

第 14 届“中环杯”中小學生思维能力训练活动 五年级决赛答案

一、填空题：

1. 【答案】1203

【解答】 $11.99 \times 73 + 1.09 \times 297 = 11.99 \times 73 + 1.09 \times 11 \times 27 = 11.99 \times 73 + 11.99 \times 27 = 1199$ ，而
 $\frac{1}{2} \times (3^2 - 1^2) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ ，所以和为 $1199 + 4 = 1203$ 。

2. 【答案】11

【解答】
$$\begin{cases} 420 \equiv 4 \pmod{13} \\ 814 \equiv 8 \pmod{13} \\ 1616 \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$$
，所以 $420 \times 814 \times 1616 \equiv 4 \times 8 \times 4 \equiv 16 \times 8 \equiv 3 \times 8 \equiv 11 \pmod{13}$ 。

3. 【答案】45

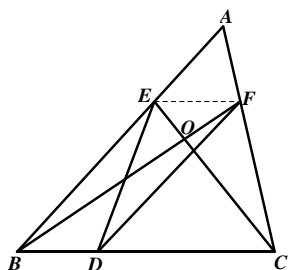
【解答】设甲班原有 $5k$ 个人，则乙班原有 $7k$ 个人。根据题意，列出方程
 $\frac{5k+3}{7k-3} = \frac{4}{5} \Rightarrow k=9$ 。所以甲班原有学生 $5k=45$ 人。

4. 【答案】50

【解答】显然，
$$\begin{cases} 9 \mid \overline{966428A91B40} \Rightarrow A+B \equiv 5 \pmod{9} \\ 11 \mid \overline{966428A91B40} \Rightarrow A-B \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$
。考虑到 $A+B$ 、 $A-B$ 同奇偶，所以可能的方程组有 $\begin{cases} A+B=5 \\ A-B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A+B=14 \\ B-A=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=10 \end{cases}$ 。由于 $B \leq 9$ ，所以只有一种可能，所以 $\overline{AB} = 50$ 。

5. 【答案】400

【解答】联结 EF 。由于 $\begin{cases} AB=3AE \\ AC=3AF \end{cases} \Rightarrow EF \parallel BC$ ，所以 $S_1 = S_{\triangle FBD} = S_{\triangle EBD}$ ，所以
 $S_1 + S_2 = S_{\triangle EBD} + S_{\triangle EDC} = S_{\triangle EBC} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = 40$ ，为一个定值。
 显然，当 $S_1 = S_2 = 20$ 时， $S_1 \cdot S_2$ 最大为 400。



6. 【答案】 67111

【解答】如下左图，我们知道 $\begin{cases} \overline{abc} \times e = \overline{X0XX} \\ \overline{abc} \times d = \overline{X1X} \\ \overline{abc} \times 2 = \overline{XXX4} \end{cases}$ ，由于 $\begin{cases} \overline{abc} \times d = \overline{X1X} \\ \overline{abc} \times 2 = \overline{XXX4} \end{cases} \Rightarrow d=1$ ，然后利用

$\overline{abc} \times d = \overline{X1X} \Rightarrow \overline{abc} \times 1 = \overline{X1X} \Rightarrow b=1$ 。至此，我们得到下右图。而 $\overline{abc} \times 2 = \overline{XXX4} \Rightarrow c=7$ 或 2，而且我们还可以推出 $\begin{cases} e \geq 2 \\ a \geq 5 \end{cases}$ 。接下来分类讨论：

			a	b	c	
				d	e	
X			2			
				0		
				1		
					4	

(1) 若 $c=7$ ，如下图，由于 $\overline{a17} \times e = \overline{X0XX}$ ，显然十位数向百位数的进位最多是1，所以 $a \times e$ 的个位数必须是9或0。(1.1) 为了取得乘积的最大值，从大到小进行尝试。如果 $a=9$ ，为了保证 $a \times e$ 的个位数必须是9或0，则 $e=1$ 或 0，显然不可能；如果 $a=8$ ，为了保证 $a \times e$ 的个位数必须是9或0，则 $e=5$ ，从而得到 $817 \times 215 = 175655$ ，满足所有要求。

(1.2) 为了取得最小值，从小到大尝试。如果 $a=5$ ，为了保证 $a \times e$ 的个位数必须是9或0，则 $e=2$ （当然 e 还可以等于4,6,8，这里是为了求最小值），从而得到 $517 \times 212 = 109604$ 。至此，当 $c=7$ 时，最大值为175655，最小值为109604。

			a	1	7	
				2	1	e
X			2			
				0		
				1		
					4	

(2) 若 $c=2$ ，如下图，由于 $\overline{a17} \times e = \overline{X0XX}$ ，显然十位数向百位数的进位最多是1，所以 $a \times e$ 的个位数必须是9或0。(2.1) 为了取得乘积的最大值，从大到小进行尝试。如果 $a=9$ ，为了保证 $a \times e$ 的个位数必须是9或0，则 $e=1$ 或 0，显然不可能；如果 $a=8$ ，为了保证 $a \times e$ 的个位数必须是9或0，则 $e=5$ ，从而得到 $812 \times 215 = 174580$ ，满足所有要求。

(2.2) 为了取得最小值，从小到大尝试。如果 $a=5$ ，为了保证 $a \times e$ 的个位数必须是9或0，则 $e=2$ （当然 e 还可以等于4,6,8，这里是为了求最小值），从而得到 $512 \times 212 = 108544$ 。至此，当 $c=7$ 时，最大值为174580，最小值为108544。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccc}
 & & a & 1 & 2 \\
 & & 2 & 1 & e \\
 \hline
 & \square & 0 & \square & \square \\
 & \square & 1 & \square & \\
 \square & \square & \square & 4 & \\
 \hline
 \square & \square & \square & \square & \square & \square
 \end{array}
 \end{array}$$

综上所述，本题的最大值为 $817 \times 215 = 175655$ ，最小值为 $512 \times 212 = 108544$ ，差为 $175655 - 108544 = 67111$ 。

7. 【答案】9

【解答】容易知道，这15位选手一共需要比赛 $C_{15}^2 = 15 \times 7$ （场），产生 $15 \times 7 \times 2 = 210$

（分），所以理论上最多有 $\left\lfloor \frac{210}{20} \right\rfloor = 10$ （人）能够拿到奖品。接下来，我们要证明，不可

能有10人同时拿到20分或以上。

假设 A_1, A_2, \dots, A_{10} 同时拿到20分或以上，也就意味着 $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{15}$ 一共只能拿到10分或以下。考虑到 $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{15}$ 之间有 $C_5^2 = 10$ （场）比赛，产生了20分的总分，所以不可能只得到10分或以下。

至此，理论上最多只能有9个人，接下来举例： A_1, A_2, \dots, A_9 互相之间全部打平，然后 A_1, A_2, \dots, A_9 每个人都战胜了 $A_{10}, A_{11}, \dots, A_{15}$ 中的所有人，这样 A_1, A_2, \dots, A_9 每个人都可以得 $6 \times 2 + 8 = 20$ （分）。

8. 【答案】2013, 4023

【解答】由于小明以匀速进行跑动，且沙漏以相同的速率在漏沙子，所以 a 、 \overline{bc} 、 \overline{de} 、 \overline{fg} 构成一个等差数列，设其公差为 k ，则 $\overline{fg} = a + 3k$ 。由于 \overline{fg} 是3的倍数，所以 $3|a + 3k \Rightarrow 3|a$ 。而题目又告诉我们 a 是2的倍数，所以 a 是6的倍数。由于 $0 \leq a \leq 9$ ，所以 $a = 6$ 。

其次，由于 $\overline{de} = a + 2k = 6 + 2k = 2(3 + k)$ 是5的倍数，所以推出 $k = 2, 7, 12, 17, \dots$ 。由于

$\overline{fg} = a + 3k = 6 + 3k < 100 \Rightarrow k \leq 31$ ，所以所有可取的 $k = 2, 7, 12, 17, 22, 27$ 。接下来检验一下

$\overline{bc} = a + k = 6 + k$ 是否为质数，容易发现 6, 13, 20, 27 或 6, 23, 40, 57 均符合我们的要求，所以 $\overline{debc} = 2013$ 或 4023。

9. 【答案】120

【解答】我们直接分类讨论：

（1）如果从“难”开始一笔画，则能产生 $6 \times 2 = 12$ （个）字串（其中数字6表示第一步有6个选择：“中”、“环”、“杯”、“真”、“的”、“好”均可以；数字2表示顺时针一笔画还是逆时针一笔画）。

（2）由于对称性，我们来研究从“中”开始一笔画，能产生多少个字串。

（2.1）“中” \rightarrow “难”，产生2个字串；

（2.2）“中” \rightarrow “好” \rightarrow “难”，产生2个字串；

(2.3) “中” → “环” → “难”，产生2个字串（这种情况与(2.2)类似，为了简单起见，后面的情况中，直接每个乘以2，代表以“中”、“难”构成的直线为对称轴的取法）；

(2.4) “中” → “好” → “的” → “难”与“中” → “环” → “杯” → “难”，产生 $2 \times 2 = 4$ （个）字串（后面的将“与”的部分省略，同学们应该有能力自己补全）；

(2.5) “中” → “好” → “的” → “真” → “难”，产生 $2 \times 2 = 4$ （个）字串；

(2.6) “中” → “好” → “的” → “真” → “杯” → “难”，产生 $1 \times 2 = 2$ （个）字串；

(2.7) “中” → “好” → “的” → “真” → “杯” → “环” → “难”，产生 $1 \times 2 = 2$ （个）字串。

如上所述，如果从“中”开始一笔画，能产生 $2+2+2+4+4+2+2=18$ （个）字串，所以只要不从“难”出发，一共有 $18 \times 6 = 108$ （个）字串。

综上两种情况，一共有 $12+108=120$ （个）字串。

10. 【答案】10

【解答】如下图，容易发现A、H、C与B、H、D都是三点共线，我们只要求出 $\frac{CJ}{CH}$ 、

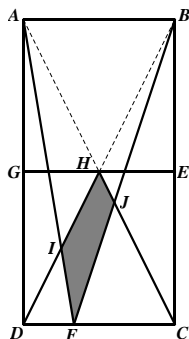
$\frac{DI}{DH}$ ，然后利用鸟头定理即可求出 $S_{\triangle CFJ}$ 与 $S_{\triangle DFI}$ ，然后利用 $S_{\triangle CDH} - S_{\triangle CFJ} - S_{\triangle DFI}$ 就可以求出阴影部分的面积了。

由于 $\begin{cases} \frac{CJ}{JA} = \frac{CF}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow CJ = \frac{2}{5}CA = \frac{2}{5} \cdot (2CH) \Rightarrow \frac{CJ}{CH} = \frac{4}{5} \\ \frac{DI}{IB} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow DI = \frac{1}{4}DB = \frac{1}{4} \cdot (2DH) \Rightarrow \frac{DI}{DH} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，所以利用鸟头定理，有

$\begin{cases} \frac{S_{\triangle CFJ}}{S_{\triangle CDH}} = \frac{CJ}{CH} \cdot \frac{CF}{CD} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \Rightarrow S_{\triangle CFJ} = \frac{8}{15}S_{\triangle CDH} \\ \frac{S_{\triangle DFI}}{S_{\triangle CDH}} = \frac{DI}{DH} \cdot \frac{DF}{DC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{\triangle DFI} = \frac{1}{6}S_{\triangle CDH} \end{cases}$ ，所以

$S_{\text{阴}} = S_{\triangle CDH} - S_{\triangle CFJ} - S_{\triangle DFI} = S_{\triangle CDH} - \frac{8}{15}S_{\triangle CDH} - \frac{1}{6}S_{\triangle CDH} = \frac{3}{10}S_{\triangle CDH} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2}S_{\text{正方形}} = \frac{3}{20}m$ ，所以 $n = \frac{3}{20}m$ 。

由于 m 、 n 都是正整数，所以 $20|m$ ，所以 $m = 2^2 \times 5 \times a$ 。由于 m 有9个约数，所以 m 只能等于 $2^2 \times 5^2 = 100$ ，所以边长为10厘米。



二、动手动脑题:

11. 【答案】62.5千米

【解答】设A、B间的距离是 x 千米,则我们可以列出方程 $\frac{x}{10} = \frac{x}{12.5} + 1.5 - \frac{1}{4} \Rightarrow x = 62.5$ 千米。

12. 【答案】17

【解答】假设一个数的质因数分解如下所示: $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$, 将其中质因子2去掉(当然可能本来就没有这个质因子), 剩下的数代入约数的个数公式, 我们可以计算出其含有奇约数的个数, 比如: $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$, 它的奇约数个数有 $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$ (个), 是一个“中环数”。在这个过程中, 我们发现, 只要让一个奇质因子的指数出现偶数, 那么其奇约数个数就肯定不能表示为 2^m 了, 比如 $9 = 3^2$, 其奇约数的个数为 $2+1=3$ (个)。至此, 我们发现一个规律, 只要一个数是9的倍数, 并且不是27的倍数, 那么这样的数肯定不是“中环数”。

至此, 理论上连续的中环数最多是: $27n-8, 27n-7, \dots, 27n, \dots, 27n+8$, 一共17个。我们可以举个例子: 127, 128, \dots , 143都是“中环数”。

13. 【答案】680

【解答】显然, 如果输出的结果是偶数, 则输入的也必须是偶数($4k+1$ 不可能为偶数)。根据题意, 如果逆推的话, 最后的结果应该至少会产生四条分支:

(1) 如果输出的结果为 $4k$ 或 $4k+2$, 显然输入必须为偶数, 则只可能 $32k \rightarrow 16k \rightarrow 8k \rightarrow 4k$ 或 $32k+16 \rightarrow 16k+8 \rightarrow 8k+4 \rightarrow 4k+2$, 只有一条分支。所以要求的结果不可能是 $4k$ 或 $4k+2$;

(2) 如果输出的结果为 $4k+3$, 显然不可能由“ $k \rightarrow 4k+1$ ”得到, 则只能由“除以2”这个结果得到, 所以最后一步运算肯定为 $8k+6 \rightarrow 4k+3$ 。由于 $8k+6$ 已经是偶数了, 所以之前的输入都必须为偶数, 所以得到 $32k+24 \rightarrow 16k+12 \rightarrow 8k+6 \rightarrow 4k+3$, 只有一条分支。所以要求的结果不可能是 $4k+3$;

(3) 根据前面两个结论, 最后的结果应该是 $4k+1$, 简单分析一下得到下面的可能:

$\left. \begin{matrix} k \\ 8k+2 \end{matrix} \right\} \rightarrow 4k+1$, 其中 $8k+2$ 已经是偶数了, 所以下面只可能产生一条分支。利用前面的结

论, 要使得上面能产生三条分支, 则 $k=4m+1$, 从而得 $\left. \begin{matrix} m \\ 2k \\ 8k+2 \end{matrix} \right\} \rightarrow k=4m+1 \rightarrow 4k+1$ 。显然 $2k$

这条分支就结束了。为了还能造就两条分支, 则 $m=4t+1$, 所以得

$\left. \begin{matrix} t \\ 2m \\ 2k \\ 8k+2 \end{matrix} \right\} \rightarrow m=4t+1 \rightarrow k=4m+1 \rightarrow 4k+1$ 。这样就能产生四条分支了。显然, t 的最小值为1,

此时得到所有的分支为 $\left. \begin{array}{l} 1 \} \rightarrow 5 \\ 10 \} \rightarrow 21 \\ 84 \rightarrow 42 \\ 680 \rightarrow 340 \rightarrow 170 \end{array} \right\} \rightarrow 85$ 。所以，输出的最小值为 85，此时羊爸爸的输入值就是 680。

14. 【答案】 66

【解答】 如下图，设线段 DE 与 AH 相交于点 F ，线段 GI 与 AH 相交于点 J 。容易知道 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AH} = \frac{AH-1}{AH} \Rightarrow DE = (AH-1) \cdot \frac{BC}{AH}$ ， $\frac{GI}{BC} = \frac{AG}{AB} = \frac{AJ}{AH} = \frac{AH-2}{AH} \Rightarrow GI = (AH-2) \cdot \frac{BC}{AH}$ 。

依次类推，后面每条水平线段的长度为 $(AH-3) \cdot \frac{BC}{AH}$ 、……、 $\frac{BC}{AH}$ 。

根据题意，每层的中间都没有产生空隙，所以这些水平线段的长度都是正整数。我们观察

$DE = (AH-1) \cdot \frac{BC}{AH}$ ，根据数论中的结论： $(AH-1), AH$ 互质，为了使得 DE 为正整数，则 BC

必须是 AH 的倍数。设 $BC = kAH$ （ k 为整数），并且设 $AH = x$ ，所以

$$DE = (AH-1) \cdot \frac{BC}{AH} = k(x-1)。$$

同理，剩下的水平线段的长度分别为 $k(x-2)$ 、 $k(x-3)$ 、……、 k ，最后所有小正方形的

个数为 $k[(x-1)+(x-2)+\cdots+1] = k \frac{x(x-1)}{2}$ 。

根据题意， $k \frac{x(x-1)}{2} = 330 \Rightarrow kx(x-1) = 660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$ ，接下来就是解这个不定方程了。

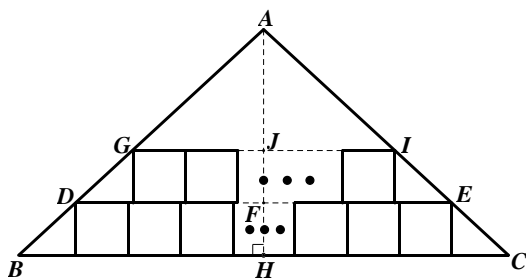
由于题目说了 $\frac{BC}{AH} \leq 8$ ，所以 $k \leq 8$ ，所以 x 、 $x-1$ 中必然有一个数是 11 的倍数。如果 x 、

$x-1$ 中有一个数是 22，那么另一个数只能是 21 或 23。而 660 中不含质因数 7、23，不可能；如果 x 、 $x-1$ 中有一个数大于等于 33，那么 $x(x-1) \geq 32 \times 33 > 660$ ，也不可能；由此推出 x 、 $x-1$ 中必然有一个数为 11。尝试一下发现 $660 = 5 \times 12 \times 11 = 6 \times 11 \times 10$ ，所以有两种可能：

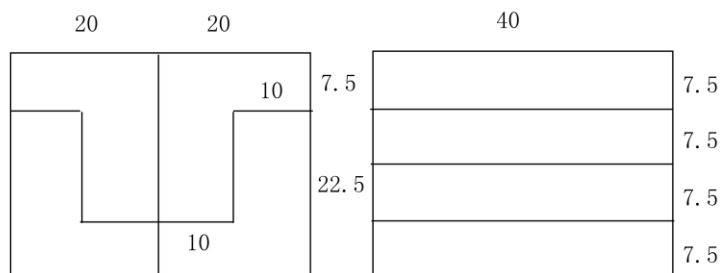
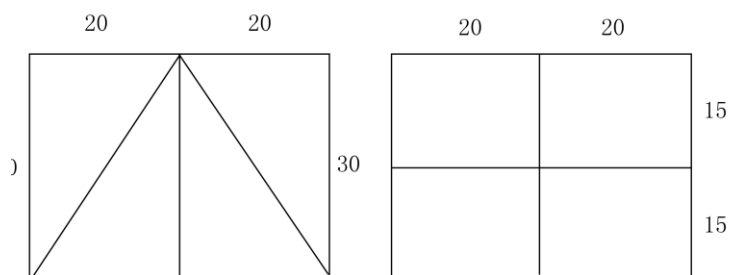
(1) 当 $k=5$ 、 $x=12$ 时，此时意味着 $\frac{BC}{AH} = k=5$ 、 $AH=12$ ，所以 $BC=60$ ；

(2) 当 $k=6$ 、 $x=11$ 时，此时意味着 $\frac{BC}{AH} = k=6$ 、 $AH=11$ ，所以 $BC=66$ 。

所以 BC 的最大长度为 66。



15. 【答案】 (1) 答案不唯一，下图为 4 种正确的分割方法。



(2) 如下图

