

第十二届华罗庚金杯少年数学邀请赛

初赛试卷（小学高年级组 C 卷）

（时间：2015 年 3 月 14 日 8:00—9:00）

一、选择题（每小题 10 分，满分 60 分）

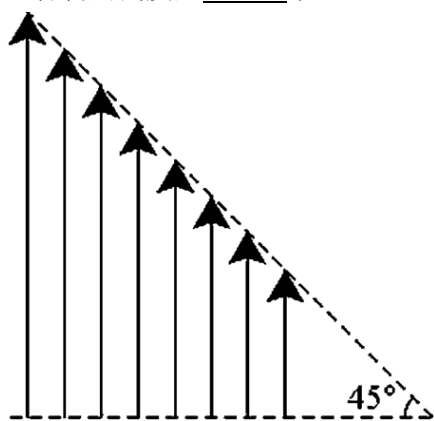
1、计算： $(\frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \frac{13}{42} - \frac{15}{56} + \frac{17}{72}) \times 120 - \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} =$ _____.

A 42 B 43 C $15\frac{1}{3}$ D $16\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】原式 = $\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) \right] \times 120 - \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$
 $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) \times 120 - \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$
 $= \frac{13}{36} \times 120 - \frac{4}{3}$
 $= \frac{130}{3} - \frac{4}{3}$
 $= 42$

2、如图，有一排间距相同但高度不等的小树，树根成一条直线，树顶也成一条直线，这两条直线成 45 度角，最高的小树高 2.8 米，最低的小树高 1.4 米，那么从左向右数第 4 棵树的高度是_____米。



A 2.6 B 2.4 C 2.2 D 2.0

【答案】C

【解析】一共有 8 棵树，树的高度成等差数列，最左侧为 2.8 米，最右侧为 1.4 米，则公差为 $(2.8 - 1.4) \div (8 - 1) = 0.2$ （米），则从左往右数第 4 棵树的高度为 $2.8 - 0.2 \times (4 - 1) = 2.2$ （米），选 C。

3、春季开学后，有不少同学都将部分压岁钱捐给山区的贫困学生；事后，甲、乙、丙、丁 4 位同学有如下的对话：

甲：“丙、丁之中至少有 1 人捐了款”

乙：“丁、甲之中至多有 1 人捐了款”

丙：“你们 3 人中至少有 2 人捐了款”

丁：“你们 3 人中至多有 2 人捐了款”

已知这 4 位同学说的都是真话且其中恰有 2 位同学捐了款，那么这 2 位同学是_____。

A 甲、乙 B 丙、丁 C 甲、丙 D 乙、丁

【答案】D

【解析】由丙的话可知：丙没有捐款；再由甲的话可知：丁捐了款；再由乙的话可知：丁、甲之中至多有 1 人捐款。由此推知，甲没有捐款，乙捐了款，捐款的两人为乙和丁，选 D。

4、六位同学考试的平均成绩是 92.5 分，他们的成绩是互不相同的整数，最高的 99 分，最低的 76 分，那么按分数从高到低居第三位的同学的分数至少是_____。

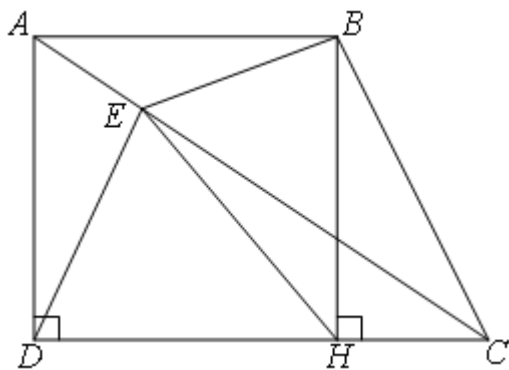
A 94 B 95 C 96 D 97

【答案】B

【解析】六位同学的平均成绩为 92.5 分，因此这六人的总分为 $92.5 \times 6 = 555$ （分）。又最高分为 99，最低分为 76，因此剩下四人的分数和为 380 分。要使第三名的同学分数尽可能小，那么得使另外三人的分数尽可能大。而第二名最高为 98 分，而第四名第五名分数小于第三名，所以第三名至少为： $(380 - 98) \div 3 + 1 = 95$ （分），选 B。

5.如图，BH 是直角梯形 ABCD 的高，E 是梯形对角线 AC 上一点：如果 $\triangle DEH$ 、 $\triangle BEH$ 、 $\triangle BCH$ 的面积依次为 56、50、40，那么 $\triangle CEH$ 的面积是_____。

A 32 B 34 C 35 D 36



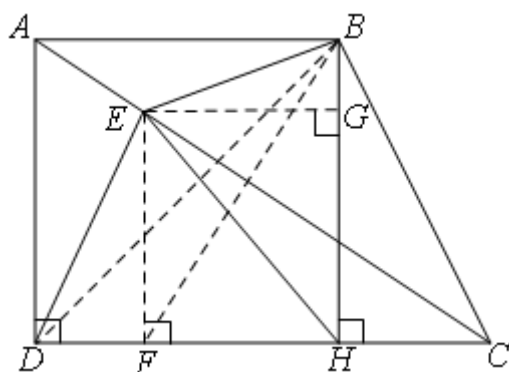
【答案】B

【解析】作 $EF \perp CD$ ， $EG \perp BH$

可知 $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle ADF} = S_{\triangle ADE}$ ， $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$ ，因此有：

$$S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BFC}，而 S_{\triangle BFC} = S_{\triangle BFH} + S_{\triangle BCH} = S_{\triangle BEH} + S_{\triangle BCH} = 90；$$

因此 $S_{\triangle CHE} = S_{\triangle EDC} - S_{\triangle HDE} = 90 - 56 = 34$ ，选 B。



6. 一个边长为 1 的小正方形组成的 $n \times n$ 的方格网，用白色或黑色对每个小正方形涂色，要求满足在任意矩形的 4 个角上的小正方形不全同色，那么正方形 n 的最大值是_____.

A 3 B 4 C 5 D 6

【答案】B

【解析】假设白色块为 0，黑色块为 1，那么：可以构造出 $n=4$ 的情况，如下图；

以下证明 n 不能等于 5，若 $n=5$ ，那么因为白色和黑色是相同情况的，所以第一行中不妨假设白色块比黑色块多，那么黑色块的数量为 0 个、1 个或 2 个，同时每一列都是相同的，所以经过调换行，可以得到第一行的前三个数为 0 0 0.

而第一行为 0 0 0 时，其他行最多出现 1 个 0，那么第二、三、四行的前三个数只能为 0 1 1、1 1 0 以及 1 0 1，同时这三种情况只能出现一次，所以第五行的前三个数无论怎么排列，均会与前四行出现能组成四个角颜色相同的矩形，因此矛盾.

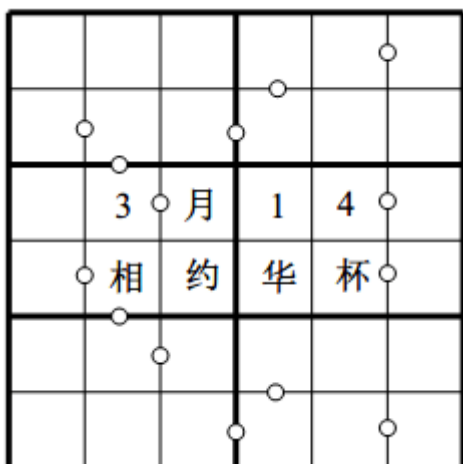
所以 n 最大为 4.

```

0 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
0 1 1 1
    
```

二、填空题（每小题 10 分，满分 40 分）

7、在每个格子中填入 1~6 中的一个，使得每行、每列及每个 2×3 长方形内（粗线段围成）数字不重复；如果小圆圈两边格子中所填的数的和是合数，其他相邻两格所填的数的和是质数，那么四位数“相约华杯”=_____.



【答案】4123

【解析】如下图，第三行信息最多，所以从第三行开始分析。

A	3	月	1	4	B
C	相	约	华	杯	D

因为第三行存在 1、3、4，所以 A 为 2、5、6 之一，而 3 与 A 的和是质数，所以 A 为 2。
在 A 所在的长方形中，还剩下 1、4、5、6 没有使用。而 3 与“相”的和是质数，所以“相”为 4。“相”与“约”的和为质数，“约”为 1。“约”与“月”的和为质数，“月”为 6，剩下的 C 即为 5。

第三行只剩下数字 5，所以 B 为 5。

在 B 所在的长方形中，还剩下 2、3、6 没有使用。而 4 与“杯”的和为质数，所以“杯”为 3。“杯”与“华”的和为质数，所以“杯”为 2，剩下的 D 就是 6。

这两行填完如下图：

2	3	6	1	4	5
5	4	1	2	3	6

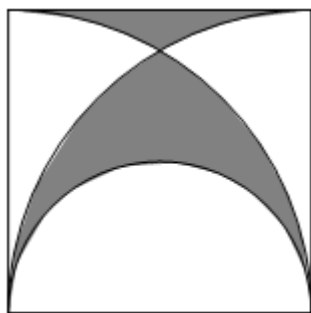
所以“相约华杯”为 4123

8 整数 n 一共有 10 个约数，这些约数从小到大排列，第 8 个是 $\frac{n}{3}$ ，那么整数 n 的最大值是_____。

【答案】162

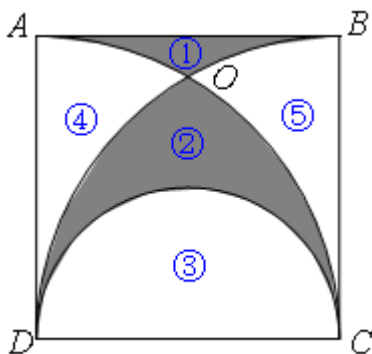
【解析】因为 n 有 10 个约数，所以 n 的因数分解形式为 $n = a^1 b^4$. 由于第 8 个是 $\frac{n}{3}$ ，所以第 3 个约数为 3，那么第 1 个约数是 1，第 2 个约数是 2. 即 n 有因数 2 和 3，要使 n 尽可能大，则 $a=2$ ， $b=3$ ，所以 $n = 2^1 \times 3^4 = 162$.

9、在边长为 300 厘米的正方形中，如图放置了两个直角扇形和一个半圆，那么两块阴影部分的面积差是_____平方厘米，两块阴影部分的周长差是_____厘米. ($\pi = 3.14$)



【答案】15975,485

【解析】(1)



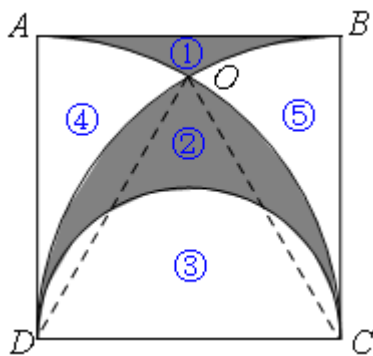
$$S_{\text{正}ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5, \quad S_{\text{扇形}DAC} = S_2 + S_3 + S_4, \quad S_{\text{扇形}CBD} = S_2 + S_3 + S_5,$$

$$\text{所以 } S_{\text{扇形}DAC} + S_{\text{扇形}CBD} - S_{\text{正}ABCD} = S_2 + S_3 - S_1.$$

$$S_{\text{扇形}DAC} = S_{\text{扇形}CBD} = \frac{1}{4} \pi \times 300^2 = 70650, \quad S_{\text{正}ABCD} = 300^2 = 90000, \quad S_3 = \frac{1}{2} \pi \times 150^2 = 35325,$$

$$\text{所以, 阴影部分的面积差} = S_2 - S_3 = S_{\text{扇形}DAC} + S_{\text{扇形}CBD} - S_{\text{正}ABCD} - S_3 = 70650 \times 2 - 90000 - 35325 = 15975$$

(2)



连接 CO 、 DO ，则 $CO=DO=CD$ ，所以 $\triangle OCD$ 是等边三角形， $\angle ODC = \angle OCD = 60^\circ$ ，

图形 2 的周长 $= \frac{1}{3}\pi \times 300 \times 2 + \pi \times 150 = 1099$ ，图形 1 的周长 $= \frac{1}{6}\pi \times 300 \times 2 + 300 = 614$ ，所以：

阴影部分的周长差 $= 1099 - 614 = 485$ 。

10. A 地、B 地、C 地、D 地依次分布在同一条公路上，甲、乙、丙三人分别从 A 地、B 地、C 地同时出发，匀速向 D 地前进。当甲在 C 地追上乙时，甲的速度减少 40%；当甲追上丙时，甲的速度再次减少 40%，甲追上丙后 9 分钟，乙也追上了丙，这时乙的速度减少 25%；乙追上丙后再行 50 米，3 人同时到 D 地。已知乙出发时的速度是每分钟 60 米，那么甲出发时的速度是每分钟 _____ 米，A、D 两地间的路程是 _____ 米。

【答案】125，1880

【解析】由于最后同时到达，所以甲追上丙后二者速度相等，乙追上丙后二者速度相等。

乙出发时的速度为 60 米/分钟，遇到丙后速度变为： $60 \times (1 - 25\%) = 45$ （米/分钟），所以丙的速度为 45 米/分钟，可以推知甲在追上丙后的速度变为 45 米/分钟，在追上乙后追上丙之前速度为 $45 \div (1 - 40\%) = 75$ （米/分钟），甲出发时的速度为 $75 \div (1 - 40\%) = 125$ （米/分钟）。

甲在 C 地追上乙，设从此时起追上丙花了 t 分钟，则在乙追上丙时也追上了甲，此时甲走的路程为 $(75t + 45 \times 9)$ 米，乙走的路程为 $60(t + 9)$ ，列方程得： $75t + 45 \times 9 = 60(t + 9)$ ，解得

$t = 9$ 。由于此后又走了 50 米到达 D 地，所以 CD 的距离为： $75t + 45 \times 9 + 50 = 1130$ （米）。

由于甲从 C 地花了 9 分钟追上了乙，所以此时丙到 C 的距离为 $75 \times 9 - 45 \times 9 = 270$ ，即甲从 A 地到 C 地，丙走了 $270 \div 45 = 6$ （分钟），那么 AC 的距离为 $125 \times 6 = 750$ （米），所以 AD 的距离为 $1130 + 750 = 1880$ （米）。