

第十三届“中环杯”中小学生思维能力训练活动 五年级决赛答案

一、填空题：

1. 答：25502400

$$\begin{aligned}
 & (1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1) + (2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2) + \cdots + (99^3 + 3 \times 99^2 + 3 \times 99) \\
 &= (1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1) + (2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1) + \cdots + (99^3 + 3 \times 99^2 + 3 \times 99 + 1) - 99 \\
 &= (1+1)^3 + (2+1)^3 + \cdots + (99+1)^3 - 99 \\
 &= 1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3 - 100 \\
 &= \left(\frac{100 \times 101}{2} \right)^2 - 100 = 25502400
 \end{aligned}$$

2. 答：1131

设所求数为 $5a+1$ ，则有 $5a+1 \in 4 \pmod{7}$ ，得 $a \in 2 \pmod{7}$ 。

设 $a=7b+2$ ，则所求数为 $35b+11$ 。则有 $35b+11 \in 9 \pmod{11}$ ，得 $b \in 10 \pmod{11}$ 。

设 $b=11c+10$ ，则所求数为 $385c+261$ 。故符合要求的最小四位数为 $385 \times 2 + 261 = 1131$ 。

3. 答：3

简单的分类讨论：

(1) 若 A 是说谎者，则可以推出 B 是诚实者， C 是说谎者， D 是诚实者， E 是说谎者。

(2) 若 A 是诚实者，则可以推出 B 是说谎者， C 是诚实者， D 是说谎者， E 是诚实者。

综上所述，最多有3位说谎者。

4. 答：6

由于小于16的素数只有2,3,5,7,11,13，所以 $16=13+3=11+5=11+3+2$ 。接下来分类讨论：

(1) 如果是(13,3)组合，可以有 $3 \times 13 = 39$ 和 $3^2 \times 13 = 117$ 。

(2) 如果是(11,5)组合，可以有 $5 \times 11 = 55$ 。

(3) 如果是(11,3,2)组合，可以有 $2 \times 3 \times 11 = 66$ 、 $2^2 \times 3 \times 11 = 132$ 和 $2 \times 3^2 \times 11 = 198$ 。

综上所述，一共6个这样的数。

5. 答：3或8

设共答对 n 题，答错 k 题，未答 x 题。依题意有： $5n + 2x = 71$ 和 $39 + 3n - k = 71$ 。后式经整理得到 $n = \frac{32+k}{3}$ 。因为 n 为整数，所以 $3 \mid (32+k)$ 。 k 必是 1、4、7、……，

相应求出 $n = 11, 12, 13, \dots$ 。又由前式知， n 最大是 $71 \div 5 \approx 14$ 。通过检验，得 $n = 13$ ， $x = 3$ ； $n = 11$ ， $x = 8$ 。所以未答的题目是 8 题或是 3 题。

6. 答：8

容易分析出 E, N 是 0 或 5。考虑到 $Y + N + N$ 不能产生进位，所以 $N = 0, E = 5$ 。其次考虑到最高位 $F \neq S$ ，所以发生了进位，从而 $O = 8$ （后面进两位）或者 $O = 9$ （后面进一位或两位）。由于 $N = 0$ ，所以 $I \neq 0$ ，所以 $I = 1, O = 9$ ，并且后面进两位。暂时得到下面的图 1，接下来继续分析。利用进位关系我们得到方程组

$$\begin{cases} R + 2T + 1 = 20 + X \Rightarrow 2T + R - X = 19 \\ F + 1 = S \end{cases}$$

。由于这里一共出现了 10 个字母，代表了 10 个

数字，已经确定的是 0, 1, 5, 9，接下来要枚举了。由于 (F, S) 可能为

$(2, 3), (3, 4), (6, 7), (7, 8)$ ，简单的尝试就知道最后的结果为图 2。

$$\begin{array}{rcccc} & \mathbf{F} & \mathbf{9} & \mathbf{R} & \mathbf{T} & \mathbf{Y} \\ & & & \mathbf{T} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ + & & & \mathbf{T} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{S} & \mathbf{1} & \mathbf{X} & \mathbf{T} & \mathbf{Y} & \end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{rcccc} & \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{6} \\ & & & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ + & & & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \end{array}$$

图 2

7. 答：30

联结 SP, RQ 。因点 P, Q, R, S 分别为边 AB, BC, CD, AD 的中点，故四边形 $PQRS$ 也是平行四边形且其面积为平行四边形 $ABCD$ 的 $\frac{1}{2}$ 。再因 T 为边 SR 的中点，故 $\triangle PQT$

面积占平行四边形 $PQRS$ 面积的 $\frac{1}{2}$ ，即占平行四边形 $ABCD$ 面积 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，故 $\triangle PQT$ 面积为 30cm^2 。

8. 答：84

显然，六个面可以组成三对，无论选取哪个顶点，最后这三对中任意一对的两个面的数字之和都加一。由于最后正方体的所有面上的数字都相同，也就是说三对的数字和相等了，所以开始的时候也要求数字之和相等。由于六个正整数的和为 60，所以每对之和都是 20。由于 $20 = x + (20 - x), x = 1, 2, \dots, 9$ ，共 9 种拆法（注意题目中要求“六个不同的正整数”，所以不能拆成 $10 + 10$ ），如果每种拆法都能满足题目的要求，那么最后答案就是 $C_9^3 = 84$ 种。

接下来说明每种拆法都能满足要求：对于这三对面来说，每对里任取一个面，这样就拿出三个面，这三个面肯定可以产生一个公共顶点。所以我们可以先忽略最大的那个整数所对应的面，然后按照刚才的描述（每对里任取一个面），从五个面中抽取三个面进行加 1 操作，直到有一个面变成最大的那个整数，接下来忽略这两个最大整数的面，继续这样操作。直到有三个面都达到最大整数，那么剩下的三个面肯定相等，继续操作使之达到最大整数即可

9. 答：335

容易知道 $3a_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n+1}$ ，所以

$$3a_n - a_n = (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n+1}) - (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n) = 3^{n+1} - 1, \text{ 从而推出 } a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

由于 $(2, 7) = 1$ 且 $7 \mid \frac{3^{n+1} - 1}{2} \Leftrightarrow 7 \mid (3^{n+1} - 1) \Leftrightarrow 3^{n+1} \equiv 1 \pmod{7}$ ，从而推出 $n+1 \equiv 0 \pmod{6}$ 。

考虑到 $n \leq 2013$ ，所以 $n = 5, 11, 17, \dots, 2009$ 。一共有 $(2009 - 5) \div 6 + 1 = 335$ 个这样的数。

10. 答：198

从角上挖去一个小立方体后，去掉了原来表面上的 3 个小正方形，同时又有 3 个小正方形露出，表面积不变。当从棱的中间挖去小立方体时，去掉原来的 2 个小正方形，同时又出现 4 个新的小正方形，表面积增加 $4 - 2 = 2$ (平方厘米)。类似地，从面的中间挖去小立方体将使表面积增加 $5 - 1 = 4$ (平方厘米)。原来立方体的表面积是 $5 \times 5 \times 6 = 150$ (平方厘米)，又正方体有 12 条棱，6 个面，故增加的表面积是 $12 \times 2 + 6 \times 4 = 48$ (平方厘米)，从而本题的答案为 $150 + 48 = 198$ (平方厘米)。

二、动手动脑题：

1. 答：(13225, 24336)

设这两个五位数为 (n^2, m^2) ，则

$m^2 - n^2 = 11111 \Rightarrow (m+n)(m-n) = 11111$ 。由于 $11111 = 41 \times 271$ ，所以只有两种可能：

$$\begin{cases} m+n=11111 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=5551 \\ n=5550 \end{cases} \text{ 或者 } \begin{cases} m+n=271 \\ m-n=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=156 \\ n=115 \end{cases}.$$

容易知道 5551^2 至少是七

位数，肯定不满足我们的要求。所以尝试一下 $\begin{cases} m=156 \\ n=115 \end{cases}$ ，发现这两个数为

(13225, 24336)，满足我们的要求。

2. 答：486

设对一个 $2 \times k$ 的表格进行染色，有 N_k 种染色方法。假设 $2 \times k$ 表格的最后 一 列的颜色从上到下依次 R、G，则对于 $2 \times (k+1)$ 的表格，所增加的一列可以有 3 种染色方法，如下图。从而得到递推式： $N_{k+1} = 3N_k$ 。利用乘法原理我们得 $N_1 = 3 \times 2$ ，所以 $N_5 = 2 \times 3^5 = 486$

R	G	R	G	R	B
G	R	G	B	G	R

3. 答：72

要使得 A, B 之间的距离达到最大，则甲正好在 A, B 的其中一点上，乙在另一点上。

设甲走了 m 次 A, B 之间的距离，乙走了 n 次 A, B 之间的距离，则要求 $m - n$ 是一个奇数。所以我们可以设 $m - n = 2l - 1 (l = 1, 2, \dots)$ （其中 l 表示第 l 次达到最大）。设两人

都走了 x 小时，则我们可以列出等式 $\begin{cases} 2kx = 36n \\ kx = 36n \end{cases}$ ，两个式子相减得

$kx = 36(m - n) = 36(2l - 1) \Rightarrow x = \frac{36(2l - 1)}{k}$ 。所以我们知道第 2012 次距离达到最大时

候的 $p = \frac{36 \times (2 \times 2012 - 1)}{k}$ ，第 2013 次距离达到最大时候的 $q = \frac{36 \times (2 \times 2013 - 1)}{k}$ ，从

而推出 $q - p = \frac{72}{k}$ 。题目告诉我们 $q - p$ 为正整数，所以 $\frac{72}{k}$ 为正整数。而 k 也是正整数，所以 k 的最大值为 72

4. 答： $\frac{640}{549}$

首先证明点 H 在图 1 中的 GC 这条线段上。如图 3，设 AE 与 GC 相交于点 H_1 ，则利

用相似模型我们知道 $\frac{CH_1}{AB} = \frac{CE}{BE} = \frac{4}{9} \Rightarrow CH_1 = \frac{4}{9}AB = \frac{20}{9}cm$ 。如图 4，设 BF 与 GC 相

交于点 H_2 ，则利用相似模型我们知道 $\frac{CH_2}{EF} = \frac{BC}{BE} = \frac{5}{9} \Rightarrow CH_2 = \frac{5}{9}EF = \frac{20}{9}cm$ ，从而

知道 AE 、 BF 与 GC 交于同一点，这个点就是点 H ，所以点 H 在线段 GC 上。

如图 5，我们推出 $GH = GC - CH = 4 - \frac{20}{9} = \frac{16}{9} \text{ cm}$ 。过点 I 作 $KJ \perp AB$ ，则利用相似

模型我们有 $\frac{KI}{IJ} = \frac{GI}{IB} = \frac{GH}{AB} = \frac{\frac{16}{9}}{5} = \frac{16}{45}$ ，而 $KI + IJ = KJ = AB = 5$ ，从而推出

$$KI = \frac{80}{61} \text{ cm}，\text{ 所以 } S_{\triangle GHI} = \frac{1}{2} GH \times KI = \frac{1}{2} \times \frac{16}{9} \times \frac{80}{61} = \frac{640}{549} \text{ cm}^2$$

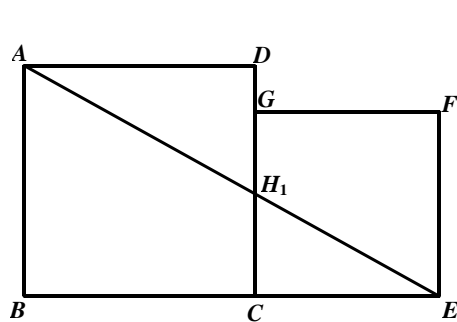


图 3

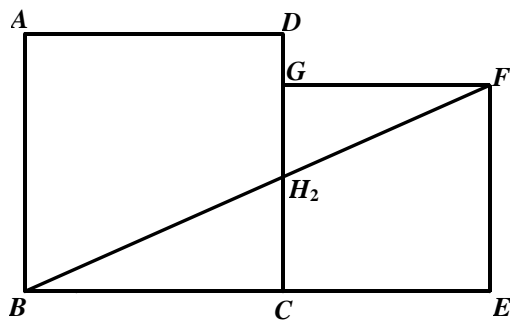


图 4

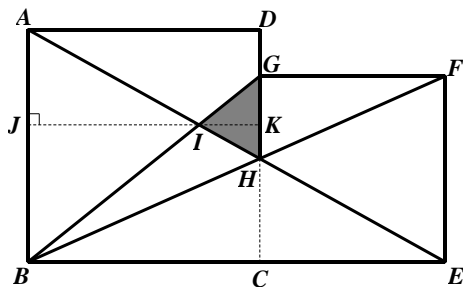
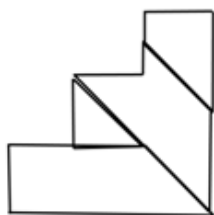
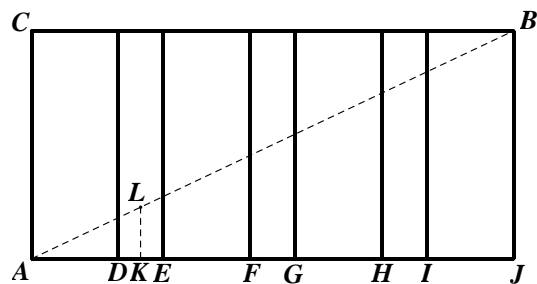


图 5

5. 答：(1) 如图



(2) $v_{\text{捕鼠器}} = 8 \text{ cm/s}$



如图，将立体图形放置到平面中来，容易知道图中的虚线 AB 就是老鼠要走的最短路径。如果智能捕鼠器开始的时候在 DE 上的 K 点，则 KL 就是其要走的路径。由于老鼠与智能捕鼠器同时启动，所以两者走的时间相同，路程比就是速度比，所以

$$\frac{v_{\text{老鼠}}}{v_{\text{捕鼠器}}} = \frac{AL}{LK}。由相似三角形可知 \frac{AL}{LK} = \frac{AB}{BJ}。显然，不管这个捕鼠器位于 DE 、 $FG$$$

还是 HI 上，都满足这个相似模型，所以速度比都是 $\frac{AB}{BJ}$ ，也就是说智能捕鼠器的速度与它放置的位置没有关系。而 $AJ = 4h + 3b = 15$ ， $BJ = AC = a = 8$ ，所以利用勾股定理我们有 $AB^2 = AJ^2 + BJ^2 \Rightarrow AB = 17$ 。所以 $\frac{AL}{LK} = \frac{AB}{BJ} = \frac{17}{8}$ 。从而我们有

$$\frac{v_{\text{老鼠}}}{v_{\text{捕鼠器}}} = \frac{AL}{LK} = \frac{17}{8}，所以 v_{\text{捕鼠器}} = 8cm/s。$$