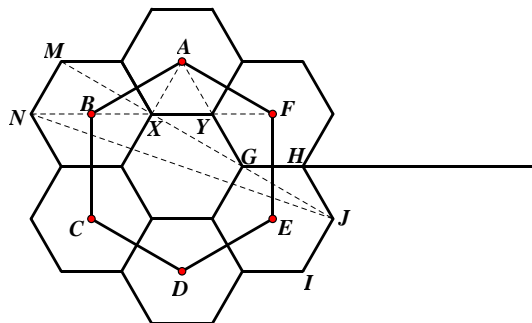
14. 【答案】延长 IJ ，与 GH 的延长线的交点就是点 P 。

【解答】如下图，我们先来计算 $\triangle JMN$ 的面积。利用共边定理，有

$$S_{\triangle JMN} = 3S_{\triangle XMN} = 3 \times \frac{1}{3} S_{\text{小正六边形}} = S_{\text{小正六边形}}。$$

而 $S_{\text{大正六边形}} = 6S_{\triangle ABF} = 18S_{\triangle AXY} = 18 \times \frac{1}{6} S_{\text{小正六边形}} = 3S_{\text{小正六边形}}$ ，所以 $S_{\text{大正六边形}} = 3S_{\triangle JMN}$ 。由于

$S_{\text{大正六边形}} = 60 \Rightarrow S_{\triangle JMN} = 20 = S_{\triangle PMN}$ ，利用等积变换的内容，我们知道 $PJ \parallel MN$ 。由于 $IJ \parallel MN$ ，所以延长 IJ ，与 GH 的延长线的交点就是点 P 。



15. 【答案】(1) 答案不唯一，下图为 4 种正确的分割方法。

