

第十届“中环杯”中小学生思维能力训练活动

五年级 决赛答案

一、填空题：

1、计算： $11 \times 91 + 125 \times 999 + 250 = (126126)$ 。

【考点】速算与巧算拆分、提取公因数。

【解析】

$$\begin{aligned} & 11 \times 91 + 125 \times 999 + 250 \\ &= 11 \times 7 \times 13 + 125 \times (999 + 2) \\ &= 1001 + 125 \times 1001 \\ &= 1001 \times 126 \\ &= 126126 \end{aligned}$$

2、个位数、十位数都是质数的所有两位质数的数码和是(33)。

【考点】数论之质数与合数。

【解析】一位质数有 2、3、5、7，个位数、十位数都是质数的两位质数个位只能是 3 或 7，所以满足条件的数有 23、53、73 和 37，它们的数码和是 33。

3、有一个四位数，将它的数码顺序倒排后得到一个新的四位数，加上原来的四位数后再加上 1，得到计算结果，甲的答案是 8988，乙的答案是 9998，丙的答案是 9988，丁的答案是 9888。如果四人中有一个人的计算是正确的，那么这个人(甲)。

【考点】数论之数字谜。

【解析】设这个四位数是 \overline{abcd} ，那么对于 $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ ，甲的答案是 8987，乙的答案是 9997，丙的答案是 9987，丁的答案是 9887。那么先来看乙的答案：个位 $a+d$ 的个位是 7，再由千位也是 $a+d$ 可以判断出 $a+d=7$ ，接下来考虑十位可以得到 $b+c=18$ ，那么千位不可能达到 9。同样的，丙和丁的答案也是错的。甲的答案是对的： $3994 + 4993 + 1 = 8988$ 。

4、在不大于 1000 的自然数中，不能被 3、5、7 中任何一个整除的数共有(457)个。

【考点】容斥原理。

【解析】在不大于 1000 的自然数中，能被 3 或 5 或 7 整除的数的个数为 $[1000 \div 3] +$

$$[1000 \div 5] + [1000 \div 7] - [1000 \div 15] - [1000 \div 21] - [1000 \div 35] + [1000 \div 105] = 543。$$

那么 $1000 - 543 = 457$ 即所求。

5、要将一堆渣土运过桥，现在有两辆车可以使用。如果单用甲车来运送的话，需要 15 小时才能运送完。如果单用乙来运送的话，需要 20 小时才能运完。现在规定要在 12 小时内完成全部的运送工作。如果两辆车同时运送，对桥面的压力比较大，所以希望两辆车同时运货的时间尽可能少。那么甲、乙同时运货的时间最少是(4)小时。

【考点】工程问题。

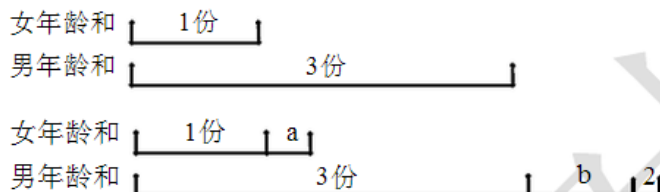
【解析】要求甲、乙同时运货的时间尽可能少，那么他们单独运的数量就要尽可能多，甲的速度比乙快，所以就要求剩下的都是甲单独运的，即甲运了 12 个小时，那么乙运了

$$\left(1 - \frac{1}{15} \times 12\right) \div \frac{1}{20} = 4 \text{ 小时。}$$

6、某俱乐部共有 42 名会员，所有男会员的年龄和恰好是女会员年龄和的 3 倍。而到了明年，男会员的年龄和将比女会员的年龄和的 3 倍少 2 岁。那么这个俱乐部有 (31) 名男会员。

【考点】和差倍问题。

【解析】和差倍问题，画线段图帮助分析。



由题意， a 表示女会员的年龄和的增量，即女会员的数量； b 表示男会员的年龄和的增量，即男会员的数量；满足 b 是 a 的 3 倍少 2， a 和 b 的和是 42，所以可以得到

$$a = (42 + 2) \div (1 + 3) = 11, \quad b = 42 - 11 = 31, \text{ 即男会员有 } 31 \text{ 人。}$$

7、32 枚棋子分成 24 堆，其中每堆得棋子数位 1、2 或 3。如果只有一枚棋子的堆数是其余堆数的 3 倍，那么恰有 2 枚棋子的有 (4) 堆。

【考点】鸡兔同笼问题。

【解析】只有一枚棋子的有 $24 \div (1 + 3) \times 3 = 18$ 堆，有 2 枚或 3 枚的共有 $24 - 18 = 6$ 堆，共有棋子 $32 - 18 = 14$ 枚。假设每堆都是 3 枚的：那么有 $6 \times 3 = 18$ 枚棋子，实际上只有 14 枚，所以 2 枚棋子的有 $(18 - 14) \div (3 - 2) = 4$ 堆。

8、将一个正方体木块涂成红色，再每面等距离切若干刀，得到若干个同样大小的小正方体。如果在这些小正方体中，一面涂有红色的共有 294 个，那么两面涂有红色和三面涂有红色的总共有 (92) 个。

【考点】立方体染色。

【解析】在立方体染色问题中，三面涂有红色的是立方体的 8 个顶点，两面涂有红色的是立方体的 12 条棱上除了顶点之外的点，一面涂有红色的是立方体的 6 个面上除了棱上之外的点。

$$294 \div 6 = 49 = 7 \times 7, \text{ 所以正方体的棱长是 } 7 + 2 = 9, \text{ 那么两面涂有红色的有 } 7 \times 12 = 84 \text{ 个, 两面涂有红色和三面涂有红色的共有 } 8 + 84 = 92 \text{ 个。}$$

9、甲、乙两物体沿着周长为 40 米的圆从同一个点出发，同时作同向运动，每隔 20 秒相遇一次；若同时作反向运动，则每隔 5 秒相遇一次。已知甲的速度比乙快，那么，甲物体的运动速度是每秒 (5) 米，乙物体的运动速度是每秒 (3) 米。

【考点】环形跑道上的相遇追及。

【解析】环形跑道上同时作同向运动，追及路程是跑道的周长，有 $v_{\text{甲}} - v_{\text{乙}} = 40 \div 20 = 2 \text{ m/s}$

环形跑道上同时作反向运动，相遇路程是跑道的周长，有 $v_{\text{甲}} + v_{\text{乙}} = 40 \div 5 = 8 \text{ m/s}$

所以 $v_{\text{甲}} = (2 + 8) \div 2 = 5 \text{ m/s}$ ， $v_{\text{乙}} = 5 - 2 = 3 \text{ m/s}$ 。

10、小明去电影院看电影。他在影片刚放映时看了一下手表，影片结束时又看了一下手表。他发现，两次看手表的时刻，时针和分针刚好交换了一次。已知这部电影的时间在 1 小时到

2 小时之间，那么影片片长 $(\frac{1440}{13})$ 分钟。

【考点】钟面上的行程问题。

【解析】分针的速度是每分钟 6° ，时针的速度是每分钟 0.5° 。

时针和分针刚好交换了一次，而且电影的时间在 1 小时到 2 小时之间，那么不难得到分针所

走的度数与时针所走的度数和是 720° ，那么影片片长为 $720 \div (6 + 0.5) = \frac{1440}{13}$ 分钟。

注：在钟面上的行程问题中，到底用 **路程差 = 时间 × 速度差** 来做，还是用

路程和 = 时间 × 速度和 来做，要根据不同的题目而定，不能一味死记硬背。

二、动手动脑题：

1、把 40 分成若干个自然数的和，且使这些自然数的乘积最大，有几种分法？怎么分？

【考点】最值问题，整数拆分。

【解析】如果分出的数中有大于或等于 5 的数 k ：

那么把 k 再分成 2 和 $k - 2$ ，不难发现 $2(k - 2) - k = k - 4 > 0$

也就是说，把大于或等于 5 的数再这样拆分开，乘积会变大或不变。所以，要使拆分开后的乘积最大，拆分开后的数必须小于 5，拆分出 1 肯定不行，而 4 拆开与否乘积是不变的，所以只能是 2、3 或者 4。

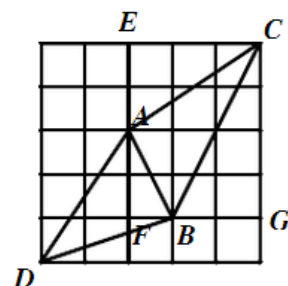
如果拆分的 2 的个数大于或等于 3：

那么把 3 个 2 重新分成 2 个 3，不难发现 $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$

也就是说，把 3 个 2 重新分成 2 个 3，乘积会变大，所以 2 的个数不能超过 2 个。

最后， $40 = 2 \times 2 + 3 \times 12 = 4 \times 1 + 3 \times 12$ ，所以有两种分法：2 个 2 和 12 个 3，或者 1 个 4 和 12 个 3。

2、如图， 5×5 的方格中，每个小方格的边长为 1， A 、 B 两点在小方格的顶点上。现在要在小方格的顶点上确定一点 C ，连接 AB 、 AC 、 BC 后，使得三角形 ABC 的面积为最大，请在图中标出 C 点，求出最大面积为多少？



【考点】格点型面积的计算。

【解析】要求三角形 ABC 的面积尽可能大，因为 AB 长度固定，那么就是要求 AB 边上的高尽可能大，显然当另外一个点在 C 或 D 时这个高是最大的。

$$\text{对于 } C: S_{\triangle ABC} = S_{EFGC} - S_{\triangle AEC} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle GBC} = 3 \times 4 - 3 \times 2 \div 2 - 2 \times 1 \div 2 - 2 \times 4 \div 2 = 4$$

$$\text{对于 } D: \text{同理有 } S_{\triangle ABD} = 3 \times 3 - 3 \times 2 \div 2 - 3 \times 1 \div 2 - 2 \times 1 \div 2 = 3.5$$

所以所求 C 点如图所示，且这个最大面积是 4。

3、一个长方体容器，底面是一个边长为 60 厘米的正方形。容器里直立着一个长方体铁块，它的高是 1 米，底面是一个边长为 15 厘米的正方形。这时，容器里的水深 1.1 米。现在把铁块轻轻地向上提起 25 厘米，那么露出水面的铁块上被浸湿的部分长是多少厘米？

【考点】立体图形的体积计算。

【解析】如图，两个图中阴影部分的水的体积是相同的，所以只用考虑其他部分水的体积相等，所以有

$$60 \times 60 \times (110 - 100) = 15 \times 15 \times 25 +$$

$$(60 \times 60 - 15 \times 15) \times h, \text{ 得 } h = 9 \text{ 厘米,}$$

那么露出水面的铁块的部分长是

$$25 - 9 = 16 \text{ 厘米。}$$

注：铁块浸入水中这类立体几何的题目，只要水没有溢出，那么解题的关键就是水的体积不变。



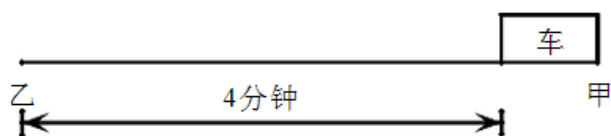
4、甲、乙两人沿铁路线相向而行，速度相同。一列火车从甲身边开过用了 6 秒钟，之后又花了 4 分钟车头遇到乙，然后又从乙身边开过，用了 5 秒钟。那么，再过几分钟甲、乙两人相遇？

【考点】火车问题。

【解析】首先不难求出车速、人速和车长之间的关系：

$$\begin{cases} 6(v_{\text{车}} - v_{\text{人}}) = \text{车长} \\ 5(v_{\text{车}} + v_{\text{人}}) = \text{车长} \end{cases}, \text{ 可以解得 } \begin{cases} v_{\text{车}} = 11v_{\text{人}} \\ \text{车长} = 60v_{\text{人}} \end{cases}$$

接下来的关键就要求甲、乙两人的距离了，其实只要能画线段图分析清楚，这点其实不难解决。

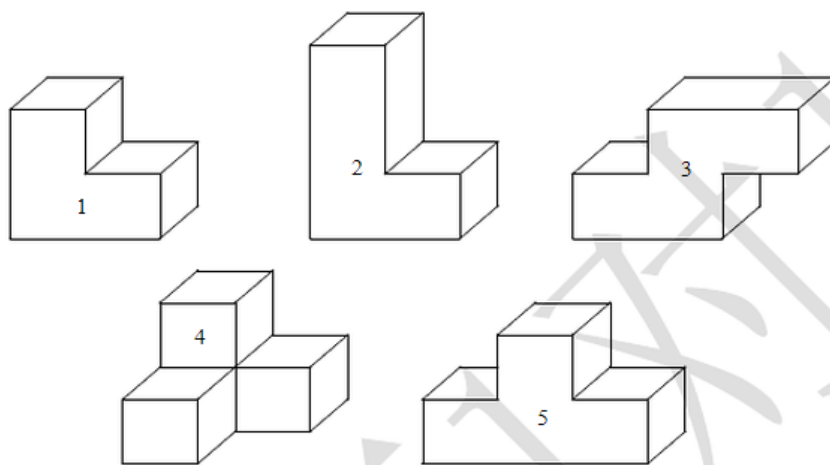


火车从甲身边开过后，甲、乙相距 $4 \times 60 \times (v_{\text{车}} + v_{\text{人}}) + \text{车长} = 2940v_{\text{人}}$

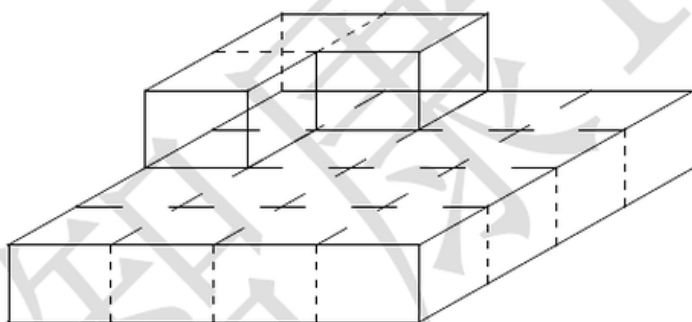
从这个时候开始算起，两人需要 $2940v_{\text{人}} \div (v_{\text{人}} + v_{\text{人}}) = 1470$ 秒相遇，那么

$1470 - 4 \times 60 - 5 = 1225$ 秒也就是 20 分钟 25 秒即所求时间。

5. 用图一中编号为①到⑤的立体图形拼成如图二的立体图形，每个几何体必须且只能用一次，可翻转拼搭。请在图二上用粗线条画出你的拼法并标上每个几何体的编号。



图一



图二

【考点】立体图形的拼合。

【解析】

