

课后习题解析

1. (16 届华杯决赛)

$$1\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} + 5\frac{5}{6} + 7\frac{7}{8} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【考点】计算, 分数

【答案】 $18\frac{23}{24}$

【分析】原式 $= (2+4+6+8) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}) = 18\frac{23}{24}$

2. (12 届华杯决赛)

$$\text{计算: } [20.75 + (3.74 - 2\frac{1}{2}) \div 9\frac{23}{25}] \div 41.75 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【考点】计算, 分数

【答案】0.5

【分析】原式 $= \frac{20\frac{3}{4} + (3.74 - 2.5) \div 9.92}{41\frac{3}{4}} = \frac{20\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{41\frac{3}{4}} = \frac{166+1}{334} = \frac{167}{334} = \frac{1}{2} = 0.5$

3. (14 届华杯决赛)

方格中的图形符号“◇”, “○”, “▽”, “☆”代表填入方格中的数, 相同的符号代表相同的数, 如图所示, 若第一列, 第三列, 第二行, 第四行的四个数的和分别是 36, 50, 41, 37, 则第三行的四个数的和为_

	36		50	
	◇	○	▽	☆
	○	○	○	☆
	◇	◇	○	☆
	◇	◇	▽	◇

【考点】计算&数字谜

【答案】33

【分析】设 $\diamond=a$, $\circ=b$, $\nabla=c$, $\star=d$;

$$\text{则有: } \begin{cases} 3a+b=36 \\ 2b+2c=50 \\ 3b+d=41 \\ 3a+c=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=12 \\ c=3 \\ d=5 \end{cases}, \text{ 则第三行四个数之和为 } 2a+b+d=33$$

4. (12 届华杯决赛)

将 $\frac{131}{250}, \frac{21}{40}, 0.5\dot{2}\dot{3}, 0.5\dot{2}\dot{3}, 0.5\dot{2}$ 从小到大排列, 第三个数是_____.

【考点】计算, 比较与估算

【答案】 $0.5\dot{2}\dot{3}$

【分析】 $\frac{131}{250} = 0.524$, $\frac{21}{40} = 0.525$, 所以: $0.5\dot{2} < 0.5\dot{2}\dot{3} < 0.5\dot{2}\dot{3} < \frac{131}{250} < \frac{21}{40}$, 第三小的数是 $0.5\dot{2}\dot{3}$.

5. (12 届华杯决赛)

一列数是按以下条件确定的: 第一个是 3, 第二个是 6, 第三个是 18, 以后每一个数是前面所有数的和的 2 倍, 则第六个数等于_____, 从这列数的第_____个数开始, 每个都大于 2007.

【考点】计算, 数列

【答案】486; 8

【分析】这列数的第一个是 3, 第二个是 6, 第三个是 18,

第四个是 $(3+6+18) \times 2 = (3+6) \times 2 + 18 \times 2 = 18 \times 3 = 54$; 同理,

第五个是 $(3+6+18+54) \times 2 = (3+6+18) \times 2 + 54 \times 2 = 54 \times 3 = 162$;

可见, 从第三个数起, 每个数都是上一个数的 3 倍;

则第六个数是 $162 \times 3 = 486$;

继续往下求: 第七个数是 $486 \times 3 = 1452$, 第八个数是 $1452 \times 3 = 4356$

可见, 从第 8 个数开始, 每个都大于 2007

6. (13 届华杯决赛)

计算: $\frac{6 \times 4014 + 9 \times 4016 + \frac{1}{2}}{3 \times 4014 + 3 \times 6024 + \frac{1}{4}} =$ _____.

【考点】计算, 分数

【答案】2

【分析】分子 $= 2 \times (3 \times 4014 + 9 \times 2003 + \frac{1}{4}) = 2 \times (3 \times 4014 + 3 \times 6024 + \frac{1}{4}) = 2 \times$ 分母;

则原式=2

7. (14 届华杯决赛)

计算: $\frac{2008 + 2007 \times 2009}{2008 \times 2009 - 1} + \frac{2009 + 2008 \times 2010}{2009 \times 2010 - 1} =$ _____

【考点】计算, 分数

【答案】2

【分析】 $2008 + 2007 \times 2009 = 2008 + 2008^2 - 1 = 2008 \times 2009 - 1$

同理 $2009 + 2008 \times 2010 = 2009 \times 2010 - 1$

则原式 $= 1 + 1 = 2$

8. (16 届华杯决赛)

设某年中有一个月里有三个星期日的日期为奇数, 则这个月的 20 日可能是星期几?

【考点】数论, 周期

【答案】星期五; 星期三

【分析】一个月至多出现 5 个周日, 允许第 1, 3, 5 个周日为奇数: 设第一个周日为 1 号, 则第三个周日为 15 号, 第五个周日为 29 号, 对应 20 号应为周五;

设第一个周日为 3 号, 则第三个周日为 17 号, 第五个周日为 31 号, 对应 20 号应为周三.

9. (15 届华杯决赛)

华罗庚爷爷出生于 1910 年 11 月 12 日. 将这些数字排成一个整数, 并且分解成 $19101112 = 1163 \times 16424$. 请问这两个数 1163 和 16424 中有质数吗?

【考点】数论, 约倍质合

【答案】1163 是质数

【分析】显然 16424 不是质数;

$31^2 < 1163 < 37^2$, 则只需判断 31 以内的质数是否存在 1163 的约数就能判断 1163 是否为质数.

10. (15 届华杯决赛)

数字卡片“3”、“4”、“5”各 10 张, 任意选出 8 张使它们的数字和是 33, 则最多有_____张是卡片“3”.

【考点】数论, 不定方程

【答案】3

【分析】设“3”、“4”、“5”分别选出 a 张, b 张和 c 张,

$$\text{则有: } \begin{cases} a + b + c = 8 \\ 3a + 4b + 5c = 33 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 7, \text{ 显然 } a_{\max} = 3$$

11. (14 届华杯决赛)

已知三个合数 A, B, C 两两互质, 且 $A \times B \times C = 11011 \times 28$, 那么 $A + B + C$ 的最大值为_____

【考点】数论, 约倍质合

【答案】1626

【分析】 $A \times B \times C = 11011 \times 28 = 2^2 \times 7^2 \times 11^2 \times 13 = (11^2 \times 13) \times 7^2 \times 2^2 = 1573 \times 49 \times 4$

对应 $A + B + C = 1626$

12. (13 届华杯决赛)

将六个自然数 14, 20, 33, 117, 143, 175 分组, 如果要求每组中的任意两个数都互质, 则至少需要将这些数分成_____组.

【考点】数论&组合, 约倍质合&最值

【答案】3

【分析】由于 $14 = 2 \times 7$, $20 = 2^2 \times 5$, $175 = 5^2 \times 7$, 这三个数两两不互质, 所以至少要分成 3 组;

例如: (14,33) 为一组, (20,117) 为一组, (143,175) 为一组.

13. (14 届华杯决赛)

某班学生要栽一批树苗. 若每个人分配 k 棵树苗, 则剩下 38 棵; 若每个学生分配 9 棵树苗, 则还差 3 棵, 那么这个班共有_____名学生.

【考点】数论, 不定方程

【答案】41

【分析】设这个班有 n 人, 则 $nk + 38 = 9n - 3 \Rightarrow k = \frac{9n - 41}{n} = 9 - \frac{41}{n}$

由于 n 和 k 都是正整数, 只有当 $n = 41$ 时, $k = 9 - \frac{41}{41} = 8$ 符合条件.

14. (13 届华杯决赛)

小李应聘某公司主任职位时, 要根据下表回答主任的月薪是多少, 请你来回答这个问题.

职位	会计与出纳	出纳与秘书	秘书与主管	主管与主任	主任与会计
月薪和	3000 元	3200 元	4000 元	5200 元	4400 元

【考点】应用题

【答案】2900

【分析】五人月薪总和为: $\frac{3000 + 3200 + 4000 + 5200 + 4400}{2} = 9900$ 元;

则主任的月薪为: $9900 - 3000 - 4000 = 2900$ 元.

15. (13 届华杯决赛)

悉尼与北京的时差是 3 小时, 例如: 悉尼时间 12:00 时, 北京时间是 9:00, 某日, 当悉尼时间 9:15 时, 小马和小杨分别乘机从悉尼和北京同时出发去对方所在地, 小马于北京时间 19:33 分到达北京. 小马和小杨路途上时间之比为 7:6, 那么小杨到达悉尼时, 当地时间是_____.

【考点】应用题, 比例

【答案】20:39

【分析】将时间统一为悉尼时间, 二人出发时间为 9:15, 小马的到达时间为 $19:33 + 3h = 22:33$

小马共用时 $22:33 - 9:15 = 13:18 = 798$ 分钟, 则小杨用时 $798 \div 7 \times 6 = 684$ 分钟=11 小时 24 分钟;

则小杨到达时间为: $9:15 + 11:24 = 20:39$

16. (16 届华杯决赛)

在火车站的钟楼上装有一个电子报时钟, 在圆形钟面的边界, 每分钟的刻度处都有一个小彩灯. 晚上 9 时 35 分 20 秒时, 在分针和时针所夹的锐角内有 _____ 个小彩灯.

【考点】应用题, 行程, 钟表

【答案】12

【分析】共 60 格, 分针的速度为 1 格/分, 时针的速度为 $\frac{1}{12}$ 格/分;

整 9:00 时, 分针落后时针 $5 \times 9 = 45$ 格, 35 分 20 秒后, 还落后 $45 - 35 \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{12}) = 12 \frac{7}{18}$ 格, 显然其间有 12 个小彩灯.

17. (13 届华杯决赛)

甲乙两人沿一个周长为 400 米的环形跑道匀速前进, 甲行走一圈需要 4 分钟, 乙行走一圈需 7 分钟. 他们同时同地同向出发, 甲走完 10 圈后, 改为反向行走, 出发后, 每一次甲追上乙或和乙迎面相遇时, 两人都击掌示意. 问: 当两人第 15 次击掌时, 甲共走了多少时间? 乙走了多少路程?

【考点】应用题, 行程

【答案】甲走了 $66 \frac{2}{11}$ 分钟, 乙走了 $3781 \frac{9}{11}$ 米.

【分析】 $V_{\text{甲}}:V_{\text{乙}}=7:4$;

当甲走 10 圈时, 乙走 $\frac{4 \times 10}{7} = 5 \frac{5}{7}$ 圈, 甲比乙多走了 $10 - 5 \frac{5}{7} = 4 \frac{2}{7}$ 圈, 则甲超过乙 4 次, 击掌 4 次;

接下来甲反向后二人开始合走, 当甲乙再合走 $10 \frac{2}{7}$ 圈时, 两人相遇 11 次, 击掌 11 次, 这其中甲

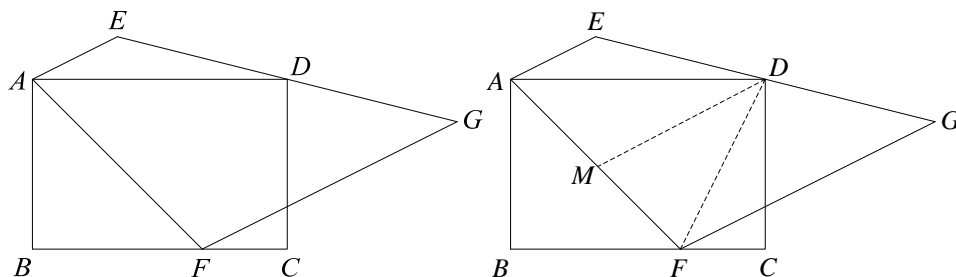
走了 $10 \frac{2}{7} \times \frac{7}{11} = 6 \frac{6}{11}$ 圈, 乙走了 $10 \frac{2}{7} \times \frac{4}{11} = 3 \frac{57}{77}$ 圈;

则甲共走了 $\left(10 + 6 \frac{6}{11}\right) \times 4 = 66 \frac{2}{11}$ 分钟

乙共走了 $\left(5 \frac{5}{7} + 3 \frac{57}{77}\right) \times 400 = 3781 \frac{9}{11}$ 米.

18. (16 届华杯决赛)

长方形 $ABCD$ 的面积是 2011 平方厘米. 梯形 $AFGE$ 的顶点 F 在 BC 上, D 是腰 EG 的中点. 试求梯形 $AFGE$ 的面积.



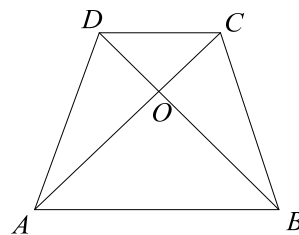
【考点】几何，直线型计算

【答案】2011

【分析】连接 DF ，根据一半模型可知 $\triangle ADF$ 的面积是长方形 $ABCD$ 的一半；实际上 $\triangle ADF$ 的面积也是梯形 $AFGE$ 的一半；简单说明理由：取 AF 的中点 M ，连接 DM ，则 DM 为梯形的中位线，则梯形面积为中位线 \times 高，而 $\triangle ADF$ 的面积恰好为梯形的中位线 \times 高 $\div 2$ 。
可见，梯形面积和长方形面积也相同，为 2011。

19. （14 届华杯决赛）

如图所示，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O 。已知 $AB=5$ ， $CD=3$ ，且梯形 $ABCD$ 的面积为 4，求三角形 OAB 的面积。



【考点】几何，直线型计算

【答案】 $\frac{25}{16}$

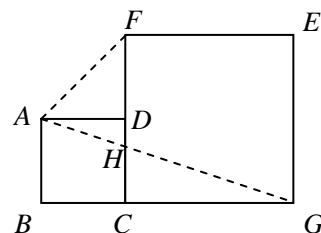
【分析】因为 $\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 相似，所以 $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = \frac{3}{5}$

设 $S_{\triangle COD} = 9a$ ，由 $\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{OC}{OA} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{\triangle AOD} = 15a$ ，同理 $S_{\triangle BOC} = 15a$

由 $\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{OC}{OA} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = 25a$ ，则有 $9a + 15a + 15a + 25a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{16} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = 25a = \frac{25}{16}$

20. （13 届华杯决赛）

图中， $ABCD$ 和 $CGEF$ 是两个正方形， AG 和 CF 相交于 H ，已知 CH 等于 CF 的三分之一，三角形 CHG 的面积等于 6 平方厘米，求五边形 $ABGEF$ 的面积。



【考点】几何，直线型计算

【答案】49.5

【分析】正方形 $CGEF$ 的面积为 $6 \times 3 \times 2 = 36$ ，则其边长为 6；

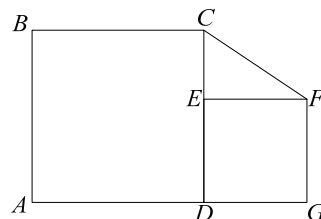
显然， $\triangle CHG$ 与 $\triangle BAG$ 相似，若设 $ABCD$ 的边长为 a ，

$$\text{根据 } \frac{AB}{BG} = \frac{HC}{CG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{a+6} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3;$$

$$\text{则五边形的面积为: } 3^2 + 6^2 + \frac{3 \times 3}{2} = 49.5$$

21. (12 届华杯决赛)

如图所示，两个正方形 $ABCD$ 和 $DEFG$ 的边长都是整数厘米，点 E 在线段 CD 上，且 $CE < DE$ ，线段 $CF = 5$ 厘米，则五边形 $ABCFG$ 的面积等于_____平方厘米。



【考点】几何，直线型计算

【答案】71

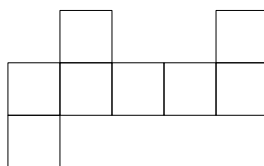
【分析】在直角三角形 CEF 中，斜边 $CF = 5$ ，要求各边都是整数，则只能 $CE = 3$ ， $EF = 4$ ；

可见小正方形边长为 4，大正方形边长为 7；

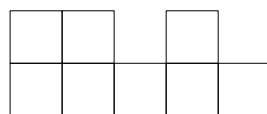
$$\text{五边形的面积为 } 4^2 + 7^2 + \frac{3 \times 4}{2} = 71$$

22. (12 届华杯决赛)

用一些棱长是 1 的小正方体码放成一个立体，从上向下看这个立体，如下图 a，从正面看这个立体，如下图 b，则这个立体的表面积最多是_____。



图a



图b

【考点】几何，立体，三视图

【答案】48

【分析】在俯视图（图 a）上标识每格的层数：

	2			1
2	2	1	2	1
2				

其中第一列和第二列都可将其中的一个 2 改为 1，但不会使表面积变的更大；

图示正视表面积为：8；俯视表面积为：8；侧视面积为：8

则表面积最大为： $(8+8+8) \times 2 = 48$

23. （八届华杯决赛）

埃及著名的胡夫金字塔为正四棱锥形，正方形底座边长为 230.4，塔高 146.7 米，假定建筑金字塔所用材料全部是石英石，每立方米重 2700 千克那么胡夫金字塔的总重量是_____千克.

【考点】几何，立体

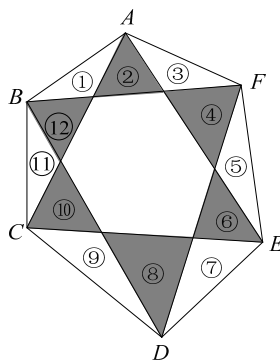
【答案】7008701644.8

【分析】四棱锥的体积 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 230.4^2 \times 146.7$

则总重量为： $\frac{1}{3} \times 230.4^2 \times 146.7 \times 2700 = 7008701644.8$ 千克

24. （15 届华杯决赛）

图中六边形 $ABCDEF$ 的面积是 2010 平方厘米. 已知 $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEF, \triangle EFA, \triangle FAB$ 的面积都等于 335 平方厘米, 6 个阴影三角形面积之和为 670 平方厘米, 求六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面积.



【考点】几何，直线型计算

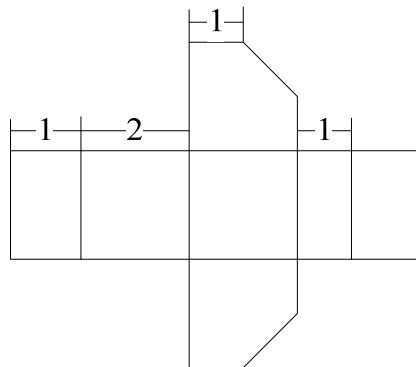
【答案】670

【分析】 $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BDF} = 2010 - 335 \times 3 = 1005$;

$$\text{则 } S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \frac{S_{\triangle ACE} + S_{\triangle BDF} - S_{\text{阴}}}{2} = \frac{1005 + 1005 - 670}{2} = 670$$

25. (17 届华杯决赛高年级组)

右图是一个五棱柱的平面展开图, 图中的正方形边长都为 2. 按图所示数据, 这个五棱柱的体积等于_____.



【考点】几何, 立体

【答案】7

【分析】底面积为: $2^2 - \frac{1 \times 1}{2} = 3.5$, 高为 2, 则体积为 $3.5 \times 2 = 7$

26. (18 届华杯决赛)

用四个数字 4 和一些加、减、乘、除号和括号, 写出四个分别等于 3、4、5 和 6 的算式.

【考点】巧填算符

【答案】见下面分析

【分析】 $(4 \times 4 - 4) \div 4 = 3$ 或者 $(4 + 4 + 4) \div 4 = 3$;

$4 \times (4 - 4) + 4 = 4$ 或者 $(4 - 4) \div 4 + 4 = 4$;

$(4 \times 4 + 4) \div 4 = 5$;

$(4 + 4) \div 4 + 4 = 6$;

(填法不唯一)

27. (15 届华杯决赛)

有五种价格分别为 2 元、5 元、8 元、11 元、14 元的礼品以及五种价格分别为 1 元、3 元、5 元、7 元、9 元的包装盒. 一个礼品配一个包装盒, 共有_____种不同价格.

【考点】组合, 计数

【答案】19

【分析】有序枚举与筛选:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2, 5, 8, 11, 14 & 2, 5, 8, 11, 14 & 2, 5, 8, 11, 14 & 2, 5, 8, 11, 14 & 2, 5, 8, 11, 14 \\ +1, 1, 1, 1, 1 & +3, 3, 3, 3, 3 & +5, 5, 5, 5, 5 & +7, 7, 7, 7, 7 & +9, 9, 9, 9, 9 \\ \hline 3, 6, 9, 12, 15 & 5, 8, 11, 14, 17 & 7, 10, 13, 16, 19 & 9, 12, 15, 18, 21 & 11, 14, 17, 20, 23 \end{array}$$

删去重复数字, 共 19 种

28. (16 届华杯决赛)

用 40 元钱购买单价分别为 2 元、5 元和 11 元的三种练习本, 每种至少买一本, 而且钱恰好花完. 则不同的购买方法有_____种.

【考点】组合, 计数

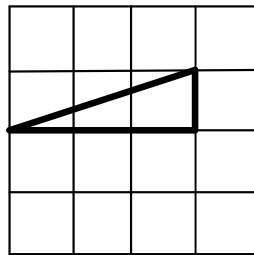
【答案】5

【分析】设 2 元、5 元、11 元的练习本分别买了 a 本, b 本和 c 本, 则有: $2a + 5b + 11c = 40$,

$$\text{分别令 } c=1, 2, 3, \text{ 解对应的不定方程共得 5 组解: } \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=12 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$$

29. (14 届华杯决赛)

如图所示, 在边长为 1 的小正方形组成的 4×4 方格图中, 共有 25 个格点. 在以格点为顶点的直角三角形中, 两条直角边长分别是 1 和 3 的直角三角形共有_____个.



【考点】组合, 计数, 图形计数

【答案】64

【分析】每个 1×3 的长方形内含 4 个边长分别为 1 和 3 的直角三角形

1×3 的长方形数量为: $8 \times 2 = 16$ 个, 则符合条件的直角三角形有 $16 \times 4 = 64$ 个.

30. (13 届华杯决赛)

黑板上写着 1 至 2008 共 2008 自然数, 小明每次擦去两个奇偶性相同的数, 再写上它们的平均数, 最后黑板上只剩下一个自然数, 这个数可能的最大值和最小值的差是_____.

【考点】组合, 最值

【答案】2005

【分析】从 1, 3 开始划起, 每次都划最小的 2 个数, 最后剩下 2007 最大;

从 2008, 2006 开始划起, 每次都划最大的 2 个数, 最后剩下 2 最小;

$2007 - 2 = 2005$.

31. (12 届华杯决赛)

“华”、“杯”、“赛”三个字的四角号码分别是“2440”、“4199”和“3088”，将“华杯赛”的编码取为 244041993088，如果这个编码从左起的奇数位的数码不变，偶数位的数码改变为关于 9 的补码，例如：0 变 9, 1 变 8 等，那么“华杯赛”新的编码是_____.

【考点】组合，操作

【答案】254948903981

【分析】244041993088，将加下划线数字换成补码：254948903981

32. (12 届华杯决赛)

某班一次数学考试，所有成绩得优的同学的平均分是 95 分，没有得优的同学的平均分是 80 分，已知全班同学的平均成绩不少于 90 分，问得优的同学占全班同学的比例至少是多少？

【考点】组合，最值

【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】设 a 人得优， b 人不得优；

则有： $95a + 80b \geq 90(a + b) \Rightarrow a \geq 2b$ ，可见 a 最小为 $2b$ ，此时占全班的比例为 $\frac{2}{3}$.