

## 第十二届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 五年级决赛答案

### 一、填空题:

1. 答: 0

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (20112011 - 1) \times (20122012 + 1) - 20112011 \times 20122012 + 10002 \\ &= 20112011 \times 20122012 + 20112011 - 20122012 - 1 - 20112011 \times 20122012 + 10002 \\ &= 20112011 - 20122012 - 1 + 10002 \\ &= 20112011 + 10002 - 20122012 - 1 \\ &= 20122013 - 20122012 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

2. 答: 41

因为  $44^2=1936$ ,  $45^2=2025$ , 所以  $1\sim 2012$  中, 平方数有 44 个。

由于  $1^2=1^3=1$ ,  $8^2=4^3=64$ ,  $27^2=9^3=729$ , 所以在  $1\sim 2012$  这 2012 个自然数中, 是平方数但不是立方数的一共有  $44-3=41$  (个)。

3. 答: 50

设这种商品每个进价是  $x$  元,  $5(10+x)=4(25+x)\Rightarrow 50+5x=100+4x\Rightarrow x=50$ 。

4. 答: 110

$$C_{10}^3 - C_5^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 120 - 10 = 110 \text{ (个)}$$

5. 答案: 5

积的个位数就是两个乘数个位数乘积的个位数。因为每一个被盖住的数都是质数, 所以两个乘数的个位数的积有以下几种可能:

$$2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6, 2 \times 5 = 10, 2 \times 7 = 14;$$

$$3 \times 3 = 9, 3 \times 5 = 15, 3 \times 7 = 21;$$

$$5 \times 5 = 25, 5 \times 7 = 35;$$

$$7 \times 7 = 49。$$

从中可以看到, 积的个位数是质数的只能是 5。

6. 答: 4024 场

设一共有  $2n$  支队伍, 那么  $2n-1$  场后, 胜者组冠军产生 (每一场比赛有且只有一支队伍进入败者组);  $2n-2$  场后, 败者组冠军产生 (每一场比赛有且只有一支队伍被淘汰); 决赛最多比 3 场。  $2n-1+2n-2+3=4n$ , 所以最多要赛  $4n$  场。本题中,  $2n=2002$ , 所以答案就是  $2012 \times 2 = 4024$  (场)。

7. 答案: 80000001

8001, 80001, 800001, ... 被 9 除, 商分别为 889, 8889, 88889, ... 在这些商中, 能够被 3 整除的

有 8889, 8888889, ... 其中不能被 9 整除的最小数是 8889，其次为 8888889。所以能够被 27 整除但不能被 81 整除的第二小数是 80000001。

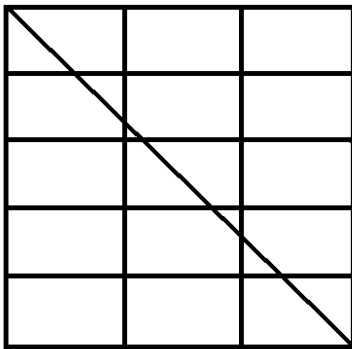
8. 答：9

分成三种情况，得  $(n-1) \times 10 \times 11 + n \times 9 \times 11 + n \times 10 \times 10 = 2671$ ，所以

$$309n - 110 = 2671 \Rightarrow n = 9$$

9. 答：6

我们可以画出下图。大正方形的边长是 15，对角线是小球的轨迹，与边框相交代表与长方形壁碰撞。所以小球与长方形壁共碰撞了 6 次后，回到长方形的顶点处。



10. 答：13567

用配对法计算：0 + 1999，1 + 1998，2 + 1997，……，999 + 1000，每对数的和都是 1999，数字之和是 28，所以 1 ~ 1999 的数字之和为  $28 \times 1000 = 28000$ 。

0 + 999，1 + 998，2 + 997，……，499 + 500，每对数的和都是 999，数字之和是 27，所以 1 ~ 999 的数字之和为  $27 \times 500 = 13500$ 。

又，0 + 99，1 + 98，2 + 97，……，49 + 50，每对数的和都是 99，数字之和是 18，所以 1 ~ 99 的数字之和为  $18 \times 50 = 900$ ；所以 1000 ~ 1101 的数字之和为：900 + 102 (千位上的数字和) + 3 (100 和 101 的数字和) = 1005。

1102 ~ 1999 的数字之和为  $28000 - 13500 - 1005 = 13495$ 。

2000 ~ 2011 这 12 个数的数字之和是  $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 3 + 4 = 65 + 7 = 72$ 。

所以，1102 ~ 2011 所有数的数字之和是  $13495 + 72 = 13567$ 。

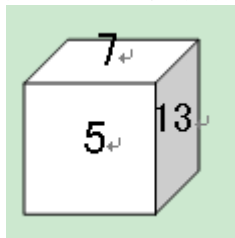
## 二、动手动脑题：

1. 解：5

木块“3”的对面是“13”，“5”的对面是“11”，“7”的对面是“9”。

木块从左向右翻转 1 次，“3”在右面；翻转 2 次，“9”在右面；翻转 3 次，“13”在右面；翻转 4 次，“7”在右面。所以木块从左向右翻转 4 次，又回到初始状态。

$2011 \div 4 = 502 \cdots 3$ , 所以木块从左向右翻转 2011 次, “13”在右面(如下图)。此时左面是“3”, 后面是“11”, 下面是“9”。

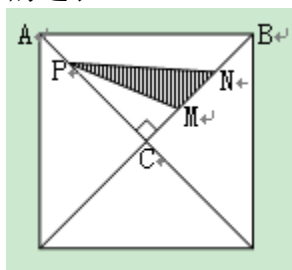


木块从前向后翻转 1 次, “9”在正面; 翻转 2 次, “11”在正面; 翻转 3 次, “7”在正面; 翻转 4 次, “5”在正面。所以木块从前向后翻转 4 次, 又回到初始状态。

$2012 \div 4 = 503 \cdots 0$ , 所以最后木块正面的数字是 5。

2. 答: 9 平方厘米

我们知道, 4 个同样的等腰直角三角形可以拼成一个正方形。如图, 以斜边 AB 为正方形的边长。



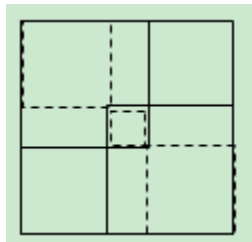
因为正方形的面积是  $AB^2 = 12^2 = 144$  (平方厘米), 所以, 三角形 ABC 的面积  $= 144 \div 4 = 36$  (平方厘米)。

又因为在等腰直角三角形 ABC 中,  $MN = \frac{1}{3} BC$ ,  $PC = (1 - \frac{1}{4}) AC = \frac{3}{4} AC$ , 所以三角形 PMN 的

面积是:  $\frac{1}{2} \times MN \times PC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times BC \times AC = \frac{1}{8} \times BC \times AC = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \times 36 = 9$  (平方厘米)。

3. 答: 80 立方厘米

如图, 上面四个棱长为 12 厘米的小正方体在大正方体的上底面内交出一个边长为  $12 + 12 - 20 = 4$  (厘米) 的正方形, 由此可知它们的公共部分是一个长方体, 底面为  $4 \times 4 = 16$  (平方厘米) 的正方形, 高 12 厘米。



类似的，下面四个棱长为 13 厘米的小正方体在大正方体的下底面内交出一个边长为  $13+13-20=6$  (厘米) 的正方形，由此可知它们的公共部分是一个长方体，底面为  $6\times 6=36$  (平方厘米) 的正方形，高为 13 厘米。

这两个长方体底面的中心分别与大正方体上、下底面的中心重合，所以上面的  $4\times 4$  的正方形垂直投影到下底面内将完全位于  $6\times 6$  正方形中。从而两公共部分的交，即八个正方体的公共部分是一个长方体，底面为  $4\times 4=16$  (平方厘米) 的正方形，高为  $13+12-20=5$  (厘米)，其体积为  $4\times 4\times 5=80$  (立方厘米)。

4. 答：4 次

本题可转换为行程问题。我们不妨假设 P、Q 在同一条直线上运动，P、Q 两点相遇（即重合），对应原图形中 PQ 与 AB 平行。

第一次：相向运动，用时  $12\div(1+4)=2.4$  (秒)。

此时 P 向 D 行进了  $1\times 2.4=2.4$  (厘米)，Q 到 B 的距离为  $12-4\times 2.4=2.4$  (厘米)。

所以第一次平行是在出发 2.4 秒之后。

第二次：当 Q 点到达 B 时，用时  $2.4\div 4=0.6$  (秒)，P 点向 D 行进了  $1\times 0.6=0.6$  (厘米)，此时 P、Q 两点相距  $2.4+0.6=3$  (厘米)。Q 点返回追上 P 点用时  $3\div(4-1)=1$  (秒)。

总用时  $2.4+0.6+1=4$  (秒)。

此时 P 总共前行了  $1\times 4=4$  (厘米)，Q 到 C 点的距离为  $12-4=8$  (厘米)。

所以第二次平行是在出发 4 秒之后。

第三次：Q 到达 C 点后返回与 Q 作相向运动，相遇用时  $(12-4)\times 2\div(1+4)=3.2$  (秒)。

总用时  $4+3.2=7.2$  (秒)。

此时 P 总共前行了  $1\times 7.2=7.2$  (厘米)，Q 到 B 的距离为 7.2 厘米。

所以第三次平行是在出发 7.2 秒之后。

第四次：当 Q 点到达 B 时，用时  $7.2\div 4=1.8$  (秒)，P 点向 D 点行进了  $1\times 1.8=1.8$  (厘米)，此时 P、Q 两点相距  $7.2+1.8=9$  (厘米)。Q 点返回追上 P 点用时  $9\div(4-1)=3$  (秒)。

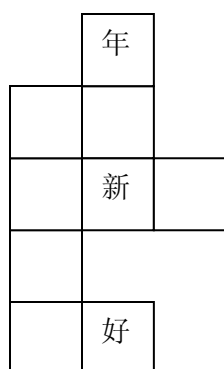
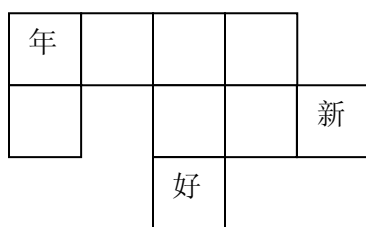
总用时  $7.2+1.8+3=12$  (秒)

此时 P 总共前行了  $1\times 12=12$  (厘米)，正好到达 D 点。

所以第四次平行是在出发 12 秒钟之后。共平行了 4 次。

5. 解：本题答案不唯一，以下为一种解法。

(1) 如图



(2) 18  
 $(2+5) \times 2 + 4 = 18$

