目　录

第一章　速算与巧算

1. 计算$8+98+998+9998+99998$

2. 计算$599996+49997+3998+407+89$

3. 计算$999+998+997+996+1000+1004+1003+1002+1001$

4. 计算 100+99−98+97−96+ …… +3−2+1

5. 计算 $454+999\times999+545$

6. 计算$1999+999^2$

7. 计算$7+77+777+7777+77777$

8. 计算$22\times 47+42\times 53$

9. 计算$1989\times 19901990-1990\times 19891989$

10. 计算（$1996\times 96+1997\times 97+1996+1997-1990$）$\div 3994$

11. 五个连续偶数的和为 1980，其中最大的数是多少？

12. 计算$9999\times 1111+3333\times 6667$

13. 计算$1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-\cdots\cdots+1990$

14. 计算（1234567+2345671+3456712+4567123+5671234+6712345+7123456）÷7

15. 有两个算式：①$199771\times199912$
②$199772\times199911$

请先不要算出结果，用最简单的方法很快比较出哪个得数大，大多少？

16. 在下面四个算式中，最大的数是多少？

①$1992\times1999+1999$

②$1993\times1998+1998$

③$1994\times1997+1997$

④$1995\times1996+1996$

17. 已知 M=（1+2+……+1990）（2+3+……+1991）

N=（1+2+……+1991）（2+3+……+1990）

那么 M 与 N 的大小关系是 M______ N。

18. 已知被乘数是$\underbrace{88\ldots\ldots8}_{1998\text{个}8}$，乘数是$\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998\text{个}9}$，它们的积是多少？

19. $\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998\text{个}9}\times\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998\text{个}9}+1\underbrace{9\ldots\ldots9}_{1998\text{个}9}$得数末尾有____个零。

20. 下图是一张把自然数按一定顺序排列的数表，用一个有五个空的十字可以框出不同的五个数字，现在框出的五个数字的四个角上的数字之和是 80，如果当框出的五个数字的和是 500 时，四个角上数字的和是多少？

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

分析解答

1. 把 8 分解成$2+2+2+2$，然后用加法结合律进行计算。

原式$=2+2+2+2+98+998+9998+99998$

$=(2+98)+(2+998)+(2+9998)+(2+99998)$

$=100+1000+10000+100000$

$=111100$

2. 若题中各数都与整十，整百，整千……接近，则常使用凑整法。例如可将 599996 化成 600000−4 去计算。

原式$=(600000-4)+(50000-3)+(4000-2)+(400+7)+(90-1)$

$=654490-4-3-2+7-1$

$=654490-3$

$=654487$

3. 认真观察每个加数，发现它们都和整数 1000 接近，所以选 1000 作为标准数，采取多退少补的方法。

原式$=(1000-1)+(1000-2)+(1000-3)+(1000-4)+1000+(1000+4)+(1000+3)+(1000+2)+(1000+1)$

$=1000\times9+(1+2+3+4-4-3-2-1)$

$=1000\times9$

$=9000$

4. 仔细观察题目可得除去首项 100 与末项 1 以外，其余 98 项正好可两项一组：99−98=1、97−96=1……分为 49 组，最后把 49 个 1 与首末项相加。

原式$=100+(99-98)+(97-96)+\cdots\ldots+(3-2)+1$

$=100+\underbrace{1+1+\cdots\ldots+1}_{49\text{ 个 }1}+1$

$=100+49+1$

$=150$

5. 此题表面上看没有巧妙的算法，一旦把 545 与 454 结合就可应用乘法分配律进行简算。

原式$=(454+545)+999\times999$

$=999+999\times999$

$=（999+1）\times999$

$=1000\times999$

$=999000$

6. 把999^2看作999×999,，然后把 1999 化成$1000+999$，最后利用乘法分配律进行简算。

解法一：$1999+999^2=1000+999+999\times999$

$=1000+（999+1）\times999$

$=1000+1000\times999$

$=(1+999)\times1000$

$=1000\times1000$

$=1000000$

解法二：$1999+999^2=1999+999\times999$

$=1999+999\times（1000-1）$

$=1999+999000-999$

$=（1999-999）+999000$

$=1000+999000$

$=1000000$

7. 观察题中各数是有规律的排列，可将每一个数化成 7 与 1、11、111、1111、11111 相乘，然后简算。

$7+77+777+7777+77777$

$=7\times1+7\times11+7\times111+7\times1111+7\times11111$

$=7\times（1+11+111+1111+11111）$

$=7\times12345$

$=86415$

8. 仔细观察每个数，找联系，可将 42 化成 22+20 后即可简算。

$22\times47+42\times53$

$=22\times47+（22+20）\times53$

$=22\times47+22\times53+20\times53$

$=22\times（47+53）+20\times53$

$=22\times100+1060$

$= 2200 + 1060$

$= 3260$

9. 仔细观察每一个数，寻找它们的特点，如 19901990 可化成1990×10001，而 19891989 也可化成1989×10001。

$1989 \times 19901990 - 1990 \times 19891989$。

$= 1989 \times 1990 \times 10001 - 1990 \times 1989 \times 10001$

$= 0$

10. 通过观察，找出联系，连续几次正逆使用乘法分配律，可使计算简化。

（$1996 \times 96 + 1997 \times 97 + 1996 + 1997 - 1990$） $\div 3994$

$=$（$1996 \times 96 + 1997 \times 97 + 1997 + 1996 - 1990$） $\div 3994$

$=$（$1997 \times 96 - 96 + 1997 \times 98 + 1996 - 1990$） $\div 3994$

$= (1997 \times 96 + 1997 \times 98 - 96 - 1990 + 1996) \div 3994$

$= (1997 \times 96 + 1997 \times 98) \div 3994$

$= (1997 \times 97 \times 2) \div 3994$

$= (3994 \times 97) \div 3994$

$= 97$

11. 五个连续偶数中间一个数应为$1980 \div 5 = 396$，因相邻偶数相差 2，故这五个偶数依次是 392、394、396、398、400，其中最大的一个是 400。或直接用$396 + 2 \times 2 = 396 + 4 = 400$。

12. 此题如果直接乘，数字较大，容易出错。如果将 9999 变为 3333×3，规律就出现了。

$9999 \times 1111 + 3333 \times 6667$

$= 3333 \times 3 \times 1111 + 3333 \times 6667$

$= 3333 \times 3333 + 3333 \times 6667$

$= 3333 \times$（$3333 + 6667$）

$= 3333 \times 10000$

$= 33330000$

13. $2 - 3 - 4 + 5 = 0$

$6 - 7 - 8 + 9 = 0$

$10 - 11 - 12 + 13 = 0$……

$1986 - 1987 - 1988 + 1989 = 0$

整个算式除首项和末项 1990 外，其余依次每两个加数和每两个减数作为一组，正好分成（$1990-2$）$\div 4 = 497$组，每个组数的计算结果都等于 0，所以整个算式的计算结果为：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots\cdots(1986-1987-1988+1989)+1990 \\
&= 1+\underbrace{0+\cdots\cdots+0}_{497\text{个}}+1990 \\
&= 1991
\end{aligned}
$$

14. 括号里的七个加数，都是由 1、2、3、4、5、6、7 这七个数字组成，换句话说，这七个数的每一位也分别是 1、2、3、4、5、6、7，列出竖式是：

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\
 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\
 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\
 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
+ & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
\end{array}
$$

如果不进位，每个位的和都是 28。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (1111111 \times 28) \div 7 \\
&= 1111111 \times (28 \div 7) \\
&= 1111111 \times 4 \\
&= 4444444
\end{aligned}
$$

15. 经审题可知①式的第一个因数的个位数字比②式的第一个因数的个位数字小 1，但①式的第二个因数的个位数字又比②式的第二个因数的个位字大 1，所以不经计算，凭直接观察不容易知道①和②哪个大。但是无论是对①还是对②，直接把二个因数相乘求积又太繁，所以我们将①和②先进行恒等变形，再作判断。

$$
\begin{aligned}
\text{①式} &= 199771 \times 199912 \\
&= 199771 \times (199911+1) \\
&= 199771 \times 199911 + 199771
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{②式} &= (199771+1) \times 199911 \\
&= 199771 \times 199911 + 199911
\end{aligned}
$$

因为 199911>199771，所以①式小于②式，199911−199771=140。

16. 利用乘法分配律，将各式恒等变形后，再判断。

①$1992\times1999+1999=1999\times1993$

②$1993\times1998+1998=1998\times1994$

③$1994\times1997+1997=1997\times1995$

④$1995\times1996+1996=1996\times1996$

根据“若保持和不变，则两个数的差越小，积越大”，则$1996\times1996=3984016$是最大的得数。

17. 为了书写简便，设$A=2+3\ldots\ldots+1990$，于是有

$M=（1+A）(A+1991)=A+1991A+A^2+1991$

$N=(1+A+1991)\cdot A=A+1991A+A^2$

显然$M>N$。

18.

$$\underbrace{88\ldots\ldots8}_{1998个8}\times\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}$$

$$=\underbrace{88\ldots\ldots8}_{1998个8}\times（\underbrace{100\ldots\ldots0-1}_{1998个0}）$$

$$=\underbrace{88\ldots\ldots8}_{1998个8}\underbrace{000\ldots\ldots0}_{1998个0}-\underbrace{88\ldots\ldots8}_{1998个8}$$

$$=\underbrace{88\ldots\ldots87}_{1997个8}\ \underbrace{11\ldots\ldots12}_{1997个1}$$

19.

$$\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}\times\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}+1\underbrace{9\ldots\ldots9}_{1998个9}$$

$$=\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}\times（1\ \underbrace{0\ldots\ldots0-1}_{1998个0}）+1\underbrace{9\ldots\ldots9}_{1998个9}$$

$$=\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}\underbrace{000\ldots\ldots0}_{1998个0}-\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}+1\underbrace{9\ldots\ldots9}_{1998个9}$$

$$=\underbrace{99\ldots\ldots9}_{1998个9}\underbrace{0\ldots\ldots0}_{1998个0}+1\underbrace{000\ldots\ldots0}_{1998个0}$$

$$=1\underbrace{0\ldots\ldots0}_{1998个0}\underbrace{0\ldots\ldots0}_{1998个0}$$

$$=1\ \underbrace{000\ldots\ldots0}_{3996个0}$$

20. 仔细观察十字框中的五个数里，中间一个是这五个数的平均值，也是其余四个数的平均值，所以中间一个数可由：$500\div5=100$得到，且即得四个角上数字

之和为：$100 \times 4 = 400$。

第二章　定义新运算

1. 设 a、b 都表示数，规定$a \vartriangle b = 3a + \frac{1}{2}b$，

   ①求 5△6，6△5；

   ②这个运算"△有交换律吗？

   ③求 2△（3△5），（2△3）△5；

   ④这个运算"△有结合律吗？

   ⑤如果已知$7 \vartriangle b = 25$，求 b。

2. 假设一种运算符号□，x□y 表示把 x 和 y 加起来被 4 除。

   ①求 13□17 的值。

   ②求 2□（3□5）的值。

   ③求 $a\square 16 = 10$中 a 的值。

3. 规定$x * y = \frac{Ax+y}{xy}$，且$5 * 6 = 6 * 5$，求（$3 * 2$）×（$1 * 10$）的值。

4. 设a、b分别表示两个数，如果$a * b$表示$\frac{a\text{-}b}{3}$，照这样的规则，$3 * [6 * (8 * 5)]$的结果是什么？

5. 规定$a※b=\frac{a\times b}{a+b}$，求2※10※10的值。

6. 规定$x\vartriangle y=xA+\frac{x+y}{xy}$，而且，$1\vartriangle 2=2\vartriangle 3$，求$3\vartriangle 4$的值。

7. 设$a*b$表示a的 3 倍减去 b 的 2 倍，即$a*b=3a-2b$，

(1)计算：（$\frac{5}{3}*\frac{4}{5}$）$*\frac{3}{4}$

(2)已知：$x*(4*1)=7$，求 x。

8. 设$P*Q=5P+4Q$，当$x*9=91$时，$\frac{1}{5}*$（$x*\frac{1}{4}$）的值是多少？

9. P、Q表示两个数，$P*Q=\frac{P+Q}{2}$，如$3*4=\frac{3+4}{2}=3.5$。

求：①4 *（6 * 8）= ______

②如果$x*(6*8)=6$，那么x=________。

10. 定义新运算为$x⊖y=\frac{x+1}{y}$，

①求3⊖（2⊖4）的值；

②若x⊖4 = 1.35，则x =?。

、

11. 有一个数学运算符号“。”，使下列算式成：$\frac{1}{2}。\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$，$\frac{4}{5}。\frac{7}{9}=\frac{11}{45}$，$\frac{5}{6}。\frac{1}{7}=\frac{6}{42}$，求$\frac{3}{11}。\frac{4}{5}$ 的值。

12. 定义两种运算：“⊕”、“⊗”，对于任意两个整数a、b，$a⊕b=a+b-1$，$a⊗b=a\times b-1$，

①计算4⊗[（6⊕8）⊕（3⊕5）]的值；

②若x⊕(x⊗4) = 30，求 x 的值。

13. 对于任意整数 a、b，定义新运算“△”，$a\triangle b=\frac{12\times a\times b}{ma+2b}$(其中 m 是一个确定的整数)，如果$1\triangle 2=2$，则 $2\triangle 9=$?

14. 有一个数学运算符号"$\otimes$"，使下列算式成立：$4\otimes 8=16$，$10\otimes 6=26$，$6\otimes 10=22$，$18\otimes 14=50$，求 $7\otimes 3=$？

15. 对于数 a、b 规定运算"▽"为$a\nabla b=(a+1)\times(1-b)$，若等式$(a\nabla a)\nabla(a+1)=(a+1)\nabla(a\nabla a)$成立，求 a 的值。

16. "$*$"表示一种新运算，它表示：

$x*y=\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+8)}$，求$3*5$的值。

17. $a※b=\frac{a+b}{a\div b}$，在 $x※(5※1)=6$中，求 x 的值。

18 .规定 $a \vartriangle b = a + (a+1) + (a+2) + \cdots \ldots + (a+b-1)$, (a、b 均为自然数，$b > a$)，如果 $x \vartriangle 10 = 65$，那么 x =？

19. 对于数 a、b 规定运算“▽”为$a\nabla b =$（a + 3）$\times (b-5)$, 求 5∇（6∇7）的值。

20. x、y 表示两个数，规定新运算“*”及“△”如下：$x * y = 6x + 5y$，$x \vartriangle y = 3xy$，求（2*3）△4 的值。

分析解答

1. 解定义新运算这种问题，关键是抓住定义的本质，本题规定的运算的本质是：用运算符号前面的数的 3 倍加上符号后面的数的$\frac{1}{2}$ 。

①$5\vartriangle 6=3\times 5+\frac{1}{2}\times 6=18$

$6\vartriangle 5=3\times 6+\frac{1}{2}\times 5=20\frac{1}{2}$

②由①的例子可知“△”没有交换律。

③要计算 2△（3△5），和“+、—、×、÷”四则混合运算中有括号时的运算顺序一样，先做括号内，再做括号外。

$2\vartriangle（3\vartriangle 5）=2\vartriangle（3\times 3+\frac{1}{2}\times 5）$

$=2\vartriangle（9+2\frac{1}{2}）$

$=2\vartriangle 11\frac{1}{2}$

$=3\times 2+\frac{1}{2}\times 11\frac{1}{2}$

$=6+5\frac{3}{4}$

$=11\frac{3}{4}$

$（2\vartriangle 3）\vartriangle 5=（3\times 2+\frac{1}{2}\times 3）\vartriangle 5$

$=(6+1\frac{1}{2})\vartriangle 5$

$=7\frac{1}{2}\vartriangle 5$

$=3\times 7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 5$

$=22\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$

$=25$

④通过上例可知“△”也没有结合律。

⑤因为$7\vartriangle b=3\times7+\frac{1}{2}\times b=21+\frac{1}{2}b$，所以$21+\frac{1}{2}b=25$，

解出$b=8$。

2. 明确$x\square y=(x+y)\div4$。

(1)$13\square17=(13+17)\div4=30\div4=7\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
(2)2\square(3\square5)&=2\square[(3+5)\div4]\\
&=2\square[8\div4]\\
&=2\square2\\
&=(2+2)\div4\\
&=1
\end{aligned}
$$

(3) 因为$a\square16=10$

即（$a+16$）$\div4=10$

$a+16=40$

$a=40-16$

$a=24$

3. 若想求出答案，必须确定 A 的值，又因为$5*6=6*5$，所以$5A+6=6A+5$，即可得$A=1$，所以：

$$
\begin{aligned}
&(3*2)\times(1*10)\\
&=\frac{1\times3+2}{3\times2}\times\frac{1\times1+10}{1\times10}\\
&=\frac{5}{6}\times\frac{11}{10}\\
&=\frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

4. 按先中后小，先内后外的运算顺序进行计算。

$$
\begin{aligned}
&3*[6*(8*5)]\\
&=3*[6*(\frac{8-5}{3})]\\
&=3*[6*1]\\
&=3*[\frac{6-1}{3}]\\
&=3*1\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{3-1\frac{2}{3}}{3}$$

$$=1\frac{1}{3}\div 3$$

$$=\frac{4}{9}$$

5. 从左到右依次计算。

$$2※10※10$$

$$=\frac{2\times10}{2+10}※10$$

$$=1\frac{2}{3}※10$$

$$=\frac{1\frac{2}{3}\times10}{1\frac{2}{3}+10}$$

$$=1\frac{3}{7}$$

6. 根据规定，可知

$$1\vartriangle 2=1\times A+\frac{1+2}{1\times2}=A+\frac{3}{2}$$

$$2\vartriangle 3=2A+\frac{2+3}{2\times3}=2A+\frac{5}{6}$$

因为$1\vartriangle 2=2\vartriangle 3$

所以$A+\frac{3}{2}=2A+\frac{5}{6}$

解得$A=\frac{2}{3}$

所以$3\vartriangle 4=3A+\frac{3+4}{3\times4}$

$$=3\times\frac{2}{3}+\frac{7}{12}$$

$$=2+\frac{7}{12}$$

$$=2\frac{7}{12}$$

7.

（1）观察式中的三个数$\frac{5}{3}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{4}$，如果是做乘法，可约分。但同学们一定要

注意这里的运算符号“*”表示“*号前面的数的 3 倍与*号后面数的 2 倍的差”这个运算不满足结合律与去括号法，所以不能直接去括号约分做。所以

$$\left(\frac{5}{3}*\frac{4}{5}\right)*\frac{3}{4}$$

$$=\left(3\times\frac{5}{3}-2\times\frac{4}{5}\right)*\frac{3}{4}$$

$$=\frac{17}{5}*\frac{3}{4}$$

$$=3\times\frac{17}{5}-2\times\frac{3}{4}$$

$$=8\frac{7}{10}$$

(2)由于$a*b=3a-2b$，所以：

$$x*(4*1)=x*(3\times4-2*1)=x*10=3x-2\times10=3x-20$$

又因为$x*(4*1)=7$

所以$3x-20=7$

$$3x=27$$

$$x=9$$

8. 若想求$\frac{1}{5}*(x*\frac{1}{4})$的值必须先求 x 的值，即应先解出$x*9=91$中的 x

因为$x*9=5x+4\times9=5x+36$

所以：$5x+36=91$

$$5x=91-36$$

$$5x=55$$

$$x=11$$

把$x=11$代入$\frac{1}{5}*(x*\frac{1}{4})$得：

$$\frac{1}{5}*(x*\frac{1}{4})$$

$$=\frac{1}{5}*\left(5\times11+4\times\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{5}*56$$

$$=5\times\frac{1}{5}+4\times56$$

$$=1+224$$

$$=225$$

9.

⑴$4*(6*8)$

$=4*(\frac{6+8}{2})$

$=4*7$

$=\frac{4+7}{2}$

$=5.5$

⑵因为$x*(6*8)=x*(\frac{6+8}{2})$

$=x*7$

$=\frac{x+7}{2}$

所以：$\frac{(x+7)}{2}=6$

$x+7=12$

$x=5$

10. 方法同题 9。

⑴$3\ominus(2\ominus4)=\frac{16}{3}$

⑵$x=4.4$

11. 通过对上面已知算式的分析，可以找到下面这个规律：

$\frac{c}{d}\circ\frac{d}{b}=\frac{c+d}{a\times b}$，所以：

$\frac{3}{11}\circ\frac{4}{5}$

$=\frac{3+4}{11\times5}$

$=\frac{7}{55}$

12. 这个题目中出现了两种新运算，做题时一定要分清两种新运算的意义，且要看清题目的运算顺序。

①$4\otimes[(6\oplus8)\oplus(3\oplus5)]$

$=4\otimes[(6+8-1)\oplus(3+5-1)]$

$=4\otimes(13\oplus7)$

$=4\otimes(13+7-1)$

$=4\otimes19$

$=4\times19-1=76-1=75$

②因为：$x \oplus (x \otimes 4) = x \oplus (4x - 1) = x + 4x - 1 - 1 = x + 4x - 2 = 5x - 2$

所以：$5x - 2 = 30$，解出$x = 6.4$。

13. 若想求$2 \vartriangle 9 =$？，就必须知道定义的新运算中 m 的值，所以要通过$1 \vartriangle 2 = 2$求 m。

因为：$1 \vartriangle 2 = \frac{12\times2\times1}{m+2\times2} = \frac{24}{m+4}$

所以 $\frac{24}{m+4} = 2$

$m + 4 = 12$

$m = 8$

所以：$a\triangle b=\frac{12\times a\times b}{8a+2\times b}$

则：$2 \vartriangle 9$

$= \frac{12 \times 2 \times 9}{8 \times 2 + 2 \times 9}$

$= \frac{216}{34}$

$= 6\frac{6}{17}$

14. 通过对已知算式的观察，可知$a \otimes b = 2a + b$，因此$7 \otimes 3 = 2 \times 7 + 3 = 17$。

15. 先看等式：

$(a\nabla a)\nabla(a+1) = (a+1)\nabla(a\nabla a)$的左边：

$(a\nabla a)\nabla(a+1)$

$= [(a+1)\times(1-a)]\nabla(a+1)$

$= (1-a^2+1)\times[1-(a+1)]$

$= a^3 - 2a$

再看等式的右边：

$(a+1)\nabla(a\nabla a)$

$= (a+1)\nabla[(a+1)\times(1-a)]$

$= (a+1)\nabla(1-a^2)$

$= (a+1+1)\times[1-(1-a^2)]$

$= a^3 + 2a^2$

所以有$a^3 - 2a = a^3 + 2a^2$

因此：$a^2+\mathrm{a}=0$

因为：$a^2\geq 0$，要使$a^2+\mathrm{a}=0$，只有$\mathrm{a}=0$，因此$\mathrm{a}=0$。

16.

$$3*5=\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{(3+1)\times(5+8)}$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{52}$$

$$=\frac{67}{780}。$$

17.

$$\mathrm{x}※(5※1)$$

$$=\mathrm{x}※(\frac{5+1}{5\div 1})$$

$$=\mathrm{x}※\frac{6}{5}$$

$$=\frac{\mathrm{x}+\frac{6}{5}}{\mathrm{x}\div 1.2}=\frac{\mathrm{x}+1.2}{\mathrm{x}\div 1.2}$$

所以：$\frac{\mathrm{x}+1.2}{\mathrm{x}\div 1.2}=6$，解得：$\mathrm{x}=0.3$

18. 根据运算：

$$\mathrm{x}\vartriangle 10$$

$$=\mathrm{x}+(\mathrm{x}+1)+(\mathrm{x}+2)+(\mathrm{x}+3)+\cdots\ldots+(\mathrm{x}+10-1)$$

$$=10\mathrm{x}+(1+2+3+\cdots\ldots+9)$$

$$=10\mathrm{x}+45$$

因此有：$10\mathrm{x}+45=65$

$$10\mathrm{x}=20$$

$$\mathrm{x}=2$$

19.

$$5\nabla(6\nabla 7)$$

$$=5\nabla[(6+3)\times(7-5)]$$

$$=5\nabla 18$$

$$=(5+3)\times(18-5)$$

$$= 8 \times 13$$
$$= 104$$

20.

$$(2 * 3) \vartriangle 4$$
$$= [6 \times 2 + 3 \times 5] \vartriangle 4$$
$$= [12 + 15] \vartriangle 4$$
$$= 27 \vartriangle 4$$
$$= 3 \times 27 \times 4$$
$$= 324$$

第三章　等差数列及其应用

1. 求值193 + 187 + 181 +……+103

2. 某市举行数学竞赛，比赛前规定，前 15 名可以获奖，比赛结果第一名 1 人，第二名并列 2 人，第三名并列 3 人，……第十五名并列 15 人，用最简便方法计算出得奖的一共有多少人？

3. 全部三位数的和是多少？

4. 在 1949、1950、1951……1997、1998 这五十个自然数中，所有偶数之和比所有奇数之和多多少？

5. 下面的算式是按一定规律排列的，那么第 100 个算式的得数是多少？

$4+3$，$5+6$，$6+9$，$7+12$……

6. 图 3-1 是一个堆放铅笔的 V 形架，如果最上面一层放 60 支铅笔，问一共多少支铅笔？

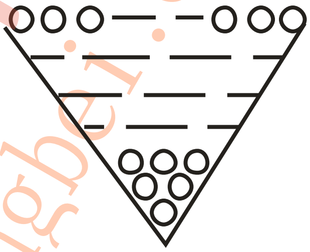


图3-1

7. 在上题中，如果 V 形架上一共放有 210 支铅笔，问：最上层有多少支铅笔？

8. 某剧院有 25 排座位，后一排比前一排多两个座位，最后一排有 70 个座位。这个剧院一共有多少个座位？

9. 小明从一月一日开始写大字，第一天写了 4 个，以后每天比前一天多写相同数量的大字，结果全月共写 589 个大字，小明每天比前一天多写几个大字？

10．九个连续偶数的和比其中最小的数多 232，这九个书中最大的数是多少？

11．39 个连续奇数的和是 1989，其中最大的一个奇数是多少？

12．学校进行乒乓球选拔赛，每个参赛选手都要和其他所有选手赛一场，一共进行了 78 场比赛，有多少人参加了选拔赛？

13．跳棋棋盘（如图 3-2）上一共有多少棋孔？

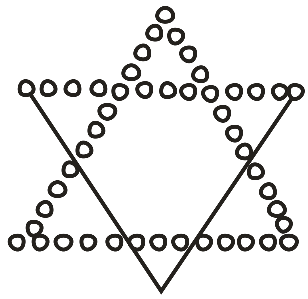


图 3-2

14．在 1～200 这二百个数中能被 9 整除的数的和是多少？

15．在 1～100 这一百个自然数中所有不能被 9 整除的奇数的和是多少？

16．编号为 1～9 的九个盒子中共放有 351 粒米，已知每个盒子都比前一号盒子多同样多粒米，如果 1 号盒子放 11 粒米，问：后面的盒子比它前一号的盒子多放几粒米？如果 3 号盒子内放了 23 粒米呢？

17．若干人围成 8 圈，一圈套一圈，从外向内各圈人数依次少 4 人。

⑴如果最内圈有 32 人，共有多少人？

⑵如果共有 304 人，最外圈有几人？

18．有一列数：1，1993，1992，1，1991，1990，1，……，从第三个数起，每一个数都是它前面两个数中大数减小数的差，求从第一个起到 1993 个数这 1993 个数之和。

19. 有一个六边形点阵（图 3-3），它的中心是一个点，算作第一层，第二层每边有两个点，第三层每边三个点，……，这个六边形点阵共 100 层，问：这个点阵共有多少个点。

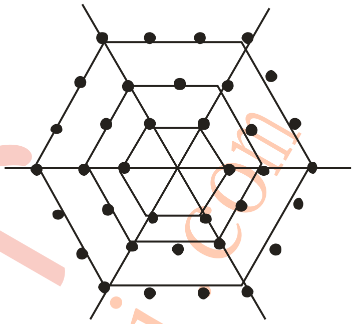


图 3-3

20. 设自然数按图 3-4 的方式排列，求第 10 行第一个数字是几？从右上角开始的对角线上的第 10 个数字是几？

1	3	6	10	15	21…
2	5	9	14	20…………	
4	8	13	19………………………		
7	12	18………………………………			
11	17………………………………………				
16………………………………………………					

图 3-4

分析解答

1．逆看此题，可得这是一个首项为 103，公差为 6，末项为 193，项数是[（193-103）÷6+1]=16 的等差数列求和问题。根据等差数列求和公式：

$S_n =（a_1+a_n）\times n \div 2$

原式$= (103 + 193) \times 16 \div 2$

$= 296 \times 16 \div 2$

$= 296 \times (16 \div 2)$

$= 296 \times 8$

$= 2368$

2．通过审题可知，各个名次的获奖人数正好组成一等差数列：1，2，3……15，公差为 1，所以根据求和公式：

$S_n = (a_1+a_n) \times n \div 2$

$(1 + 15) \times 15 \div 2$

$= 16 \times 15 \div 2$

$= 120(人)$

答：得奖的一共有 120 人。

3.三位数依次为 100、101、102、……998、999，排成一个公差为 1，项数是（999−100）+1=900 的等差数列，求所有三位数的和，根据等差数列求和公式得：

$(100 + 999) \times 900 \div 2$

$= 1099 \times 900 \div 2$

$= 494550$

答：全部三位数的和是 494550。

4．根据题意可列出算式：

$（1950 + 1952 + \cdots ... + 1998）-（1949 + 1951 + \cdots ... + 1997）$

解法一：可以看出，1950，1952，……1998 是一个公差为 2 的等差数列，1949、1951……1997 也是一个公差为 2 的等差数列，且项数均为 25，所以根据公式：

$S_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$ 得：

原式$=$（$1950+1998$）$\times 25\div 2-$（$1949+1997$）$\times 25\div 2$

$=(1950+1998-1949-1997)\times 25\div 2$

$=2\times 25\div 2$

$=25$

答：所有偶数之和比所有奇数之和多 25。

解法二：注意到这两个等差数列的项数相等，公差相同，且相对应项差 1，所以 25 项就差 25 个 1，即

原式$=$（$1950-1949$）$+$（$1952-1951$）$+\cdots\ldots+$（$1998-1997$）

$=\underbrace{1+1+\cdots\ldots+1}_{25\text{个}}$

$=25$

5. 仔细观察可知，每个算式的第一个加数组成一个公差为 1 的等差数列：4，5，6，7……；每个算式的第二个加数组成了一个公差为 3 的等差数列：3，6，9，12，……；若要求第 100 个算式的得数，只要分别算出每个等差数列的第 100 项即可。

根据通项：$a_n=a_1+(n-1)d$

第一个加数为：$4+$（$100-1$）$\times 1=4+99=103$

第二个加数为：$3+$（$100-1$）$\times 3=3+99\times 3=3\times 100=300$

所以第 100 个算式的得数为：$103+300=403$

答：第 100 个算式数是 403。

6. 从最底层到最上层每一层堆放的铅笔支数组成一个等差数列，所以一共放铅笔

（$1+60$）$\times 60\div 2$

$=61\times 60\div 2$

$=1830$（支）

答：一共 1830 支铅笔。

7. 通过看图可知铅笔摆放的层数与最上一层的支数相同，即第 n 层就有 n 支铅笔，则：

（$1+n$）$\times n\div 2=210$

（$1+n$）$\times n=420$

即将 420 分解成相邻两个自然数的乘积；420=20×21

所以，最上一层有 20 支铅笔。

8. 根据题意可知，这是一个等差数列求和的问题，但要利用公式$S_n = (a_1+a_n) \times n \div 2$必须知道第一排有多少个座位，即首项是几，根据首项公式：

$a_1 = a_n - (n-1) \times d$

有：$70 - (25-1) \times 2$

$= 70 - 24 \times 2$

$= 70 - 48$

$= 22$（个）

所以一共有座位：

$(22 + 70) \times 25 \div 2$

$= 92 \times 25 \div 2$

$= 1150$(个)

答：这个剧院一共有 1150 个座位。

9. 因为以后每一天比前一天多写相同数量的大字，即每天写的字数组成一个等差数列，首项为 4，和为 589，又因为是一月份所以有 31 天，即项数为 31，求公差。根据公式$d = (a_n - a_1) \div (n-1)$求公差必须先求出$a_n$，所以逆用求和公式$S_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$ 得：$a_n = 2S_n \div n - a_1$

$589 \times 2 \div 31 - 4$

$= 38 - 4$

$= 34$(个)

所以：$(34 - 4) \div (31 - 1)$

$= 30 \div 30$

$= 1$

答：小明每天比前一天多写 1 个大字。

10. 已知九个连续偶数的和比其中最小的数多 232，也就是另外八个偶数之和是 232。相邻两个偶数差为 2，根据公式：

$a_1 + a_n = 2S_n \div n$

得：$a_2 + a_9 = 2 \times 232 \div 8 = 58$

又因为$a_9 = a_2 + (8-1) \times 2$

$= a_2 + 14$

所以$a_2 + a_2 + 14 = 58$

$2a_2 = 44$

$a_2 = 22$

$a_9 = 22 + 14 = 36$

或按和倍问题计算可得：

较大数 = （和 + 差） ÷ 2

$[(58 + (8 - 1)) \times 2] \div 2$

$= 29 + 7 = 36$

答：九个数中最大数是 36。

11．解法一：因为 1989 是 39 个连续奇数的和，而每两个相邻奇数之间相差 2。这就组成了一个 39 项，公差为 2 的等差数列，所以根据公式：$a_1 + a_n = 2S_n \div$ n得：

$a_1 + a_{39} = 2 \times 1989 \div 39 = 102$

而　$a_{39} = a_1 + (39 - 1) \times 2$

即　$a_1 + a_1 + (39 - 1) \times 2 = 102$

$2a_1 + 38 \times 2 = 102$

$2a_1 = 26$

$a_1 = 13$

所以其中最大的一个奇数是：

$13 + (39 - 1) \times 2 = 13 + 76 = 89$

解法二：因为 39 个连续奇数之和为 1989，所以中间一个数是这 39 个数的平均数，$1989 \div 39 = 51$，比 51 大的另外 19 个奇数为：53，55，57，……87，89。或用$51 + 19 \times 2 = 51 + 38 = 89$。所以其中最大的一个奇数为 89。

12．设共有 n 个人参加比赛，把他们分别编号 1，2，3……（n–1），n；

解法一：　对于 1 号他于其他人共赛（n–1）场；

2 号除去与 1 号赛的一场外还要赛（n–2）场；

3 号出去与 1、2 号赛的两场外还要赛（n–3）场；……

（n–1）号除去与前面选手赛的场次以外，还要与 n 号赛一场，这时 n 号与前面所有选手赛过。所以这时他们赛过的场数成为一个等差数列：（n–1），（n–2），……2，1；

所以：$[1 + (n - 1)] \times (n - 1) \div 2 = 78$

$n \times (n - 1) \div 2 = 78$

$n \times (n - 1) = 156$

$13 \times 12 = 156$

所以一共有 13 人参加了比赛。

解法二：n 个人参加比赛，每个参赛选手都要和其他选手赛一场，则每个选手赛（n−1）场，n 个人赛（n−1）×n 场，但每两个人只赛一场，所以这里有一半是重复的，所以实际应赛：

$n\times(n-1)\div 2=78$

$n(n-1)=156$

$13\times 12=156$

答:一共有 13 人参加了选拔赛。

13. 六角形棋盘可以看作一正一反两个大等边三角形重叠而成，大三角形每边上有 13 个棋孔，所以一个大三角形共还有棋孔 $(1+2+3+\cdots\ldots+13)=(1+13)\times 13\div 2=91$个，剩下三个小三角形（见图 3-3），共有棋孔

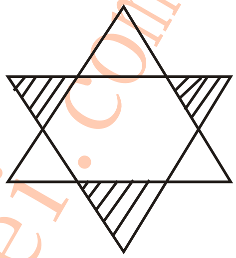


图 3-3

$(1+2+3+4)\times 3$

$=10\times 3=30$（个）

所以：跳棋盘上一共有棋孔

$(91+30)=121$ 个。

答：棋盘上共有棋孔 121 个。

14. 在 1～200 这二百个数中能被 9 整除的数构成了一个以 9 为首项，公差为 9 的等差数列：9、18、27、36、……189，198，一共有 $(198-9)\div 9+1=22$项，他们的和为：

$(9+198)\times 22\div 2$

$=207\times 22\div 2$

$=2277$

答：在 1～200 中能被 9 整除的数之和为 2277。

15. 根据题意可列为：

$(1+3+5+\cdots\ldots+99)-(9+27+45+63+81+99)$

$=(1+99)\times 50\div 2-(9+99)\times 6\div 2$

$=2500-324$

$=2176$

答：在 1～100 中所有不能被 9 整除的奇数的和为 2176。

16. 先求第九号盒子中有多少粒米：

$a_9 = 2S \div 9 - a_1$

$2 \times 351 \div 9 - 11 = 67$(粒)

然后再根据求公差公式解题：

（$67 - 11$）$\div$（$9 - 1$）

$= 56 \div 8$

$= 7$（粒）

如果 3 号盒子内放 23 粒米，则 1 号盒子内放($23 - 2d$)粒米，9 号盒子内放（$23 + 6d$）粒米，所以这时后面的盒子比它前一号盒子多的粒数可由下面的方程求出：

（$23 - 2d + 23 + 6d$）$\times 9 = 351 \times 2$

$(46 + 4d) \times 9 = 702$

$46 + 4d = 78$

$4d = 78 - 46$

$4d = 32$

$d = 8$

答：如果 1 号盒子放 11 粒米，那么后面每一个盒子比前面一号盒子多放 7 粒，如果 3 号盒子内有 23 粒米，则后比前多放 8 粒米。

17. ⑴先求最外圈有多少人？

$32 +$（$8 - 1$）$\times 4$

$= 34 + 28$

$= 60$（人）

共有人数：

（$32 + 60$）$\times 8 \div 2$

$= 92 \times 8 \div 2$

$= 368$（人）

答：如果最内圈有 32 人，共有 368 人。

⑵最外圈人数有：$a_1 + (8 - 1) \times 4 = (a_1 + 28)$人

所以共有人数可表示为：

（$a_1 + a_1 + 28$）$\times 8 \div 2 = 304$

$2a_1 + 28 = 76$

$2a_1 = 48$

$a_1=24$

$24+28=52$(人)

答：如果共有 304 人，最外圈有 52 人。

18. 仔细观察这一数列，若把 1 抽出，则正好成为一个等差数列：1993，1992，1991，1990……；在原数列中三个数一组出现一个 1，则 1993 个数

$1993\div3=664\cdots\cdots1$

可分为 664 组一个 1，即 665 个 1，其余数是 1993 到 666 这$664\times2=1328$个数。

所以前 1993 个数之和为：

$1\times665+(666+1993)\times1328\div2$

$=665+2659\times1328\div2$

$=665+1765576$

$=1766241$

答：前 1993 个数之和为 1766241。

19. 仔细观察图中每一层的点数，可知，从第二层起，各层的点数依次为 6，12，18，24，……，这正好形成一个公差为 6 的等差数列，第 100 层有点$[6+(99-1)\times6]=(6+98\times6)=6\times99=594$（个）

所以这个点阵共有点

$1+(6+594)\times99\div2$

$=1+600\times99\div2$

$=1+29700$

$=29701$（个）

答：这个点阵共有点 29701。

20.

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

11 12 13 14 15

16 17 18 19 20 21

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

为了研究方便，我们不妨把原表顺时针转动 45°，就成为三角阵（如图），

在三角阵中，第 1 行 1 个数，第 2 行 2 个数，……第 n 行有 n 个数，且每一行的第一个数与原表中每一行的第一个数相同。 所以第 10 行第一个数字是：

$$1+2+3+4+\cdots\ldots+9+1$$
$$=(1+9)\times 9\div 2+1$$
$$=45+1$$
$$=46$$

从原表中抽出对角线上的一排数组成的数列：1，5，13，25，41，……；这个数列后一项减去前一项所得的差数列是：

4，8，12，16，20……，显然为一等差数列。

它的第九项是$4+(9-1)\times 4=4\times 9=36$

前九项的和为：

$$(4+36)\times 9\div 2$$
$$=40\times 9\div 2$$
$$=180$$

所以原表中从右上角开始的对角线上的第 10 个数字是$180+1=181$。

第四章　倒推法的妙用

1．一个数加上 8，乘以 8，减去 8，除以 8，结果还是 8。这个数是多少？

2．一捆电线，第一次用去全长的一半多 3 米，第二次用去余下的一半少 10 米，第三次用去 15 米，最后还剩 7 米，这捆电线原有多少米？

3．有一堆桃子，第一个猴子拿走了这堆桃的一半加半个桃子，第二个猴子又拿走了剩下桃的一半加半个，第三个猴子拿走了最后剩下的桃的一半加半个，桃子正好被拿光，这堆桃子原来有几个？

4．李白买酒。无事街上走，提壶去买酒。遇店加一倍，见花喝一斗。三遇店和花，喝完壶中酒。试问壶中原有多少酒？

5．小丽把自己存的钱的一半买了一本故事书，后来妈妈又给他 0.5 元，他又用其中比一半多 4 分的钱买了连环画，结果还剩 0.72 元，问他未买故事书前共有多少钱？

6．袋子里有若干个球，小明每次拿出其中的一半再放回一个球，一共这样做了五次，袋中还有 3 个球。问：原来袋中有多少个球？

7．有一筐梨，甲取一半又 1 个，乙取余下的一半又 1 个，丙再取余下的一半又一个，这时筐里只剩下 1 个梨。这筐梨共值 4.40 元。问每个梨值多少元？

8．有一个财迷总想使自己的钱成倍增长，一天他在一座桥上碰见一个老人，老人对他说：“你只要走过这座桥再回来，你身上的钱就会增加一倍，但作为报酬，你每走一个来回要给我 32 个铜板。”财迷算了算挺合适，就同意了。他走过桥又走回来，身上的钱果然增加一倍，他很高兴的给了老人 32 个铜板。这样走完第五个来回，身上的最后 32 个铜板都给了老人，一个铜板也没剩下。财迷身上原来有多少铜板？

9. 小勇用一根长 23 米的绳子测井的深度。他在绳子的一端系一小石子，放入井底，然后把露在井外的部分折成 8 折，与自己身长作比较，结果比自己还长出 15 厘米。小勇身长 1.32 米，问井深是多少米？

10. 有砖 26 块，兄弟二人争着挑，弟弟抢在前面，刚摆好砖，哥哥赶到了。哥哥看弟弟挑得太多，就抢过一半，弟弟不服，又从哥哥那儿抢走一半，哥哥不肯，弟弟只好给哥哥 5 块，这时哥哥比弟弟多挑 2 块，问最初弟弟准备挑多少块？

11. 有一堆棋子（棋子数大于 1），把它四等分后剩下一枚，拿去三份另一枚，将剩下的棋子再四等分后还是剩一枚，再拿走三份另一枚，将剩下的棋子再四等分还是剩一枚，原来至少有多少枚棋子？

12. 有三堆苹果共 48 个，先从第一堆中拿出与第二堆相同的苹果放入第二堆，再从第二堆里拿出与第三堆个数相同的苹果并入第三堆，最后再从第三堆里拿出与这时第一堆个数相等的苹果并入第一堆。这时，三堆苹果数完全相同。原来三堆苹果各有多少个？

13．有一个三层书架共放 240 册书，先从上层取出与中层同样多册放在中层，再从中层取出与下层同样多册书放在下层，最后再从下层取出与此时上层同样多册书放在上层。经过这样的变动后，上、中、下三层书的册数之比是 1：2：3。原来上、中、下层各有多少册书？

14．甲、乙、丙三人各有铜钱若干枚，开始甲把自己的铜钱拿出来一部分分给了乙、丙，使乙、丙的铜钱数各增加了一倍；后来乙照此办理，使甲、丙的铜数各增加了一倍；最后丙也照此办理，使甲、乙的铜钱数各增加了一倍。这时三人的铜钱数都是 8 枚。问原来甲、乙、丙三人各有多少枚铜钱？

15．甲、乙、丙、丁各有棋子若干，甲先拿出自己棋子的一部分给了乙、丙，使乙、丙每人的棋子数增加一倍；然后乙也把自己的棋子的一部分以同样的方式分给了丙、丁，丙也把自己棋子的一部分以这样的方式给了甲、丁，最后丁也以这种方式将自己的棋子给了甲、乙，这时四人的旗子都是 16 枚。问原来甲、乙丙、丁四人各有棋子多少枚。

16．甲、乙、丙三人各有铜板若干，甲先拿出自己同板数的一半平分给乙、丙，然后乙也拿出自己现有铜板数的一半平分给甲、丙，最后丙又把自己现有铜板的一半分给甲、乙。这时三人的同板数恰好相同。问：他们三个人至少共有多少枚铜板。

17．小文在计算两个数相加时，把一个加数个位上的 1 错误地当作 7，把另一个加数十位上的 8 错误地当作 3，所得的和是 1946，原来两数相加的正确答案是多少？

18．有铅笔若干枝，分给甲、乙、丙三个学生。最初甲得最多，乙得较少，丙得最少。后重新分配，第一次分配，甲分给乙、丙，各给乙、丙所有数多 4 支；结果乙得最多；第二次分配，乙给甲、丙，各给甲、丙所有数多 4 支，结果丙得最多；第三次分配，丙给甲、乙，各给甲、乙所有数多 4 支。经三次重分配后，甲、乙、丙三个学生各得铅笔 44 支。最初甲、乙、丙三个学生各得铅笔多少支？

19. 某月底，甲、乙、丙三人领取了数额不同的奖金。甲把自己的一部分奖金给乙丙二人，使乙、丙两人的奖金数额各增加一倍；然后乙又拿出一部分奖金分给甲、丙两人，使甲、丙二人的奖金数额各增加一倍；接着，丙再拿出一部分奖金分给甲、乙二人，使甲、乙二人的奖金数额各增加一倍。这时三人的奖金数额都是 24 元。问甲、乙、丙三人原各领奖金多少元？

20. 三个盒子里的宝珠数不等。第一次从甲盒里拿出一些宝珠放入乙、丙盒内，使乙、丙两盒里的宝珠数增加一倍；第二次从乙盒里拿出一些宝珠放入甲、丙盒里，又使甲、丙两盒里的宝珠数增加一倍；第三次从丙盒里拿出一些宝珠放入甲、乙两盒里，又使甲、乙两盒的宝珠增加一倍。这时三个盒里都是 48 颗宝珠。最初三个盒里各有宝珠多少颗？

分析解答

1．可以从运算的结果“8”逐步倒推。这个数没除以 8 时是多少？8×8=64；这个数没减去 8 时是多少？64+8=72；这个数没乘以 8 时呢？72÷8=9；最后这个数若不加上 8 又是几呢？9—8=1；依次逆推，得出原数。

综合算式：（8×8＋8）÷8－8

＝（64＋8）×8－8

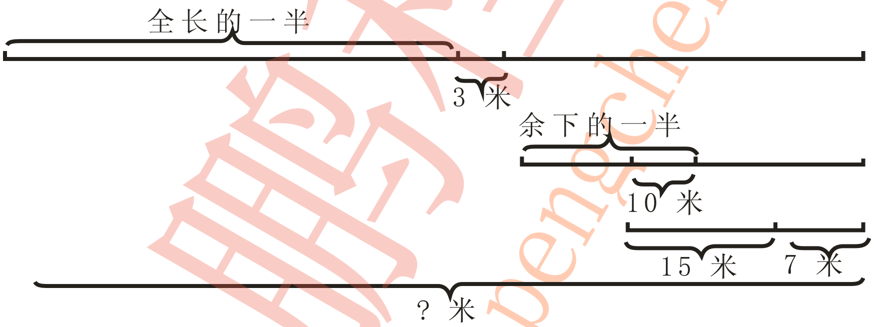
＝72÷8－8

＝9－8

＝1

答：这个数是 1。

2．结合下面的图 4-1，想一想如何用倒推法解答。



列式：[（15＋7－10）×2＋3]×2

＝（12×2＋3）×2

＝27×2

＝54（米）

答：这捆电线原有 54 米。

3．解题时用倒推法分析。第三个猴子拿走了最后剩下的一半加半个后全被拿光，这说明半个桃即最后剩下的一半，那么最后剩下的就是$\frac{1}{2}\times 2=1$个桃，则第一个猴子拿之前剩下的就是：

$$(1+\frac{1}{2})\times 2=3（个）$$

依次推出最初有桃：

$$(3+\frac{1}{2})\times 2=7(个)$$

综合算式：

$$[(1+\frac{1}{2})\times 2\times 2+\frac{1}{2}]\times 2$$

$$=(3+\frac{1}{2})\times 2$$

$$=7（个）$$

答：这堆桃子原有 7 个。

4. 根据倒推法想，喝光壶中酒→第三次见花前应有酒 1 斗→第三次遇店前应有酒$\frac{1}{2}$斗→第二次见花前应有酒$1\frac{1}{2}$斗→第二次遇店前应有酒$\frac{3}{4}$斗→第一次见花应有酒$1\frac{3}{4}$斗→第一次遇店前应有酒$\frac{1}{8}$斗。

列式：

$$[(1\div 2+1)\div 2+1]\div 2$$

$$=[1\frac{1}{2}+1]\div 2$$

$$=1\frac{3}{4}\div 2$$

$$=\frac{7}{8}(斗)$$

答：壶中应有酒$\frac{7}{8}$斗。

5. 运用倒推法进行分析。

小丽买连环画前的钱数：$(0.72+0.04)\times 2=0.76\times 2=1.52$（元）

买故事书后的钱数：$1.52-0.5=1.02$（元）

买故事书前原有钱：$1.05\times 2=2.04$（元）

综合列式：

$$[(0.72+0.04)\times 2-0.5]\times 2$$

$$=[1.52-0.5]\times 2$$

$$=2.04(元)$$

答：他未买故事书前共存 2.04 元。

6. 用倒推法。3 个球减 1 个球是第五次拿之前球数的一半，推出第五次拿之前有球（$3-1$）$\times 2=4$（个），依次类推即可。

第四次之前：（$4-1$）$\times 2=6$（个）

第三次之前：（$6-1$）$\times 2=10$（个）

第二次之前：（$10-1$）$\times 2=18$(个)

最初原有：（$18-1$）$\times 2=34$（个）

答；原来袋中有 34 个球。

7. 用到推法，可知一共有梨：

$\{[(1+1)\times 2+1]\times 2+1\}\times 2$

$=11\times 2$

$=22$(个)

每个梨值：

$440\div 22=0.2$（元）

答：每个梨值 0.20 元。

8. 第五次回来时有 32 个铜板，表明第五次走时有 16 个铜板（因为走到桥对面钱数要增加一倍），又表明第四次回来时有 48 个铜板（因为要给老人 32 个铜板，……，依次类推即可，推算过程可列表如下：

往返次数	第五次	第四次	第三次	第二次	第一次
回到老人身边时的铜板数	32	48	56	60	62
离开老人身边时的铜板数	16	24	28	30	31

答：财迷身上原有 31 个铜板。

9. 运用倒推法分析

露出井外的每一折绳长：

$1.32+0.15=1.47$（米）

露出井外的绳一共长：

$1.47\times 8=11.76$（米）

井深：$23-11.76=11.24$（米）

答：井深 11.24 米。

10. 采用倒推法求弟弟最初挑几块砖，先要用和差法求出弟弟实际挑几块砖。

因为

较小数 =（和 − 差）$\div 2$

所以弟弟最后挑砖：

$(26-2) \div 2=12$（块）

再用倒推法求最初弟弟挑几块：

$\{26-[26-(12+5)]\times 2\}\times 2$

$=16$（块）

答：弟弟最初准备挑 16 块。

11．假设某次拿过后还剩 x 枚棋子，则拿之前棋子数为$4x+1$。因为求原来至少有多少枚棋子，则设最后剩 5 枚棋子→第二次拿之前有棋子$4\times 5+1=21$，→原有棋子$4\times 21+1=85$枚。

列式为：

$(5\times 4+1)\times 4+1$

$=21\times 4+1$

$=84+1$

$=85$（枚）

答：原来至少有棋子 85 枚。

12．从后向前列表计算

变动次数	第三次后	第二次后	第一次后	初始情况
第一堆苹果数	16	8	8	22
第二堆苹果数	16	6	28	14
第三堆苹果数	16	24	12	12

答：原来第一堆有苹果 22 个，第二堆有 14 个，第三堆有 12 个。

13．经过变动后，全书架的书被平均分成$(1+2+3)=6$份，上层占 1 份，有书$(240\div 6)=40$册；中层占 2 份，有书$(240\div 6\times 2)=80$册；下层占 3 份，有书$(240-40-80)=120$册。然后列表倒推。

变动情况	第三次后	第二次后	第一次后	初始情况
上层有书册数	40	20	20	95
中层有书册数	80	80	150	75
下层有书册数	120	140	70	70

答:原来上层有书 95 册，中层有书 75 册，下层有书 70 册。

14．从后向前列表计算

变动情况	丙给以后	乙给以后	甲给以后	初始情况
甲有铜板数	8	4	2	13
乙有铜板数	8	4	14	7
丙有铜板数	8	16	8	4

答：原来甲有铜钱 13 枚，乙有铜钱 7 板，丙有铜钱 4 枚。

15．照 14 提同样分析得；甲有棋子 30 枚，乙有 17 枚，丙有 9 枚，丁有 8 枚。

16．设最后三人各有 x 枚铜板，再从后向前列表计算：

变动次数	第三次后	第二次后	第一次后	初始情况
甲的铜板数	a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{2}a$
乙的铜板数	a	$\frac{1}{2}a$	a	$\frac{7}{8}a$
丙的铜板数	a	2a	$\frac{7}{4}a$	$\frac{13}{8}a$

因为铜板数为整数，所以 a 应为 8 的倍数，且为最小的一个，所以 a 为 8，那么甲原有铜板 4 个，乙有铜板 7 个，丙有铜板 13 个。

17．把一个加数的个位上的 1 错误地当作 7，使和增加了（7－1）＝6，把另一个加数的十位上的 8 错误的当作 3，使和减少了（8－3）×10＝ 50，把错误的和减去 6 加上 50，便可以得出正确答案。

1946－（7－1）＋（8－3）×10

＝1946－6＋50

＝1990

答：原来两数相加的正确答案是 1990。

18．经三次重新分配后，甲、乙、丙三个学生各得铅笔 44 支。第三次分配是丙给甲、乙，各给甲、乙所有数多 4 支后甲、乙、丙才各有 44 支的，在第三次分配前：

甲有：[（44－4）÷2]＝20（支），

乙有：（44－4）÷2＝20（支），

丙有：44＋（44－20）×2＝92（支）。

第二次分配是乙给甲、丙，各给甲、丙所有数多 4 支，第二次分配前：

甲有：（20－4）÷2＝8（支），

丙有：（92－4）÷2＝44（支），

乙有：20＋（20－8）＋（92－44）＝80（支）。

第一次分配是甲给乙、丙，各给乙、丙所有数多 4 支，在未进行第一次分配前：

丙有：（44－4）÷2＝20（支），

乙有：（80－4）÷2＝38（支），

甲有：8＋（44－20）＋（80－38）＝74（支），

答：最初甲有铅笔 74 支，乙有 38 支，丙有 20 支。

19．可采用倒推法，再结合例举法进行分析推理。

	甲	乙	丙
最后奖金额（元）	24	24	24
前次奖金额（元）	12	12	48
再前次奖金额（元）	6	42	24
每人所领奖金额（元）	39	21	12

答：甲原领奖金额 39 元，乙原领奖金额 21 元，丙原领 12 元。

20．和前面的逆推过程相同。可列表。

答：最初甲盒里有宝珠 78 颗，乙盒有 42 颗，丙盒有 24 颗。

第五章　行程问题

1．小张从甲地到乙地，每小时步行 5 千米，小王从乙地到甲地，每小时步行 4 千米，两个人同时出发，然后在离甲、乙两地的中点 1 千米的地方相遇，求甲、乙两地间的距离。

2．兄弟二人早晨五点各推一车菜同时从家出发去集市。哥哥每分钟行 100 米，弟弟每分钟行 60 米。哥哥到达集市后用 5 分钟卸好菜，立即返回，中途接到弟弟，这时是 5 时 55 分。问集市距离他们家多少千米？

3．甲村、乙村相距 6 千米，小张与小王分别从甲、乙两村同时出发，在两村之间往返行走（到达另一个村后就马上返回）。在出发后 40 分钟两人第一次相遇，小王到达甲村后返回，在离甲村 2 千米的地方两人第二次相遇。问小张和小王的速度各是多少？

4．一列火车通过一座长 1260 米的桥梁（车头碰上桥直至车尾离开桥）用了 60 秒。火车穿越长 2010 米的隧道用了 90 秒。这列火车的车速和车身长各是多少？

5．小明坐在行驶的列车上，发现从迎面开来的货车用了 6 秒才通过他的窗口。后来又看到列车通过一座 180 米长的铁桥用了 12 秒。已知货车长 168 米，求货车每小时走多少千米？

6．两列火车相向而行，甲每小时行 36 千米，乙车每小时行 54 千米，两车错车时，甲车上一乘客发现：从乙车车头经过他的车窗时开始到乙车车尾经过他的车窗共用 16 秒，乙车的车长是多少米？

7．东、西镇相距 90 千米，甲、乙二人分别从两镇同时出发相向而行，甲比乙每小时多行 2 千米，5 小时后两人相遇，两人的速度各是多少千米？

8．甲、乙二人以均匀的速度分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，他们第一次相遇地点离 A 地 8 千米。相遇后二人继续前进，走到对方出发点后立即返回，在距 B 地 5 千米外第二次相遇，两次相遇地点之间的距离是多少千米？

9．甲乙两人同时相向而行，甲步行从 A 地到 B 地，乙骑车从 B 地到 A 地，2 小时相遇。相遇时乙比甲多行 16 千米。已知甲步行每小时走 4 千米。求两人相遇后仍用原速度继续前进，甲还要多少时间达到 B 地？乙还要多少时间到达 A 地？

10．有甲、乙、丙三人，甲每分钟走 100 米，乙每分钟走 80 米，丙每分钟走 75 米。如果甲从东村，乙、丙二人从西村同时出发，相对而行。在途中甲与乙相遇后 6 分钟，甲与丙相遇，东西两村相距多少米？

11．骑自行车从甲地到乙地，以每小时 10 千米的速度行进，下午 1 小时到；以每小时 5 千米的速度行进，上午 11 时到，如果希望中午 12 时到，应以怎样的速度行进？

12．某人要到 60 千米外的农场去，开始他以每小时 5 千米的速度步行，后来有辆时速为 18 千米的拖拉机把他送到发农场，总共用 5.5 小时，他步行了多远？

13．小英和小敏为测量飞驶而过的火车的长度和速度，她们拿了两个跑表。小英用一个表记下了火车从她面前通过所花的时间是 15 秒，小敏用另一个记下了从车头过第一根电线杆到车尾过第二根电线杆所花时间是 20 秒，已知两电线杆之间的距离是 100 米。你能帮助小英和小敏算出火车的全长和时速吗？

14．124 名少先队员排成两路纵队通过一座长 124 米的大桥，队伍行进的速度是每分钟 48 米，前后两排相距 0.8 米（人体宽度忽略不计）。队伍从首排上桥到末排离桥共需多少时间？

15．快车每秒行 18 米，慢车每秒行 10 米。现有两列火车同时同方向齐头行进，行 10 秒钟后快车超慢车；如果两列车车尾相齐行进，则 7 秒钟后快车超过慢车，求两列火车的车身长。

16．一列客车和一列货车同时从两地相向开出，经过 18 小时两车在某处相遇，已知客车每小时行 50 千米，货车每小时比客车少行 8 千米，货车每行驶 3 小时

要停驶 1 小时。两地之间的铁路长多少千米？

17．甲、乙两车相距 470 千米，一列火车于中午 1 时从甲站出发，每小时行 52 千米，另外一列火车于下午 2 时 30 分钟从乙站开出，下午 6 时两车相遇。从乙站开出的火车的速度是多少？

18．两列火车相向而行，甲车每小时行 48 千米，乙车每小时行 60 千米，两车错车时，甲车上一乘客从乙车车头经过他的车窗时开始计时，到车尾经过他的车窗共用 13 秒钟，乙车全长多少米？

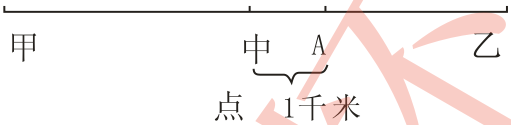
19．如图：

甲、乙、丙是三个车站，乙站到甲、丙两站的距离相等。小明和小强分别从甲、丙两站同时出发相向而行。小明过乙站 100 米后与小强相遇，然后两人又继续前进。小明走到丙站立即返回，经过乙站后 300 米又追上小强，甲、丙两站之间的距离是多少米？

20．李林骑车从甲村到乙村，同时张华由乙村步行到甲村，经过 18 分钟两人在途中相遇后，分别继续往前走。李林到乙村休息 20 分钟后，沿原路返回甲村时，张华还距甲村 280 米。已知李林的速度是张华的 3 倍。求两村之间的距离。

分析解答

1.



离中点 1 千米的地方是 A 地，从图上可以看出，小张走了两地距离的一半多 1 千米，小王走了两地距离的一半少 1 千米。从出发到相遇，小张比小王多走 2 千米。小张比小王每小时多走（$5-4$）千米，从出发到相遇所用的时间是 $2\div$（$5-4$）$=2$（小时）；所以甲、乙两地距离是：（$5+4$）$\times 2=18$（千米）

列综合算式：

（$5+4$）$\times[2\div(5-4)]$

$=9\times 2$

$=18$(千米)

答：甲、乙两地相距 18 千米。

2．可兄弟二人共走的路程是“家”到“集市”路程的两倍，即只需求兄弟二人共走了多少路。

（$60\times 55+100\times 50$）$\div 2$

$=$（$3300+5000$）$\div 2$

$=4150$（米）

$=4.15$（千米）

答：集市离他们家有 4.15 千米。

3．如图 5-1：

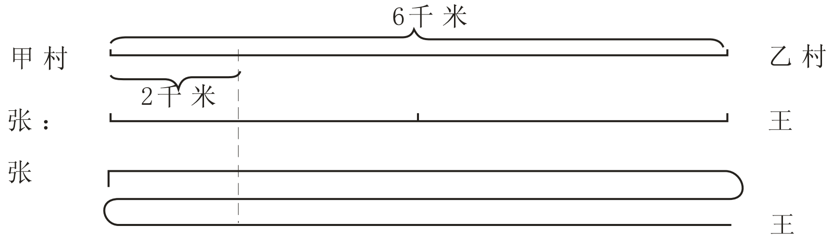


图 5-1

第一次相遇两人共同走了甲、乙两村间距离，第二次相遇两人共同走了甲、乙两村间距离的 3 倍，因此所需时间是：

$40\times3\div60=2$（小时）

从图上可以看出，从出发至第二次相遇，小张已经走了

$6\times2-2=10$（千米）

小王已走了$6+2=8$千米

因此，他们的速度分别是

小张：$10\div2=5$（千米）

小王：$8\div2=4$(千米)

答：小张的速度是 5 千米，小王的速度是 4 千米。

4．如图 5-2：

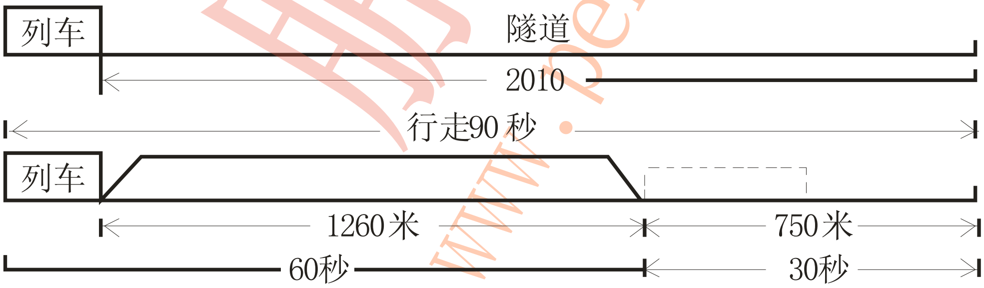


图5-2

从图上可以看出隧道比桥多 750 米，火车行走要用 30 秒，因此火车的速度是：

（$2010-1260$）$\div$（$90-60$）

$=25$（米）

列车的长度是

$25\times60-1260=240$（米）

答：火车的速度是每秒 25 米，长度是 240 米。

5．坐在列车上往窗外看货车，桥梁的关系，与列车的长度没关系。

列车的速度是（相当于人用 12 秒钟走完 180 米）$180\div12=15$（米）

列车与货车是相向而行，所以它们的速度和是：$168\div6=28$（米）

因此，货车的速度是：

$28-15=13$（米）

$13\times60\times60\div1000=46.8$（千米）

答：货车每小时行 46.8 千米。

6．甲车的运动实际上可以看作是乙车车头的运动，因此只需研究下面这个运动过程即可：从乙车车头经过甲车乘客的车窗这一时刻起，乙车车头和甲车乘客开始作反向运动 16 秒，每一秒钟甲速为$36000\div3600=10$（米），乙的速度为$54000\div3600=15$（米）。则每一秒钟，乙车头与甲车乘客之间的距离为$10+15=25$（米）。又因为甲车乘客最后看到的是乙车车尾，所以，乙车车头与甲车乘客在这段时间内所走的路程之和应恰好等于乙车车身的长度。

列式：（$10+15$）$\times16$

$=25\times16$

$=400$（米）

答：乙车的车长为 400 米。

7．

①甲乙速度和：$190\div15=18$（千米）

②利用和差问题的公式求甲速

（$18+2$）$\div2=10$（千米）

③乙速为：$18-10=8$（千米）

答：甲每小时行 10 千米，乙每小时行 8 千米。

8．看图 5-3

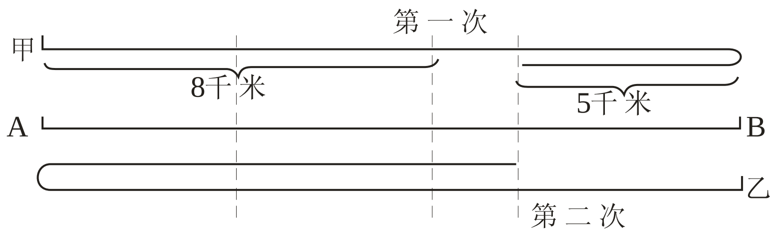


图 5-3

甲、乙两车共同走完一个 AB 全程时，甲车走了 8 千米，从图可以看出他们到第二次相遇时共走了 3 个全程。

所以 AB 间的路程是：

$8\times3-5=19$（千米）

两次相遇地点间的距离为：

$19-8-5=6$(千米)

答：两次相遇地点之间的距离是 6 千米。

9．看图 5-4

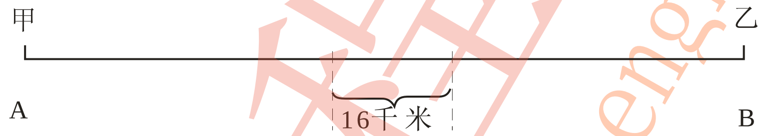


图 5-4

相遇时乙比甲多行 16 千米，那么 1 小时乙比甲多行：$16\div2=8$（千米），又因为甲每小时行 4 千米，则乙每小时行：$4+8=12$（千米）。这时乙行的千米数为：$12\times2=24$（千米）即甲应继续行进，则甲到达 B 地需$24\div4=6$（小时）同理可求出乙需时间。

综合列式：

$4+16\div2=12$（千米）

$12\times2\div4=6$（小时）

$4\times2\div12=\frac{2}{3}$(小时)

答：甲还要 6 小时到达 B 地，乙还要$\frac{2}{3}$小时到达 A 地。

10．在途中甲乙相遇后 6 分钟才与丙相遇，说明这 6 分钟内甲丙两人所走路程之和即为乙丙在甲乙相遇时的路程差，又知乙、丙速，可求出相遇时间，从而求距

离。

$$(100+75)\times 6\div(80-75)$$
$$=175\times 6\div 5$$
$$=35\times 6$$
$$=210（分）$$

$$(100+80)\times 210$$
$$=180\times 210$$
$$=37800（米）$$

答：东西两村相距 37800 米。

11．每小时快$15-10=5$（千米）可提前 2 小时到达，即从出发到上午 11 小时一共快出$10\times 2=20$（千米），那么快出 20 千米需要$20\div 5=4$（小时），说明以每小时 15 千米的速度 4 小时行完全程，全称为$15\times 4=60$（千米）。若中午 12 时到达，即行完全程需 5 小时，则时速为$60\div 5=12$（千米）。

列式为: $15-10=5$（千米）

$10\times 2=20$（千米）

$20\div 5=4$（小时）

$15\times 4=60$（千米）

$$60\div(12-11+4)$$
$$=60\div 5$$
$$=12（千米）$$

答：应以每小时 12 千米的速度前进。

12．假设在这 5.5 小时内，他全是步行，则行了$5\times 5.5=27.5$（千米），比实际少行了$60-27.5=32.5$(千米)。步行一小时比拖拉机少行$18-5=13$(千米)，所以几小时少行 32.5 千米呢？$32.5\div 13=2.5$（小时）即他步行了$5.5-2.5=3$（小时）

列式：

$$5.5-(60-5\times 5.5)\div(18-5)$$
$$=5.5-2.5$$
$$=3（小时）$$（解法不唯一）

$5\times 3=15$（千米）。

答：他步行了 15 千米。

13．根据题意可画出如下一示意图 5-5.

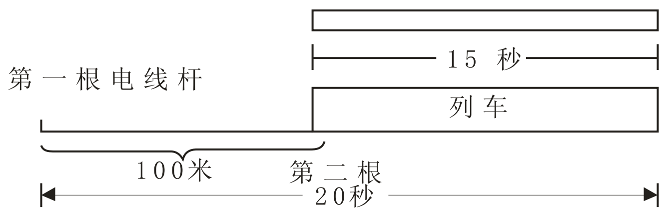


图 5-5

火车走 100 米所用时间：

$20-15=5$（秒）

火车每秒行了：$100\div5=20$（米）；每小时行：$20\times3600=72000$（米）$=72$（千米）；车身长：$20\times15=300$（米）

答：车身长 300 米，时速 72 千米。

14．①队伍全长多少米？

$0.8\times（124\div2-1）=0.8\times61=48.8$（米）

②所需时间：

$（124+48.8）\div48$

$=172.8\div48$

$=3.6$（分钟）

答：队伍从首排上桥到末排离桥共需 3.6 分钟。

15．当两列火车同时同方向齐头行进，快车超过慢车时，多行的路程相当于一个快车车身长；而当车尾相齐行进时，超过的是一个慢车车身长。

所以快车车身长：

$（18-10）\times10=80$（米）

慢车车身长：

$（18-10）\times7=56$（米）

答：快车车身长 80 米，慢车车身长 56 米。

16. 因为货车每行驶 3 小时要停驶 1 小时，所以相当于客车行驶了 16 小时的时候，货车只行了 12 小时，两车相遇时，货车行了 14 小时。所以两地之间长：

$50\times18+（50-8）\times14$

$=900+42\times14$

$= 900 + 588$

$= 1488$（千米）

答：两地之间的铁路长 1488 千米。

17．列式为：

$[470 - 52 \times (6-1)] \div (6-2.5)$

$= [470 - 260] \div 3.5$

$= 210 \div 3.5$

$= 60$(千米)

答：从乙站开出的火车的速度是 60 千米。

18．先统一单位，甲每秒行（$48 \times 1000 \div 3600$）$= 13\frac{1}{3}$米，乙每秒行（$60 \times 1000 \div 3600$）$= 16\frac{2}{3}$米。

所以乙车全长：

$(13\frac{1}{3} + 16\frac{2}{3}) \times 13$

$= 30 \times 13$

$= 390$（米）

答：乙火车全长 390 米。

19．通过排列小明、小强行走的路程，可以便于观察已知条件与所求之间的数量关系。

解：设甲、乙站之间的距离为 s 米。

小明与小强相遇，小明走（$s + 100$米），小强走（$s - 100$）米。

小明追上小强，小明走（$3s + 300$）$= 3(s + 100)$米，小强走（$s + 300$）米。

在相同时间里，小明追上小强所走的路程是相遇时所走路程的 3 倍，那么小强所走距离也是相遇时所走的 3 倍，所以：

$3(s - 100) = s + 300$

$S = 300$

所以：$300 \times 2 = 600$（米）

答：甲丙两站间的距离为 600 米。

20．通过读题可知李林的速度是张华速度的 3 倍，即走同一段路程，张华用的时间是李林的 3 倍，李林用的时间是张华的$\frac{1}{3}$。在他们相遇后，张华需用$18 \times 3 = 54$

（分钟）才能到达甲村，李林用$18 \div 3 = 6$（分钟）就可到达乙村。李林到达乙村后休息了 20 分钟，这时张华一直在走，并且走了$6 + 20 = 26$（分钟），还差 54−26=28（分钟）到达甲地，从题中又知张华距甲地还有 280 米，所以张华每分钟走$280 \div 28 = 10$(米)。张华走完全程需 54+18=72（分钟），所以两村之间距离为：

$10 \times 72 = 720$（米）

答：两村之间距离为 720 米。

第六章　几何中的计数问题

1．数一数图 6-1 中有几条线段？

图 6-1

2．数一数，图 6-2 中共有几条线段？

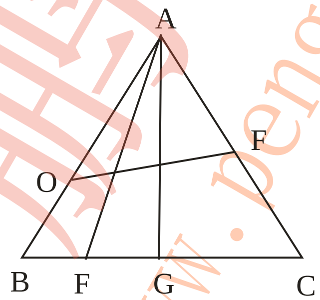


图 6-2

3．数一数，图 6-3 中有多少个锐角？

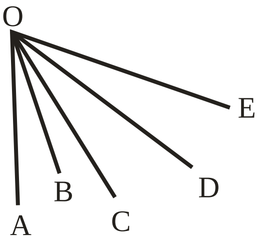


图 6-3

4．数一数，图 6-4 中共有几个锐角？

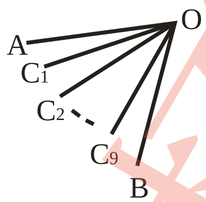


图 6-4

5．数一数，图 6-5 中共有多少个三角形？

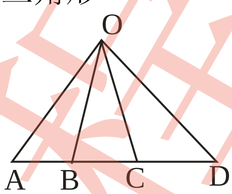


图 6-5

6．图 6-6 中共有多少个三角形？

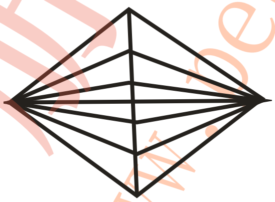


图 6-6

7．图 6-7 中有多少个长方形？

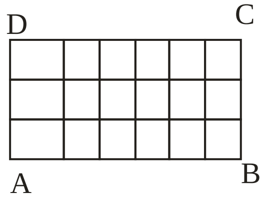


图 6-7

8．数一数，图 6-8 中平行四边形的个数。

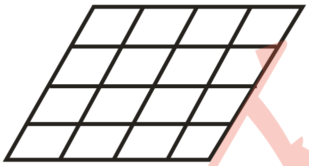


图 6-8

9．图 6-9 中有多少个正方形？

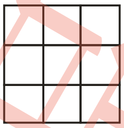


图 6-9

10．图 6-10 中有多少个正方形？

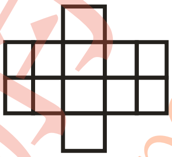


图 6-10

11．图 6-11 中有多少个正方形？

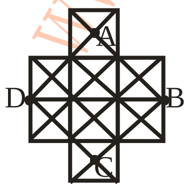


图 6-11

12．数一数图 6-12 中有多少条线段？有多少个三角形？

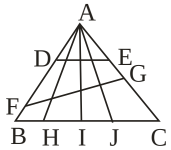


图 6-12

13．数一数图 6-13 中有多少条线段,有多少个三角形？

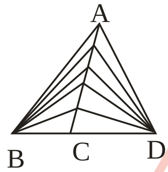


图 6-13

14．用 20 个铁钉按图 6-14 钉成相邻的横、竖两排距离都相等的 4×5 矩形钉阵，现在给你许多皮筋，以这些钉为顶点，你能得出多少个正方形来？

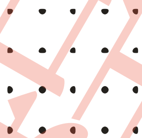


图 6-14

15．数一数，图 6-15 中有三角形多少个？

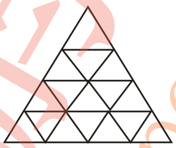


图 6-15

16．数一数，图 6-16 中有多少个三角形？

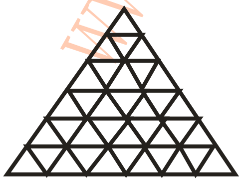


图 6-16

17．数一数图 6-17 中有多少个三角形？

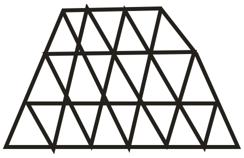


图 6-17

18．图 6-18 中有多少个长方形？

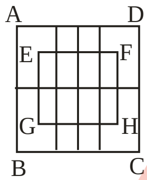


图 6-18

19．图 6-19 中有多少个三角形？

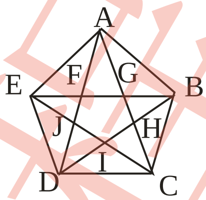


图 6-19

20．数一数图 6-20 中有多少个三角形？

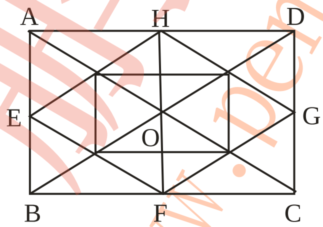


图 6-20

分析解答

1．想要使数出的每一个图形中线段的总条数，不重复，不遗漏，就需要按照一定的顺序，按照一定的规律去观察，去数。这样才不至于杂乱无章，毫无头绪。

解法一：按照端点顺序去数，线段最左边的端点是 A，以 A 为端点的线段有 AB、AC、AD、AE 四条，以 B 为左端点的有 BC、BD、BE 三条，同理以 C 为左端点的有 2 条，以 D 为左端点的有 1 条，所以共有线段：

$4+3+2+1=10$（条）

解法二：图 6-1 中有 A、B、C、D、E 五个点，这五个点把线段分割成 AB、BC、CD、DE 四条小基本线段，然后由任意相邻的两条小线段连接起来又组成三条线段；AC、BD、CE；同理由三条组成的有两条，AD、BE，由四条组成的

有 1 条 AE，所以图中共有线段：

$4+3+2+1=10$(条)

通过上面的分析结果得，如果某条线段上共有 n 个点（包括两个端点），那么这 n 个点将线段分成（$n-1$）条小线段，这（$n-1$）条小线段中，任意相邻两条小线段可组成一条新线段，共有（$n-2$）条。另外，这（$n-1$）条小线段中，任意相邻的三条小线段也可再成一条新线段，这样的新线段共有（$n-3$）条；任意相邻四条小线段组成的新线段，共有（$n-4$）条，……最后（$n-1$）条小线段组成 1 条形线段。故此时共有线段条数为：

$$（n-1）+(n-2)+\cdots\ldots+2+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}(条)$$

即线段的总条数为从 1 开始的（$n-1$）个连续自然数的和。

2．先把图 6-2 化整为零的分为几部分来数。

先看线段 BC 上共有线段：因为共有四个点，所以有：$3+2+1=6$（条），同理 OE 上也有 6 条。

再看 AB 上有 3 个点，所以有线段$2+1=3$（条）；AF、AG、AC 上各有 3 条线段。

所以图中一共有线段：

$6\times2+3\times4=24$（条）

3．和数线段的方法一样。

解法一：以 OA 为一条边的角有∠AOB，∠AOC，∠AOD，∠AOE 共 4 个，以 OB 为一条边的角有∠BOC，∠BOD，∠BOE 共 3 个，同理以 OC 为边的角有 2 个，以 OD 为边的角有一个，所以图中共有角：$4+3+2+1=10$（个）

解法二：图 6-3 中有基本角∠AOB，∠BOC，∠COD，∠DOE 共四个，由相邻两个基本角组成的有三个，由相邻三个基本角组成的有两个，由相邻四个基本角组成的有一个，所以图中一共有角：

$4+3+2+1+=10$（个）

由上可得，数角的规律与数线段相同，从一点引出 n 条射线，

则图中角的个数有：

$$（n-1）+（n-2）+\cdots\ldots+2+1$$

$=\frac{n(n-1)}{2}$(个)

4．因为∠AOB 内角分线OC_1，OC_2……OC_9共有 9 条，再加 OA、OB 两条一共 11 条，所以共有角：

$10+9+8+\cdots\ldots+2+1$

$=55$（个）

答：共有角 55 个。

5．图中的三角形有下面的特点，所有三角形有一个公共点，所有的三角形的底边都在同一条直线上。图 6-5 中三角形的个数与底边线段一样多，即图中共有三角形：$3+2+1=6$（个）

这说明前边的公式也可用来数三角形的个数。

6．将图 6-6 旋转一下，变成图 6-6

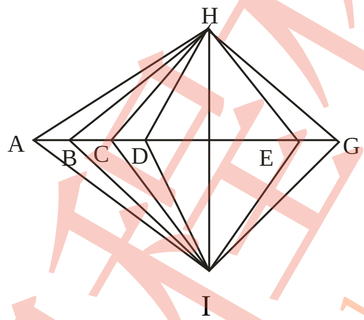


图 6-6

AG 线段将整个图形分成上、下两部分，利用前面的公式马上可求出上下两部分中三角形的个数都是：

$1+2+3+4+5+6=21$（个）

仔细观察便可发现，除了上面的那 42 个三角形，图中还有下面一些三角形不包含在这 42 个三角形之中，它们是：三角形 AHI，BHI，CHI，DHI，EHI，GHI，共 6 个三角形。

图中三角形的总个数为：

$(1+2+3+4+5+6)\times 2+6$

$=42+6$

$=48$（个）

答：图中共有三角形 48 个。

7．这个问题和线段问题有十分密切的关系。由前面的公式知道，AB 边上共有：

（1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6）条线段。AD 上共有：（1 + 2 + 3）条线段。把 AB 上 的每一条线段作为长，AD 上的每一条线段作为宽，每个长配一个宽，就组成一个长方形（包括正方形），所以图 6-7 中长方形的个数为：

（1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6）×（3 + 2 + 1）

= 126（个）

一般情况下，如果有类似于图 6-7 的任一长方形，一边上有（n + 1）个点，一边上有（m + 1）个点（相邻两点间的距离可以相等，也可以不等），过这些点分别作对边的平行线，且与另外一边相交。这些平行线将长方形分为许多长方形，此时图中长方形的总数为：（1 + 2 + ⋯ ... + n）×（1 + 2 + ⋯ ... + m）

这就是形如图 6-8 中长方形总个数的公式。

8．图 6-8 中共有平行四边形：

（1 + 2 + 3 + 4）×（1 + 2 + 3 + 4）

= 10 × 10

= 100（个）

答：图中有 100 个平行四边形。

9．为说明方便，我们假定每个小方格的边长为 1 个长度单位。图 6-9 中大正方形边长为 3 个长度单位，其中边长为 1 个长度单位的正方形有 $3 \times 3 = 9$（个）；边长为 2 个长度单位的有 $2 \times 2 = 4$（个）；边长为 3 个长度单位的正方形有 $1 \times 1 = 1$（个），所以，正方形的总数为：

$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14$（个）。

一般地，如果类似图 6-9 中大正方形的边长为 n 个长度单位，那么其中边长为 1 个长度单位的正方形有 $n \times n = n^2$（个）；边长为 2 个长度单位的正方形有（n − 1）×（n − 1）$= (n-1)^2$（个）；……；边长为 3 个长度单位的正方形有 $(n-2)^2$ 个；边长为（n − 1）个长度单位的正方形有 $1 \times 1 = 1^2$（个）。所以，如果类似图 6-9 的大正方形，各边上都有 n 个相等的小格，那么图中正方形的总数为：

（$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots ... + n^2$）个。

10．像这样的图我们可以按照下面的方法来数。图中基本的小正方形有 8 个，包括 4 个基本小正方形的正方形有 2 个，所以图中一共有 $8 + 2 = 10$（个）正方形。

11．仔细观察图，可以从图 6-11 中抽出一个图 ABCD，这样剩余部分为 10 个。

图 ABCD 中有正方形：$1^2+2^2+3^2=1+4+9=14$（个），所以图 6-11 中一共有正方形：$14+10=24$（个）。

12. 图 6-12 中的线段可分为两部分：

FG，DE，BC 上各有 5 个点，所以每一边上都有$1+2+3+4=10$（条）线段。

AB，AH，AI，AJ，AC 上各有 4 个点，所以每条边上有$1+2+3=6$条线段。

所以图 6-14 中一共有线段：

$10\times3+6\times5=30+30=60$（个）。

在图 6-14 中一共有三角形：

$10\times3=30$（个）。

13.

①数线段可分为几部分：

由 B 点出发的线段有 5 条，同理由 D 点出发的有 5 条。BD 上有$1+2=3$(条)；AC 上有 6 个点，所以有线段：1+2+3+4+5=15（条），所以图 6-14 中共有线段$5\times2+3+15=28$（条）。

②因为 AC 上有 15 条线段，所以以 B、D 为顶点的三角形分别有 15 个。另外以 BD 为底边的三角形有 5 个。所以图中一共有三角形：

$15\times2+5=35$（个）。

14. 此题与上面数正方形个数有些相似。当我们假定两排钉之间的距离为“1”时，用皮筋去套这 20 个钉，首先可以得到图 6-21 那样的图形。在图 6-21 中边长为“1”的正方形有 4×3=12(个)；边长为“2”的正方形有：$3\times2=6$（个）；边长为“3”的正方形有 2 个。

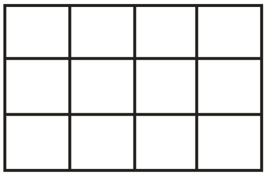


图6-21

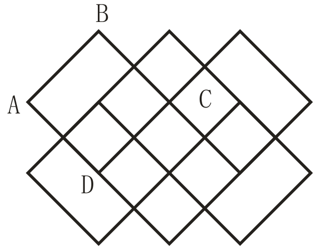


图6-22

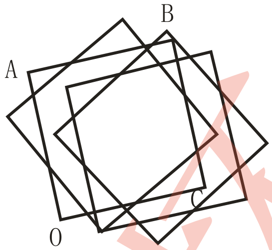


图6-23

除了上面那些正方形外，还有其他的正方形。如果把图 6-21 中某些小正方形相对顶点上的钉用皮筋连起，使得到图 6-22，在图 6-22 中，因为 AB、BC、CD、DA 都是边长为"1"的正方形的对角线，所以$AB = BC = CD = DA$。而角 A、B、C、D 都正好是两个 45°角的和，故它们都等于 90°，这样一来四边形 ABCD 也是正方形。图 6-22 中和 ABCD 一样的正方形有：$3 \times 2 = 6$（个）。

另外把某些相邻两个正方形拼成的长方形相对顶点上的钉也用皮筋接起来，便得到图 6-23。在图 6-23 中，因为 AB、BC、CD、DA 都是相同长方形的对角线，所以$AB = BC = CD = DA$。通过图形的拼补可以算出角 A、B、C、D 都是 90°，因此四边形 ABCD 也是正方形。图 6-23 中和 ABCD 一样的正方形有$2 \times 2 = 4$（个）

所以图中共可套出正方形：

$4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2$

$= 30$（个）。

15. 这样的图形只能分类数，从边长为一条基本线段的最小三角形开始。

（1）以一条基本线段为边的三角形：

①尖朝上的三角形共有四层，它们的总数为：

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$（个）

②尖朝下的三角形共有三层，它们的总数为：

$1+2+3=6$（个）

（2） 以两条基本线段为边的三角形：

①尖朝上的共有：$1+2+3=6$（个）

②尖朝下的三角形只有 1 个。

（3）以三条基本线段为边的三角形：

①尖朝上的有：$1+2=3$（个）

②尖朝下的有零个。

（4）以四条基本线段为边的三角形只有 1 个。

所以三角形的总数为：

$10+6+6+1+3+1=27$（个）。

16. 和上题的数法相同，图中有三角形 78 个。

17. 参考 15 题的规律把图中三角形分为尖朝上和尖朝下的两类。

尖朝下的有：$14+6+1=21$（个）。

尖朝上的有：$16+12+7+3=38$（个）。

所以图中一共有三角形：

$21+38=59$（个）。

18. 把图 6-18 分为三部分来数。

①去掉长方形 EFGH 后图中有长方形：$(1+2+3+4)\times(1+2)=10\times3=30$（个）。

②去掉长方形 ABCD 后图中长方形的个数也为 30 个。

③两部分共同构成的长方形有 12 个。

所以图中一共有长方形：

$30+30+12=72$（个）。

19. 用分类计算的方法。

按照图中三角形的形状与大小进行分类。

和三角形 AFG 一样的三角形还有 4 个。他们分别是三角形 BGH、CHI、IDJ、JEF。这类三角形共 5 个。

和三角形 ABG 一样的三角形还有 4 个，他们是三角形 BHC、CID、DJE、EFA。这一类三角形共 5 个。

和三角形 ABF 一样的三角形还有 9 个，它们是三角形 ABH，BGC，CBI，CHD， DCJ，DIE，EFD，EJA，AEG，这一类三角形共 10 个。

和三角形 ABE 一样的三角形还有 4 个，它们是三角形 ABC，BCD，CDE，DEA，共 5 个。

和三角形 ACD 一样的三角形还有 4 个，它们是三角形 BDE，CAE，DBA，ECB。这一类三角形共 5 个。

和三角形 ADH 一样的三角形还有 4 个，它们是三角形 IBE，CGE，DBA，AGJ。这一类三角形共 5 个。

所以图中一共有三角形：

$5+5+10+5+5+5+$

$=35$（个）。

20．这是一个对称图形，我们可以按如下顺序来数：

第一步：大矩形 ABCD 可分为四个相同的小矩形：AEOH，EBFO，OFCG，HOGD，每个小矩形内所包含的三角形个数相同。

第二步：每两个小矩形组合成的图形共有四个，如：ABFH，EBCG，HFCD，GDAE，每一个这样的图形中所含的三角形个数相同。

第三步：分三个小矩形占据的部分图形共四个：如ΔABD，ΔADC，ΔABC，ΔDBC，每一个这样的图形中所包含的三角形个数是相同的。

最后把每个图形所包含三角形个数求出相加再乘以 4 就是整个图形中所包含的三角形个数。

所以在图 6-25 中含三角形：

$12\times4+3\times4+1\times4$

$=48+12+4$

$=64$（个）。

第七章　填横式

1．把 1～9 这九个数字填入□中，使每个算式都成立。

$$\begin{cases}\square+\square=\square\\ \boxed{8}\boxed{4}\times\square=\square\square\square\end{cases}$$

2．将 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个不同的数字分别填入九个圆圈中，使三个算式都成立。

$$\begin{cases}\bigcirc+\bigcirc=\bigcirc\\ \bigcirc-\bigcirc=\bigcirc\\ \bigcirc\times\bigcirc=\bigcirc\end{cases}$$

3．把 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 十个数字分别填入□中，使每个算式都成立。

$$\begin{cases}\square+\square=\square\\ \square-\square=\square\\ \square\times\square=\square\square\end{cases}$$

4．将 1～9 九个数字填入□中，使等式成立。

$$\begin{cases}\square+\square-\square=\square\\ \square\times\square\div\square=\boxed{1}\boxed{6}\end{cases}$$

5．在下面这组算式的九个圆圈里，填入从 1 到 9 九个数字，使等式成立。

$$\begin{cases} \bigcirc + \bigcirc = \bigcirc \\ \dfrac{16 \times \bigcirc}{7 - \bigcirc} = \bigcirc \end{cases}$$

6．将 1～9 个数子填入□中，使等式成立。

□×□－□＝96÷□□＋□＝□

7．将 1～9 九个自然数分别填入下面的□中，使每个等式都成立。

$$\begin{cases} \square + \square = \square \\ 16 \times \square \div (\square - \square) = \square \end{cases}$$

8．把 1～9 九个数字填入下面九个方框中，使等式成立。

□×□＝□□□÷5□＝□□

9．把 1～9 九个数字填入九个□中，使等式成立。

□□□×□□＝□□×□□＝5568

10．把 1～9 这九个数字分别填入□中，使等式成立。

$$\begin{cases}\square+\square=\square\\ \square\times\square=\boxed{7}\boxed{2}-\square\square\end{cases}$$

11．把 1～9 这九个数字分别填入下面的□中，使每个算式都成立。

$$\begin{cases}\square\square\div\square-\square=\square\\ \square\times\square+\square=\square\end{cases}$$

12．把 2～9 这八个数字分别填入下面几个□中，使等式成立。

$$\begin{cases}\square+\square-\square=\square\\ \square\times\square=\square\square\end{cases}$$

13．把 1～9 九个数字填入下面的圆圈中，使等式成立。

$$\begin{cases}①②+\bigcirc-\bigcirc=\bigcirc\\ \bigcirc\times\bigcirc=⑤\bigcirc\end{cases}$$

14．把 1～9 九个数字填入下面的九个□中，使每个等式都成立。

$$\begin{cases}\square\times\square=\square\square\\ \square\square+\square=\square+\square\end{cases}$$

15．把 1～9 九个数字分别填入下面的□中，使每个等式成立。

$$\begin{cases}\square+\square-\square=\square\\ \square\times\square\div\square=\square\square\end{cases}$$

16．把 175 分成四个数的和，然后把这四个数分别填入下面连等式的□内，使连等式成立。

$$\square+4=\square-4=\square\times 4=\square\div 4$$

17．把 1～8 填入下面八个□中，使每个算式都成立。

$$\begin{cases}\square\times\square=\square\square\\ \square\square-\square\times\square=9\end{cases}$$

18．把 1～9 这九个数字填入下面的□中，使算式成立。

$$\begin{cases}\square\times\square=5\square\\ \square\times\square\div\square=\square\square\end{cases}$$

19．香、港、回、归四个汉子分别代表四个一位数偶数，请你把下面的四个算式翻译出来：

$\boxed{香}-\boxed{港}\div\boxed{回}+\boxed{归}=9$

$\boxed{香}-\boxed{港}\div\boxed{回}-\boxed{归}=1$

$\boxed{归}-\boxed{港}\div\boxed{回}+\boxed{香}=9$

$\boxed{归}-(\boxed{香}-\boxed{港})\div\boxed{回}=3$

20．把 0～9 这十个数字分别填入下面的□中，每个数字只能用一次，使等式都成立。

$$\begin{cases} \square\div2+3=6 & ① \\ 5\times(\square-8)=5 & ② \\ 27-\square\times\square=3 & ③ \\ (\square+2)\div6=\square & ④ \\ 2\times\square+\square=10 & ⑤ \\ 2\times(\square-\square)=10 & ⑥ \end{cases}$$

分析解答

1. 首先我们从乘法算式入手考虑。因为 84 是偶数，偶数与任何数相乘均得偶数，所以积的个位必须为 2 或 6。

如果积的个位为 2，只有$84\times 3=252$这一种可能，但出现重复数字，所以这种可能不存在。

积的个位只能为 6，则有：$84\times 9=756$。剩下 1、2、3 三个数字，不难看到$1+2=3$，所以本题的答案是：

$$\begin{cases}\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}\\ \boxed{8}\boxed{4}\times\boxed{9}=\boxed{7}\boxed{5}\boxed{6}\end{cases}$$

2. 从乘法算式入手考虑。因为一位数与一位数相乘积仍然是一位数，在不考虑乘数顺序时，只有$2\times 4=8$和$2\times 3=6$两种可能。

由于两个奇数的和或差都是偶数，一奇一偶的和或差都是偶数，因此，在前两个算式中，只能含有偶数个奇数。而 1～9 九个数字中，有四个偶数、五个奇数，所以第三个算式应含有 1 个或 3 个奇数，但第三个算式含有 3 个奇数的可能不存在，所以第三个算式必然只含有一个奇数，所以第三个算式只能是$2\times 3=6$。

剩下的 1，4，5，7，8，9 六个数字组成第一个算式的可能情况有：$1+4=5$，$1+8=9$，$1+7=8$，$4+5=9$，但经试填可知$1+4=5$ 和 $1+8=9$的条件下无法组成第二个算式，故舍去。

因此，满足题目要求的解有：

$$\begin{cases}1+7=8\\ 9-5=4\\ 2\times 3=6\end{cases}\qquad\begin{cases}1+7=8\\ 9-4=5\\ 2\times 3=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}4+5=9\\ 8-1=7\\ 2\times 3=6\end{cases}\qquad\begin{cases}4+5=9\\ 8-7=1\\ 2\times 3=6\end{cases}$$

3. 首先考虑数字 0，0 不可能填入第一个算式和第二个算式中，所以 0 只能出现在第三个算式中，0 又不能做乘数或被除数，因此只能在积中出现，所以 0 只能做积的个位。

因此，要使两个一位数相乘积为整十数，只有四种情况：$2\times5=10$，$4\times\ 5=20$，$6\times5=30$，$8\times5=40$。但由于两个奇数的和与差都是偶数，一奇一偶的和与差都是奇数，因此前两个算式必有偶数个奇数，一奇一偶的和与差都是奇数，因此前两个算式必有偶数个奇数，偶数个偶数。而 0~9 这十个数字中含奇数和偶数各 5 个，因此第三个算式中的四个数字只能是一奇三偶或三奇一偶。因此只有$4\times5=20$和$8\times5=40$两种可能。

经试填发现$8\times5=40$这种情况下无法填出第一、二个算式，故舍去。因此第三个算式只能是$4\times5=20$。

剩下 1，3，6，7，8，9 六个数字可找到本题的解是：

$$\begin{cases}\boxed{1}+\boxed{7}=\boxed{8}\\ \boxed{9}-\boxed{3}=\boxed{6}\\ \boxed{4}\times\boxed{5}=\boxed{2}\boxed{0}\end{cases}\qquad\begin{cases}\boxed{1}+\boxed{7}=\boxed{8}\\ \boxed{9}-\boxed{6}=\boxed{3}\\ \boxed{4}\times\boxed{5}=\boxed{2}\boxed{0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{3}+\boxed{6}=\boxed{9}\\ \boxed{8}-\boxed{7}=\boxed{1}\\ \boxed{4}\times\boxed{5}=\boxed{2}\boxed{0}\end{cases}\qquad\begin{cases}\boxed{3}+\boxed{6}=\boxed{9}\\ \boxed{8}-\boxed{1}=\boxed{7}\\ \boxed{4}\times\boxed{5}=\boxed{2}\boxed{0}\end{cases}$$

4. 为方便叙述，我们将空格中填上字母如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}+\boxed{B}-\boxed{C}=\boxed{D} & ①\\ \boxed{E}\times\boxed{F}\div\boxed{G}=\boxed{1}\boxed{6} & ②\end{cases}$$

首先我们从②式入手考虑。因为$E\times F\div G=16$，所以$16\times G=E\times F$。因此有$16\times2=4\times8$，$16\times3=6\times8$，$16\times4=8\times8$三种可能，但后两种出现数字重复，因此 G=2，E、F 取 4 和 8。所以②式为：$4\times8\div2=16$。

剩下 3，5，7，9 四个数字，很容易找到：$3+9-5=7$，$3+9-7=5$，$5+7-3=9$，$5+7-9=3$。因此本题有以下几个解：

$$\begin{cases}\boxed{3}+\boxed{9}-\boxed{5}=\boxed{7}\\ \boxed{4}\times\boxed{8}\div\boxed{2}=\boxed{1}\,\boxed{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}\boxed{3}+\boxed{9}-\boxed{7}=\boxed{5}\\ \boxed{4}\times\boxed{8}\div\boxed{2}=\boxed{1}\,\boxed{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{5}+\boxed{7}-\boxed{3}=\boxed{9}\\ \boxed{4}\times\boxed{8}\div\boxed{2}=\boxed{1}\,\boxed{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}\boxed{5}+\boxed{7}-\boxed{9}=\boxed{3}\\ \boxed{4}\times\boxed{8}\div\boxed{2}=\boxed{1}\,\boxed{6}\end{cases}$$

5. 因为在 1 到 9 九个数中已用到 1，6，7，因此剩下的数字为 2，3，4，5，8，9。而这六个数字满足第一个加法算式的情况只有两种即：$2+3=5$ 和 $4+5=9$

如果第一个算式为$2+3=5$，则剩下 4，8，9 三个数位，无论怎么填也不能使第二个算式成立，所以第一个算式为$2+3=5$不成立。

因此，第一个算式只能是：$4+5=9$，剩下的 2，3，8 填入第二个算式有：

$$\frac{16\times 2}{7-3}=8$$

因此，本题的解是：

$$\begin{cases}④+⑤=⑨\\ \dfrac{①⑥\times②}{⑦-③}=⑧\end{cases}$$

6. 从除法算式入手考虑，要使 96 能被一个两位数整除，商又要为一位数。除去有重复数字出现的情况，只有一下三种可能：

$96\div 48$，$98\div 32$，$96\div 12$。

若取$96\div 12$，则出现$96\div 12+1=9$但有重复数字出现，故舍去。

若取$96\div 32$，剩下的数字有 1，4，5，7，8。经试填无法使等式成立，所以也舍去。

因此只能取$96\div 48$，剩下的数字有：1，2，3，5，7。则有$96\div 48+1=3$，$96\div 48+3=5$，$96\div 49+5=7$三种可能。

若取$96\div 48+1=3$，则剩 2，5，7 必须满足□×□－□=3，则有$2\times 5-7=3$成立。

若取$96\div 48+3=5$，剩下 1，2，7 必须满足$□\times□-□=5$，则有$7\times 1-2=5$ 成立。

若取$96\div 48+5=7$，剩下 1、2、3，必须满足$□\times□-□=7$，无法填出。故这种情况下不成立。

所以本题的解有：

$2\times5-7=96\div48+1=3$

$7\times1-2=96\div48+3=5$

7. 首先将空格填入字母表示如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}+\boxed{B}=\boxed{C} & ①\\ \boxed{1}\boxed{6}\times\boxed{D}\div\boxed{E}-\boxed{F}=\boxed{G} & ②\end{cases}$$

由②式知 E−F 必为一位数，所以 D 只能取 2，3，4。

若$D=4$，$16\times4=64$，E、F、G 无论怎样填都会有矛盾出现。因此$D=4$ 不成立。

若$D=3$，$16\times3=48$，则 G 只能为 8，E 减 F 可能为 9−3，8−2，7−1，但都出现重复数字，因为$D=3$也不成立。

只有D =2 成立，则有$16\times2=32$，因此 G 只能等于 4 或 8。

①若$G=4$，有$16\times2\div$（$9-1$）$=4$，但有重复数字，故舍去。

②$G=8$，则有：$16\times2\div$（$7-3$）$=8$ 及 $16\times2\div$（$9-5$）$=8$

当取②式为：$16\times2\div$（$7-3$）$=8$时，剩下 4，5，9，可填出满足①式的$4+5=9$。所以这种方法成立。

当取②式为：$16\times2\div$（$9-5$）$=8$时，剩 3、4、7，可填出满足①式的$3+4=7$，所以这种方法成立。

因此本题的解有：

$$\begin{cases}4+5=9\\16\times2\div(7-3)=8\end{cases}$$

$$\begin{cases}3+4=7\\16\times2\div(9-5)=8\end{cases}$$

8. 从除去算式入手考虑，由于三位数除以两位数，商为两位数，说明被除数最高位一定比 5 大，因为最高位最大不过 9，所以商的最高位必定为 1。

又由于两个一位数的积与商相等，所以两个一位数的积为十几的数，则可能出现的情况有：2×7，2×8，2×9，3×4，3×6。

① 若取$2\times7=14$，则剩数字 3，6，8，9，必须满足$14\times5\square=\square\square\square$，经试均有重复数字出现。因此取$2\times7=14$不成立。

②取$2\times8=16$，则剩数字 3，4，7，9，必须满足$16\times5\square=\square\square\square$，经

试也均不成立。

③取$2 \times 9 = 18$，则剩 3，4，6，7，必须满足$18 \times 5\square = \square\square\square$，经试也均不能成立。

④取$3 \times 4 = 12$，剩 6，7，8，9，必须满足$12 \times 5\square = \square\square\square$，经试也均不能成立。

⑤取$3 \times 6 = 18$，则剩数字 2，4，7，9，必须满足$18 \times 5\square = \square\square\square$，经试有：$18 \times 54 = 972$.

因此本题的解为：

$\boxed{3}\times\boxed{6}=\boxed{9}\boxed{7}\boxed{2}\div 5\,\boxed{4}=\boxed{1}\boxed{8}$

9. 先将 5568 进行分解质因数

$$\begin{array}{r|l}
2 & 5568 \\ \hline
2 & 2784 \\ \hline
2 & 1392 \\ \hline
2 & 696 \\ \hline
2 & 348 \\ \hline
2 & 174 \\ \hline
2 & 58 \\ \hline
 & 29
\end{array}$$

$5568 = 29 \times 2^6 \times 3$

根据这些因数，我们可以组成一些乘积为 5568 的算式：

$5568 = 29 \times 192$ ①

$5568 = 58 \times 2^5 \times 3 = 58 \times 96$ ②

$5568 = 174 \times 2^5 = 174 \times 32$ ③

$5568 = 116 \times 48$ ④

$5568 = 232 \times 24$ ⑤

$5568 = 348 \times 16$ ⑥

$5568 = 464 \times 12$ ⑦

根据这七个算式，去掉重复数字的算式，因此选用②式和③式，得到本题的解是：

$\boxed{1}\boxed{7}\boxed{4}\times\boxed{3}\boxed{2}=\boxed{9}\boxed{6}\times\boxed{5}\boxed{8}=5568$

10. 首先我们将空格填入字母，表示如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}+\boxed{B}=\boxed{C} & ①\\ \boxed{D}\times\boxed{E}=\boxed{7}\boxed{2}-\boxed{F}\boxed{G} & ②\end{cases}$$

从②式入手考虑，F 不能是 7、8、9、2、G 不可能是 0、2，因此，G 可能为 1、3、4、5、6。

若$F=1$时，②式有$6\times 9=72-18$，剩 3、4、5 三个数字，不能使①式成立。所以$F\neq 1$。

若$F=3$时，②式有$4\times\square=72-36$，剩 1、5、8 三个数字，不能使①式成立。所以$F\neq 3$。

若$F=4$时，G 只能为 8，这时$D\times E$只可能为4×6 或 3×8均出现重复数字，所以$F\neq 4$。

若$F=5$时，②式有$3\times 6=72-54$，剩 1、8、9 三个数字，可填出满足①式的$1+8=9$，所以$F=5$成立。

若 F=6 时，无论怎样填都不能使①式成立，因此$F=6$不成立。

所以本题的解是：

$$\begin{cases}\boxed{1}+\boxed{8}=\boxed{9}\\ \boxed{3}\times\boxed{6}=\boxed{7}\boxed{2}-\boxed{5}\boxed{4}\end{cases}$$

11．首先将空格填入字母如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}\boxed{B}\div\boxed{C}-\boxed{D}=\boxed{E} & ①\\ \boxed{F}\times\boxed{G}+\boxed{H}=\boxed{I} & ②\end{cases}$$

由②式可知，I 应在 5~9 之间

经试填，发现$I=5$，6，8时，均不能使①式成立，故舍去。

若 I=7 时，有$1\times 2+5=7$ 和 $2\times 3+1=7$两种可能。

（1）若②式为$1\times 2+5=7$时，则剩下 3、4、6、8、9 五个数字，必须满足则 $\boxed{A}\boxed{B}\div\boxed{C}=\boxed{D}+\boxed{E}$，经试填无法找到答案，因此这种情况不成立。

（2）若②式为$2\times 3+1=7$时，则剩 4、5、6、8、9 五个数字，并且$84\div 6=5+9$，所以这种可能成立。

若$I=9$时，有$1\times 2+7=9$，$1\times 7+2=9$，$2\times 4+1=9$三种情况。

当②式为这三种情况的前两种情况时，可找到$48\div 6=3+5$和$64\div 8=3+5$，所以这两种成立。

当②式为$2\times4+1=9$时，不能使①式成立。所以这种不成立。

因此本题的解是：

$$\begin{cases}\boxed{8}\boxed{4}\div\boxed{6}-\boxed{5}=\boxed{9}\\ \boxed{2}\times\boxed{3}+\boxed{1}=\boxed{7}\end{cases}\qquad ①$$

$$\begin{cases}\boxed{4}\boxed{8}\div\boxed{6}-\boxed{5}=\boxed{3}\\ \boxed{1}\times\boxed{2}+\boxed{7}=\boxed{9}\end{cases}\qquad ②$$

$$\begin{cases}\boxed{6}\boxed{4}\div\boxed{8}-\boxed{3}=\boxed{5}\\ \boxed{1}\times\boxed{2}+\boxed{7}=\boxed{9}\end{cases}\qquad ③$$

说明：答案①中$\boxed{5}\boxed{9}$可互换。②③中的$\boxed{5}$和$\boxed{3}$，$\boxed{2}$与$\boxed{7}$可互换。

12．先将八个空格填入八个字母如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}+\boxed{B}-\boxed{C}=\boxed{D} & ①\\ \boxed{E}\times\boxed{F}=\boxed{G}\boxed{H} & ②\end{cases}$$

先从②式入手考虑，由于要填的八个数字中没有 1 和 0，则两个一位数的积为两位数，所以 E、F 都不可能是 2。

由①式可知$\boxed{A}+\boxed{B}=\boxed{C}+\boxed{D}$，根据奇偶性，可判定①式两奇两偶或四奇四偶。

若①式为四个奇数或者四个偶数，那么 2～9 中，奇数偶数各占 4 个，说明②式也只能是四个均为偶数或四个均为奇数。但这种情况在两个乘数均是一位数的乘法中不可能出现，所以①式中四个数字不可能同时均为奇数或同时均为偶数。

因此①式只能是两奇两偶。那么②式也必定两奇两偶。则有：$4\times9=36$，$6\times9=54$，$7\times8=56$，$8\times9=72$四种可能情况。

经试填，$4\times9=36$ 和 $7\times8=56$条件下不能使①式成立，因此②式只能是 $6\times9=54$ 和 $8\times9=72$这两种情况有解。

因此本题的解是：

$$\begin{cases} \boxed{3}+\boxed{6}-\boxed{4}=\boxed{5} \\ \boxed{8}\times\boxed{9}=\boxed{7}\boxed{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{3}+\boxed{7}-\boxed{8}=\boxed{2} \\ \boxed{6}\times\boxed{9}=\boxed{5}\boxed{4} \end{cases}$$

13. 由第二个算式入手考虑，有两种情况：$6\times9=54$，$7\times8=56$。

若第二个算式为$6\times9=54$，则剩 7、8、3 三个数字，根据①式的要求可填出$12+3-7=8$ 和 $12+3-8=7$。所以，这种情况成立。

若第二个算式为$7\times8=56$，则剩 3、4、9 三个数字，但不能使①式成立，因此这种情况不成立。

因此本题的解应为：

$$\begin{cases} ①②+③-⑦=⑧ \\ ⑥\times⑨=⑤④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ①②+③-⑧=⑦ \\ ⑥\times⑨=⑤④ \end{cases}$$

14. 由第二个等式入手考虑，由于要填的数字是 1～9，所以由此可得出第二个等式的左右两个加法算式和只可能为 15 或 17。

若和为 15，则第二个等式只有一种可能，即$12+3=7+8$，剩下的数字是 4、5、6、9。这四个数字很容易找到$6\times9=54$，所以这种可能情况成立。

若和为 17，则第二个等式有两种可能情况：$12+5=8+9$ 和 $13+4=8+9$。

（1）如果第二个等式为$12+5=8+9$，剩下的数字是 3、4、6、7，但无论怎样试，也不能满足第一个等式，因此这种情况不存在。

（2）如果第二个算式为$13+4=8+9$，剩下的数字则是 2、5、6、7，但无论怎么试，也不能满足第一个等式成立，因此这种情况不成立。

所以，本题的解是：

$$\begin{cases}\boxed{6}\times\boxed{9}=\boxed{5}\boxed{4}\\ \boxed{1}\boxed{2}+\boxed{3}=\boxed{7}+\boxed{8}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{6}\times\boxed{9}=\boxed{5}\boxed{4}\\ \boxed{1}\boxed{3}+\boxed{2}=\boxed{7}+\boxed{8}\end{cases}$$

15. 我们将空格填上字母如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}+\boxed{B}-\boxed{C}=\boxed{D} & ①\\ \boxed{E}\times\boxed{F}\div\boxed{G}=\boxed{H}\boxed{I} & ②\end{cases}$$

从②式入手考虑，因为②式的最后的结果为两位数，至少应为 12，则 G 不可能等于 1、7、8、9。因此，G 只可能为 2、3、4、5、6。

若 G=6 时，②式只能是 72÷6=12，但出现重复数字，所以这种情况下不成立。

若 G=5 时，②式变式为$\boxed{E}\times\boxed{F}=\boxed{H}\boxed{I}\times\boxed{G}$，因此$G=5$时，$\boxed{H}\boxed{I}\times5$的结果的个位只能是 0 或 5，因此这种情况也不成立。

若 G=4 时，②式则为$6\times8\div4=12$，剩下的数字是 3、5、7、9，不难找出$3+9-7=5$，所以$G=4$的情况成立。

若 G=3 时，②式有三种情况：$4\times9\div3=12$，$6\times7\div3=42$，$6\times9\div3=18$，经试，只有②式为$4\times9\div3=12$成立。

若$G=2$时，②式可能为：$8\times4\div2=16$ 或 $4\times9\div2=18$，经试只有②式为$8\times4\div2=16$成立。

因此本题的解是：

$$\begin{cases}\boxed{9}+\boxed{3}-\boxed{5}=\boxed{7}\\ \boxed{8}\times\boxed{4}\div\boxed{2}=\boxed{1}\boxed{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{5}+\boxed{8}-\boxed{7}=\boxed{6}\\ \boxed{4}\times\boxed{9}\div\boxed{3}=\boxed{1}\boxed{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{3}+\boxed{9}-\boxed{7}=\boxed{5}\\ \boxed{6}\times\boxed{8}\div\boxed{4}=\boxed{1}\boxed{2}\end{cases}$$

16. 首先我们在空格内填上字母如下：

$\boxed{A}+4=\boxed{B}-4=\boxed{C}\times 4=\boxed{D}\div 4\ \square\square$由于乘、除的情况比加、减的情况少，因此，我们先从 D 入手考虑。

因为$C\times 4=D\div 4$，可得出$C=D\div 4\div 4=D\div 16$，即 D 一定是 16 的倍数，因此 D 只可能是 16、32、48、64、80、96、112、128、144。

又因为$A+4=D\div 4$，可得出$A=D\div 4-4$。

又因为$B-4=D\div 4$，可得出$B=D\div 4+4$

且$A+B+C+D=175$。

因此对 D 进行取值试填可得出$D=112$。

所以$A=D\div 4-4=24$，$B=D\div 4+4=32$，$C=D\div 16=7$时，等式成立。

因此本题的解为

$\boxed{24}+4=\boxed{32}-4=\boxed{7}\times 4=\boxed{112}\div 4$

17．首先我们将空格填入字母如下：

$$\begin{cases}\boxed{A}\times\boxed{B}=\boxed{C}\boxed{D} & ① \\ \boxed{E}\boxed{F}-\boxed{G}\times\boxed{J}=9 & ②\end{cases}$$

因为要填的数字为 1~8，没有 0，因此第一个算式中不可能出现 5，只有在 G，J 中出现一个填 5，或者 C、E、F 可能为 5。

若$C=5$，则①式有：$7\times 8=56$，剩下的数字为 1，2，3，4，要满足②式成立，可以找到：$21-3\times 4=9$，$C=5$成立。

若$G=5$，则②式为$\boxed{E}\boxed{F}-5\ \boxed{J}=9$，J 不能为偶数，F 只能为 1，3，7，经试，F 为 1，7 均有重复数字出现，只有$F=3$，有$24-5\times 3=9$，剩下 1，6，7，8 却无法满足①式，所以 G=5 舍去。

若$E=5$时，②式有$51-6\times 7=9$、$57-6\times 8=9$两种可能，这两种情况均能找出本题的解。

若$F=5$时，②式则可能为$15-2\times 3=9$ 或 $65-7\times 8=9$。

经试，只有$65-7\times 8=9$的情况能找到本题的解。因此本题的解为：

$$\begin{cases}\boxed{7}\times\boxed{8}=\boxed{5}\boxed{6}\\ \boxed{2}\boxed{1}-\boxed{3}\times\boxed{4}=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{4}\times\boxed{8}=\boxed{3}\boxed{2}\\ \boxed{5}\boxed{1}-\boxed{6}\times\boxed{7}=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{3}\times\boxed{8}=\boxed{2}\boxed{4}\\ \boxed{5}\boxed{1}-\boxed{6}\times\boxed{7}=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{3}\times\boxed{4}=\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{5}\boxed{7}-\boxed{6}\times\boxed{8}=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{3}\times\boxed{4}=\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{6}\boxed{5}-\boxed{7}\times\boxed{8}=9\end{cases}$$

18．将空格填入字母：

$$\begin{cases}\boxed{A}\times\boxed{B}=5\ \boxed{C} & ①\\ \boxed{D}\times\boxed{E}\div\boxed{F}=\boxed{G}\boxed{H} & ②\end{cases}$$

由①式入手可知①式有两种可能：$6\times9=54$，$7\times8=56$。

① 式若为$6\times9=54$，则剩下数字为 1、2、3、7、8，则 F 为 1 或 2。

若 F=1，剩 2、3、7、8，无论怎填都无法使②式成立。

若 F=2，剩 1、3、7、8，无论怎填都无法使②式成立。

因此①式只能为$7\times8=56$，则剩下的数字为 1、2、3、4、9，则 F 可能为 1、2、3。

若 F=1，剩 2、3、4、9，无论怎样填，也不能使②式成立。

若 F=2，剩 1、3、4、9，无论怎样填，也不能使②式成立。

若 F=3，剩 1、2、4、9，可找到：$9\times4\div3=12$。

因此本题的解为：

$$\begin{cases}\boxed{7}\times\boxed{8}=5\ \boxed{6}\\ \boxed{9}\times\boxed{4}\div\boxed{3}=\boxed{1}\boxed{2}\end{cases}$$

19．“香港回归”四个汉字代表四个一位偶数，因此，“回”字只可能是 2 或 4。

若“回” = 4，“港”只能为 8，“香”则为 6，“归”则为 2，但不能满足第一个算式成立。因此回 = 4不成立。

“回”只能是 2，则“港”可能为 4、6、8。

若“港”为 4，则“香”为 8，“归”为 6，但不能使每个算式都成立，因此“港”为 4 不成立。

若“港”为 6，则“香”为 8，“归”为 4，均能使每个算式成立。

若“港”为 8，“香”为 6，“归”为 4，不能使每个算式均成立，所以“港”为 8 不成立。

因此，本题的解为：

$$\begin{cases} 8-6\div2+4=9 \\ 8-6\div2-4=1 \\ 4-6\div2+8=9 \\ 4-(8-6)\div2=3 \end{cases}$$

20．由①式很容易找到□中填 6，②式□中填 9，③式可知□ × □ = 24，这里只能填 $\boxed{3}\times\boxed{8}=24$，剩下数字 0、1、5、7、4、2，因此 ④式只能为 $(\boxed{4}+2)\div6=\boxed{1}$，剩 0、2、5、7，则⑤式和⑥式只能填成 $2\times\boxed{5}+\boxed{0}=10$ 和 $2\times(\boxed{7}-\boxed{2})=10$

因此，本题的解为：

$$\begin{cases} 6\div2+3=6 \\ 5\times(9-8)=5 \\ 27-3\times8=3 \\ (4+2\ \div)6=1 \\ 2\times5+0=10 \\ 2\times(7-2)=10 \end{cases}$$

.第八章　乘法原理

1．一件工作，要分两步完成。已知完成第一步有 M 种方法，完成第二部有 N 种方法，完成这件工作共有多少种不同的方法？

2．从甲地到乙地有 3 条路可走，从乙地到丙地又有 4 条路可走，从甲地到丙地共有多少种不同的走法？

3．从 4 个男生，5 个女生中各选一人担任组长，共有多少种不同的选法？

4．有 5 个不同的文具盒，4 只不同的铅笔，3 只不同的钢笔，2 把不同的尺子。若从中各取一个，配成一套学习用具，最多有多少套不同的学习用具？

5．算式（$a_1+a_2+a_3$）$(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$展开后共有多少项？

6．在自然数中，用两位数做被乘数，一位数做乘数，共能组成多少个不同的乘法算式？

7．在三条平行线上分别有两个点，四个点，三个点。（不在同一条直线上的任意三个点不共线），在每条直线上各取一点，可画出一个三角形，共可以画出多少个这样的三角形？

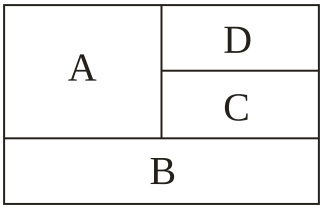
8．把 7 本不同的书借给 5 个学生，每人一本，有多少种不同的借法？

9．把 1～100 的自然数写在 100 张卡片上，从中任取 2 张，其和为奇数的取法有多少种？

10．在 4×4 的方格图中放 A、B 两枚棋子，要求两枚棋子不在同一行，也不在同一列，共有多少种放法？

11．在 3×5 的方格图中放黑白棋子各一枚，要求两枚棋子不同行，不同列，共有多少种方法？

12．用 4 种不同的颜色给下图涂色，使相邻的长方形颜色不同，有多少种不同的涂色方法？



13．1、2、3、4 这四个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数？

14．用 0、1、2、3、4 这五个数字可以组成多少个不相等的四位数？

15．用 1、2、3、4、5、6 这六个数字可以组成多少个没有重复数字的五位偶数？

16．下图中，共有多少个长方形？

17．求 240 共有多少个约数？

18．360 有多少个约数同时也是 240 的约数？

19．某短跑队 9 名运动员，其中 3 人起跑技术好，另外有 2 人跑弯道技术好，还有 2 人冲刺技术好，现在要从中选 4 人组队参加 4×100 米的接力赛，为使每人充分发挥特长，共有多少种组队方式？

20．数 12321，50005，31013，……有一个共同的特点，它们倒过来还是原来的数，这样的五位偶数有多少个？

分析解答

1．根据题意可以知道，第一步中的任意一种方法与第二步中的任意一种方法搭配均可完成这件工作，故完成这件工作共有 M×N 种不同方法。

2．从甲地到丙地可以分两步完成。第一步从甲地到乙地，可有 3 种走法。第二步从乙地到丙地，可有 4 种走法，显然，可以直接利用乘法的原理解答。

$3\times4=12$（种）

答：从甲地到丙地共有 12 种不同的走法。

3．选某两人担任组长应分两步进行。第一步选一名男生，有 4 种选法。第二步选一名女生，有 5 种选法。故可以根据乘法原理求出问题

$4\times5=20$（种）

答：共有 20 种不同的选法。

4．每套学习用具应有文具盒、铅笔、钢笔、尺子各一个，所以配成一套学习用具应分四个步骤。其中文具盒有 5 种取法，取铅笔有 4 种取法，取钢笔有 3 种取法，取尺子有 2 种取法，故可以根据乘法原理求出问题。

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$（套）

答：最多有 120 套不同的学习用具。

5. 此题可根据乘法分配律一项一项的乘，最终求出结果，可是那样做就太复杂了。因为问题只求展开后共有几项，故可以根据乘法原理解决。其中第一个括号中有 3 项，第二个括号中有 4 项，第三个括号中有 5 项。

$3 \times 4 \times 5 = 60$（项）

答：算式展开后共有 60 项。

6. 组成一个乘法算式要分为两步，即确定被乘数和乘数。因为被乘数必须是两位数，乘数必须是一位数，所以被乘数有 90 种选法，乘数有 10 种选法。由于此题符合乘法原理的条件，故可以根据乘法原理解答。

$90 \times 10 = 900$（个）

答：共能组成 810 个不同的乘法算式。

7. 如果三角形的三个顶点确定了，那么这个三角形也就确定了。由此可知，解决此题应用三个步骤，每一步骤都是在不同的直线上取一点做为三角形的顶点。其中第一条直线上有 2 种取法，第二条直线上有 4 种取法，第三条直线上有 3 种取法。根据乘法原理可以直接解答。

$2 \times 4 \times 3 = 24$（个）

答：一共可以画出 24 个三角形。

8. 5 个学生不妨设为 A、B、C、D、E。如果按照 A→B→C→D→E 的顺序借书，那么 A 可以从 7 本书中任选一本，有 7 种选法，B 可以在剩下的 6 本书中任选一本，有 6 种选法，以此类推，E 有 3 种选法。由于 5 个学生每人选一本后才完成借书任务。故可根据乘法原理解答此题。

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$（种）

答：有 2520 种不同的借法。

9. 因为只有一个奇数与一个偶数相加时，和才能是奇数，所以取出的 2 张卡片必须是一奇一偶。在 1-100 的所有数中，奇数、偶数各 50 个，根据乘法原理可以直接求出问题所求。

$50 \times 50 = 2500$（种）

答：和为奇数的取法有 2500 种。

10. 由于两枚棋子要一枚一枚地放，故可以分两步完成这件事。第一步放棋子 A，A 可以放在 16 个方格中任意一个，有 16 种方法；第二步放棋子 B，由于 A 棋

子所在的行与列的方格中不能再放，故 B 只能放在剩下的 9 个格中，有 9 种放法。根据乘法原理可以直接解答。

$16\times 9=144$（种）

答：共有 144 种放法。

11. 解决此题的步骤同第 10 题，但要注意的是行与列的方格数不同。

$15\times 8=120$（种）

答：共有 120 种放法。

12. 如图 A、B、C、D、4 个长方形要一个一个地涂色，故可分 4 步完成。

第一步涂长方形 A，A 处可涂 4 种颜色中的任意一种，故有 4 种涂色方法；

第二步涂长方形 B，由于 B 与 A 相邻，不能同色，故 B 处只能从剩下的 3 种颜色中任选一种，有 3 种涂色方法；

第三步涂长方形 C，由于 C 与 B 和 A 相邻，不能同色，故 C 处只能从剩下的 2 种颜色中任选一种，有 2 种涂色方法；

第四步涂长方形 D，由于 D 与 A 和 C 相邻，不能同色，但是 D 与 B 不相邻，可以同色，故 D 处可有两种涂色方法（一种是与 B 同色，一种是与 A、B、C 都不同）。综上所述，可根据乘法原理解答此题。

$4\times 3\times 2\times 2=48$（种）

答：有 48 种不同的涂色方法。

13. 在确定由 1、2、3、4 组成的三位数的过程中，应一位一位去确定，显然，解答此题应分三步完成，第一步确定个位数字，有 4 种选法；第二步确定十位数字，由于数字不能重复，故 3 种选法；同理，第三步百位数字只有 2 种选法。最后，根据乘法原理解答此题。

$4\times 3\times 2=24$（个）

答：可以组成 24 个没有重复数字的三位数。

14. 由于组成的是不相等的四位数，故数字可以重复使用。千位上，不能取 0，有 4 种取法；百位上，可以从五个数字中任选一个，有 5 种取法；同理，十位上与个位上也都有 5 种取法。由乘法原理很容易求出组成的四位数的个数。

$4\times 5\times 5\times 5=500$（个）

答：可以组成 500 个不相等的四位数。

15. 由于组成的五位数必须是偶数，故个位数字只能取 2、4、6 中的一个，有 3 种不同的取法，十位数字可以从余下的 5 个数字中任取一个，有 5 种不同的取法；

同理，百位数字有 4 种取法，千位数字有 3 种取法，万位数字有 2 种取法，故可由乘法原理解决。

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3 = 360$（个）

答：可以组成 360 个没有重复数字的五位偶数。

16．由长方形的特点可以知道，只要长方形的长与宽确定了，这个长方形也就确定了。因此解答此题可分为两步，第一步是确定长 AB 中共有几条线段，第二步确定宽 AC 中共有几条线段。最后由乘法原理解答。

（$1+2+3+4+5$）$\times$（$1+2+3+4$）$=15 \times 10=150$（个）

答：图中共有 150 个长方形。

17．将 240 分解质因数可以得到$240=2^4 \times 3 \times 5$。由于 240 的任何一个约数经过分解质因数都可以写成$2^{a1} \times 3^{a2} \times 5^{a3}$，其中 a_1、a_2、a_3分别是不超过 4、1、1 的整数。故解答此题可分为三个步骤。第一步确定质因数 2 的个数，由于 2 的个数可以是 0 个、1 个、2 个、3 个、4 个，故有 5 种情况。第二步确定质因数 3 的个数，3 的个数可以有 0 个、1 个，2 种情况。同理，第三步确定质因数 5 的个数，也有 2 种情况。通过以上分析，可以利用乘法原理求出 240 约数的个数。

$5 \times 2 \times 2=20$（个）

答：240 共有 20 个约数。

18．360 有多少个约数同时也是 240 的约数？实际求的是 360 与 240 的最大公约数所含约数的个数，所以解答此题首先应求出两个数的最大公约数，然后可以按照第 17 题的方法求出问题。

360 与 240 的最大公约数是 120。由于 $120=2^3\times3\times5$，故 120 所含约数的个数有 $4\times2\times2=16$（个）。

答：360 有 16 个约数同时也是 240 的约数。

19．解答此题可分四步完成，第一步选起跑技术好的队员，有 3 种选法，第二步选跑弯道技术好的队员，有 2 种选法，第三步选冲刺技术好的队员，有 2 种选法；第四步选跑直道的队员，由于有 3 个人已被选好，故跑直道的队员只能从剩下的 6 人中任选一人，有 6 种选法。由乘法原理容易求出问题。

$3 \times 2 \times 2 \times 6=72$（种）

答：共有 72 种组队方式。

20．根据数的特点，可分三步解答此题。第一步确保偶数特征，万位与个位的数字

相同，有 2、4、6、8 四种选择；第二步千位与十位的数字相同，有 0，1，2……，9 十种选择；第三步百位上也有 0，1，2，……9 十种选择。根据乘法原理解决此题。

$4 \times 10 \times 10 = 400$（个）

答：这样的五位偶数有 400 个。

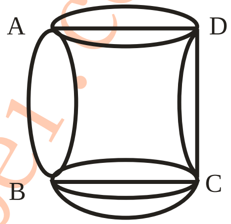
第九章　加法原理

1．完成一项任务有两种不同的方法，有 4 个人会用第一种方法完成，另有 5 个人会用第二种方法完成，任选一人来完成这件工作，共有多少种选法？

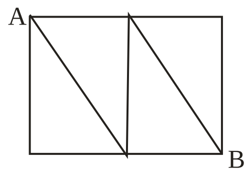
2．从甲地到乙地可以乘火车，也可以乘轮船，还可以乘飞机。在一天中，从甲地到乙地有 4 班火车，3 班轮船，2 班飞机，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同的走法？

3．书架上有 4 本不同的科技书，5 本不同的故事书，3 本不同的连环画，如果从中任取一本，那么共有多少种取法？

4．如图，从 A 到 C 共有多少种走法？



5. 如图，一只小虫要从 A 点沿着线段爬到 B 点，要求任何线段和点不得重复经过，这只小虫最多有几种不同走法？



6．直线上有 4 个点，以每两点为端点的线段有多少条？

7．每次投掷一枚骰子，两次出现的数字之和为偶数的情况有多少？

8．用数字 0、3、4、5 可组成多少个没有重复数字且能被 5 整除的四位数？

9．书架上有文艺书 60 本，不同的科技书 100 本，如果从两类图书中最多各借一本（不允许不借），共有多少种借法？

10．从 2、3、4、5、6、10、11、12 这七个数中取出两个数作成最简真分数，有多少中取法？

11．分子小于 6，而分母小于 50 的不可约真分数共有多少个？

12．将 1、2、3、4、5 这五个数字从大到小排成一行，在这五个数中间任意插入加号，可以得到多少个不同的和？（要求最少加一个加号）

13．在 1~1000 的自然数中，0 一共出现过多少次？

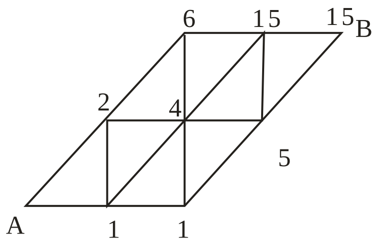
14．在 1~1000 的自然数中，不含数字 3 的数共有多少个？

15．已知一个三位数，个位上数字之和是 24，这样的三位数一共有多少个？

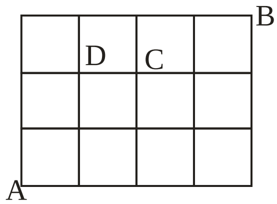
16．一把钥匙只能开一把锁，现有 10 把钥匙和 10 把锁，最多要试验多少次才能配好全部的钥匙和锁？

17．数 1447，1225，1031 有某些相同的特点，每一个数都是以 1 为首的四位数，且每个数恰好有两个数字相同，这样的数共有多少个？

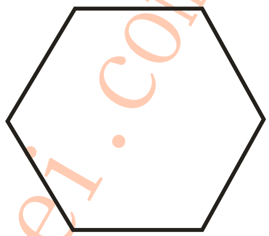
18．如图从 A 到 B，要求从左到右，从下到上，从左下向右上，有多少种不同走法？



19．如图，从 A 点沿实线走最短路线到 B 点，共有多少种走法？



20．在连接正六边形的三个顶点而成的三角形中，与六边形有公共边的三角形有多少个？



分析解答

1. 由于完成这件工作可分两类，即要么是会第一种方法的人完成，要么是会第二种方法的人完成，故解答此题应用加法原理。

   5＋4＝9（种）

   答：共有 9 种选法。

2. 解决从甲地到乙地这个问题，可分三类方法，即要么乘火车，要么乘轮船，要么乘飞机。因此，应用加法原理解答。

   4＋3＋2＝9（种）

   答：共有 9 种不同的走法。

3. 从三种不同的书中取一本书，要么从科技书中取一本，要么从故事书中取一本，要么从连环画中取一本，共有三类办法，所以是加法原理的问题。

   4＋5＋3＝12（种）

   答：共有 12 种不同取法。

4. 从 A 到 C 可有两类不同的走法。第一类，从 A 先到 B 再到 C。这时，要分两步

走，第一步从 A 到 B，有 2 种走法；第二步从 B 到 C，有四种走法。由乘法原理共有$2 \times 4 = 8$种不同的走法。同理，第二类从 A 先到 B 再到 C，应有 $3 \times 2 = 6$ 种不同走法。最后根据加法原理解答。

$2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$（种）

答：从 A 到 C 共有 14 种不同走法。

5. 解决此题的方法同第 4 题。

$1 \times 3 + 2 \times 3 = 9$（种）

答：小虫最多有 9 种不同走法。

6. 解答此题可分为三大类。第一类，以 A 点为左端点的线段有 AB、AC、AD 三条；第二类，以 B 点为左端点的线段有 BC、BD 二条；第三类，以 C 点为左端点的线段只有 CD 一条。故可由加法原理解决。

$3 + 2 + 1 = 6$（条）

答：共有 6 条不同的线段。

7. 要使两次出现的数字和为偶数，两次出现的数字必须同奇或同偶。因此解答此题应分为两类考虑。第一类，两次出现的数字同为奇数。当第一次投掷骰子时，出现奇数有 3 种可能，即 1、3、5。同样，第二次投掷时也有 3 种可能。根据乘法原理，共有$2 \times 3 = 9$种不同情况。第二类，两次出现的数字同为偶数，类似第一类的讨论方法，也有$3 \times 3 = 9$种不同情况。最后由加法原理求和即可。

$3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$（种）

答：两次出现数字之和为偶数的情况有 18 种。

8. 由能被 5 整除数的特征可以知道，解决此题应分两大类，即个位是 0 和个位是 5。当个位是 0 时，十位数字可以从剩下的 3 个数字中任取一个，有 3 种取法；百位数字有 2 种取法；千位数字有 1 种选法，由乘法原理，共可组成四位数$3 \times 2 \times 1 = 6$个，当个位是 5 时，由于千位上不能是 0，故有 2 种取法，百位上可以从剩下的 2 个数中任取一个，有 2 种取法，十位上只有 1 种取法，由乘法原理，共可组成数 $2 \times 2 \times 1 = 4$（个）。最后应用加法原理即可求出问题。

$3 \times 2 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 = 10$（个）

答：可以组成 10 个没有重复数字且能被 5 整除的四位数。

9．由条件“最多各借一本”可以把问题分为两大类解决。第一类只借一本书，这本书要么从文艺书中借，要么从科技书中借，它们分别有 60 种和 100 种不同借法；第二类两种书中各借一本，这时，要分两步完成，第一步借一本文艺书，有 60 种借法，第二步借一本科技书，有 100 种借法，由乘法原理可知，共有 60×100=6000 种借法。最后由加法原理即可求解。

$60+100+60\times100=6160$（种）

答：共有 6160 种借法。

10．由于组成的分数必须是最简真分数，故解决此题可分为分母分别是 3、4、5、6、10、11、12 七种不同情况。当分母是 3 时，分子只能取 2，故有一种取法；当分母是 4 时，分子不能是 2，只能是 3，也有一种取法；同理，分母是 5 时，分子有 2、3、4 三种取法；分母是 6 时，分子只有 5 一种取法；分母是 10 时，分子只有 3 一种取法；分母是 11 时，分子有 2、3、4、5、6、10 六种取法，；分母是 12 时，分子有 5、11 两种取法。综上所述，应用加法原理可求解。

$1+1+3+1+1+6+2=15$（种）

答：共有 15 种取法。

11．解答此题可按分子分别是 1、2、3、4、5 分为五类。第一类，分子是 1，这时，分母可取 2 至 49 中任意一个数，共有 48 种取法；第二类，分子是 2，这时，分母只要不取 3 至 49 中任何一个 2 的倍数就可以。故有 24 中取法；第三类，分子是 3，分母只要不取 4 至 49 中任何一个 3 的倍数就可以，共有 31 种取法；第四类，分子是 4，分母可取 5、7、9、……49 中任何一个，共有 23 种取法，第五类，分子是 5，分母只要不取 6 至 49 中任何一个 5 的倍数就可以，共有 36 种取法。由加法原理对以上取法求和即可求解。

$48+24+31+23+36=162$（个）

答：共有 162 个分数。

12．由于 5 个数之间有 4 个间隔，故可分为四类解决。第一类加一个加号，这个加号可放在任意一个间隔处，有 4 种放法；第二类加二个加号，有 6 种放法；第三类加三个加号，有 4 种放法；第四类加四个加号，有 1 种放法。最后根据加法原理求和。

$4+6+4+1=15$（个）

答：可以得到 15 个不同的和。

13．解决此题可以根据自然数的位数把 1—1000 这 1000 个数分为四类。

第一类，一位数，由于一位数只有 1 至 9 这九个数，故 0 出现过 0 次。

第二类，两位数，这时，0 只能在个位，十位上可取 1 至 9 中任何一个数，共有 9 中取法，即 0 出现过 9 次。

第三类，三位数，这时，0 可以在个位上，也可以在十位上，而且出现的次数相同，共出现过$9\times10\times2=180$次。

第四类，四位数，由于四位数只有一个 1000，故 0 出现了 3 次。以上四类应用加法原理求和即可。

$9+180+3+0=192$（次）

答；0 一共出现过 192 次。

14．从 1 到 1000 的自然数可分为三类。一位数、两位数、三位数。一位数中不含数字 3 的有 8 个，即 1、2、4、5、6、7、8、9。两数中不含数字 3 的有 72 个，这是因为十位数字有 1、2、4、5、6、7、8、9 这样的 8 种取法；个数数字有 0、1、2、4、5、6、7、8、9 这样 9 种取法，由乘法原理可知，共有$8\times9=72$种，即 72 个不含数字 3 的两位数。同理可知三位数中不含数字 3 的数共有$8\times9\times9=648$个。最后可由加法原理求和。

$8+72+648=728$（个）

答：不含数字 3 的数共有 728 个。

15．由于$24=9+9+5$，$24=9+8+7$，$24=8+8+8$，故解答此题可分为三类。第一类是由 9、9、6 三个数字组成的三位数，有 996、969、699 三个，第二类是由 9、8、7 三个数字组成的三位数，有 987、978、897、879、789、798 六个，第三类是由 8、8、8 组成的三位数，只有 888 一个。由此可应用加法原理解答。

$3+6+1=10$（个）

答：这样的三位数一共有 10 个。

16．解决此题应从最不利的情况考虑，第一把钥匙最多试验 9 次，第二把钥匙最多试验 8 次，依此类推，第 9 把钥匙最多试验 1 次。最后根据加法原理求和可解。

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$（次）

答：最多试验 45 次才能配好全部的钥匙和锁。

17. 根据题意，我们可以把符合要求的数分为两类，第一类是除了千位数字是 1 外，还有一个；第二类是仅千位数是 1。

在第一类中，另外一个 1 可能在个位、十位或百位上，有 3 种可能情况，

其余两个数位上的数字是从 0、2、3、4、5、6、7、8、9 中任取两个，有$9\times8=72$种方法，由乘法原理，此类数共有$3\times9\times8=216$（个）。

在第二类中，个位、十位、百位上的数字有两个相同，但不等于 1。另一个数，既不是这两个数也不是 1，而且它可能在个位、十位或百位上，有 3 种可能情况。并且这个数可能是 0、2、3、4、5、6、7、8、9 中任意一个，而相同的两个数只能是余下的八个数中的一个。因此，根据乘法原理可知此类数共有$3\times9\times8=216$（个）。最后可根据加法原理求和。

$3\times9\times8+3\times9\times8=432$（个）

答：这样的数共有 432 个。

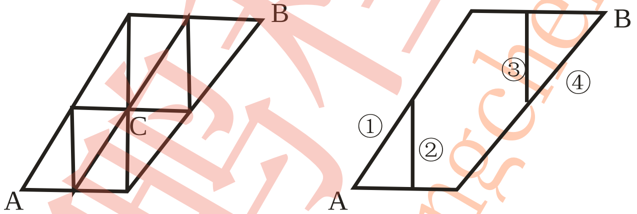
18．根据题意，可以把从 A 到 B 的走法按照是否经过 C 点分为两类。

第一类，A 到 C，有 4 种走法，从 C 到 B 也有 4 种走法，故从 A 经 C 到 B 共有 4×4=16 种走法。

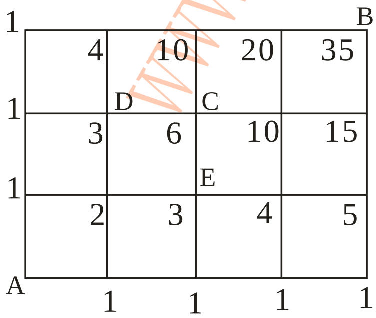
第二类，若不经过 C 点，则可去掉相交于 C 点的线段，如图（2）。数一数从 A 到 B 有 4 种走法。最后，可由加法原理对两类走法求和。

$4\times4+4=20$（种）

答：共有 20 种不同走法。



19．解答此题可连续利用加法原理。理由是，在经过 C 点之前，要么经过 D 点，要么经过 E 点。如果到 D 点有 a 种方法，到 E 点有 b 种方法，那么到 C 点就有 a+b 种方法。其它各点均如此。



答：共有 35 种方法。

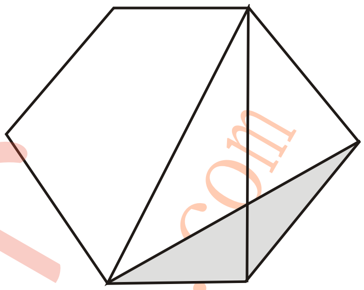
20．如图，与正六边形有公共边的三角形有两类。

第一类，与正六边形有一条公共边的三角形，由于任何一条边均可以作出这样的三角形，但是三角形的第三个顶点不能是这条相邻的两个点，像这样的三角形共有（$6-2-2$）$\times 6=12$（个）。

第二类，与正六边形有两条公共边的三角形，数一数共有 6 个。最后，根据加法原理求和即可。

（$6-2-2$）$\times 6+6=18$（个）

答：与六边形有公共边的三角形共有 18 个。



第十章　排列

1．计算：P_8^3，P_5^3—P_4^2，$\frac{6!}{4\times5!}$，$\frac{6P_5^3+3P_4^2}{P_7^4}$

2．已知$P_x^3=120$，求 x 的值

3．某铁路线共有 8 个车站，这条铁路线共有多少种不同的车票？

4．有 7 名同学参加游泳比赛，获得冠军与亚军的名单中有几种不同情形？

5．放假期间全班 40 名同学都互相通了信，全班同学共写了多少封信？

6．用数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字的三位偶数？

7．班委 5 人分工担任班长、学习委员、生活委员、文娱委员和体育委员五种职务，一共有多少种分工方法？

8．8 个人去借 6 本不同的书，每人最多借一本，并且全部借出，一共有多少种不同的借法？

9．A、B、C、D、E 五人排成一排，如果 C 必须站在中间，那么共有多少种排法？

10．A、B、C、D、E 五人排成一排，如果 A 不在中间，那么共有多少种排法？

11．A、B、C、D、E 五个人排成一排，如果 A 不在两端，那么共有多少种排法？

12．A、B、C、D、E 五人排成一排，如果 A、B 两人必须站在两端，那么一共有多少种不同排法？

13．A、B、C、D、E 五人排成一排，如果 A、B 两人不在两端，那么共有多少种排法？

14．A、B、C、D、E 五人排成一排，A、B 两人必须相邻，共有多少种排法？

15．A、B、C、D、E 五人排成一排，A 必须在 B 的前面，共有多少种排法？

16．7 名男生、5 名女生排成一排照像，每名女生左右都是男生，共有多少中不同排法？

17．用 1、2、3、4、5 这五个数字可以组成多少个没有重复数字的四位数，将他们从小打到大排列起来，4123 是第几个数？

18．由数字 1、2、3、4、5、6 可组成多少个没有重复数字且比 50000 大的自然数？

19．由数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字且比 40000 小的自然数？

20．用 1、3、5、7 四个数字组成没有重复数字的四位数，

① 所有这些四位数的各个数字的和是多少？

②所有这些四位数的平均数是多少？

分析解答

1．$P_8^3=8\times7\times6=336$

$P_5^3-P_4^2=5\times4\times3-4\times3=48$

$$\frac{6!}{4\times5!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times5\times4\times3\times2\times1}=1.5$$

$$\frac{6P_5^3+3P_4^2}{P_7^4}=\frac{6\times60+3\times12}{840}=\frac{33}{70}$$

2．由排列数公式可知P_x^3表示三个连续自然数相乘，即x·（x－1）·（x－2）。故解答此题只需把 120 分解成三个连续自然数相乘。

$120=6\times5\times4$

由此可知 x 等于 6。

3．我们知道，如果火车的起点和终点不同，那么车票也就不同。故此题是从 8 个元素中取 2 个元素的排列问题。

$p_8^2=8\times7=56$（种）

答：此铁路线共有 56 种不同的车票。

4. 这是一个从 7 个元素中取 2 个元素（冠军和亚军）的排列问题。

$p_7^2=7\times6=42$（种）

答：获得冠军与亚军的名单中有 42 种不同情形。

5. 由于同学之间是相互通了信，故此题是从 40 个元素中取 2 个元素的排列问题。

$p_{40}^2=40\times39=1560$（封）

答：全班同学共写了 1560 封信。

6. 所组成的三位偶数可分为两类。

第一类，个位数字是 2，这时十位和百位数字可以从剩下的 4 个数字中任选 2 个进行排列，共有p_4^2种排法。

第二类，个位数字是 4，类似于第一类，也有p_4^2种排法。

由加法原理可知，对两类排列数求和即可。

$p_4^2+p_4^2=2p_4^2=2\times12=24$（个）

答：可以组成 24 个没有重复数字的三位偶数。

7. 由于 5 人均可以担任 5 种职务中的任何一种，所以此题是 5 个元素的全排列问题。

$p_5^5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$（种）

答：一共有 120 种分工方法。

8. 如果把 8 个人看成 8 个元素，6 本书看成按一定顺序排列的 6 个位置，那么问题就转换成从 8 个人中选中 6 人，并按照一定顺序坐在 6 个位置上排列问题了。

$p_8^6=8\times7\times6\times5\times4\times3=20160$（种）

答：一共有 20160 种不同的借法。

9. 由于 C 的位置已经固定了，所以，问题转化成其余 4 人的排列问题。

$p_4^4=4!=4\times3\times2\times1=24$（种）

答：共有 24 种排法。

10. 解答此题可以从五人的全排列中去掉 A 在中间时五人的排列。

$\mathrm{p}_5^5-\mathrm{p}_4^4=120-24=96$（种）

答：共有 96 种排法。

11. 由于 A 不能在两端，所以 A 只能排在其余 3 个位置中某一个位置，有p_3^1种排列，而其他 4 人没有限定位置，是一个全排列问题。最后，由乘法原理解决。

$p_3^1\times p_4^4=3\times24=72$（种）

答：共有 72 种排法。

12. 由于 A、B 两人必须站在两端，所以，两人有p_2^1种站法。而其余 3 人是一个全排列问题。再由乘法原理即可解答。

$p_2^1 \times p_3^3 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$（种）

答：共有 12 种排法。

13. 由于 A、B 两人不能站在两端，所以 A、B 两人只能站在剩下三个位置中某两个位置上，共有p_3^2种站法。而其它三人没有位置限定，可以任意站定，共有p_3^3种站法。根据乘法原理，两种站法数求积即可。

$p_3^2 \times p_3^3 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 36$（种）

答：共有 36 种排法。

14. 因为 A、B 两人必须相邻，所以可以把两人看作一个整体，那么问题就转化成 4 个人的全排列问题了。但要注意的是，AB 两人相邻的排法有p_2^2种，由乘法原理求积即可。

$p_4^4 \times p_2^2 = 24 \times 2 = 48$（种）

答：共有 48 种排法。

15. 由于 A 排在 B 的前面与 A 排在 B 的后面出现的情况一样多，故所求问题可以看作五人全排列的一半。

$p_5^5 \div 2 = 120 \div 2 = 60$（种）

答：共有 60 种排法。

16. 照相时，由于 5 名女生可以站在 7 个男生之间的 6 个间隔中的任意 5 个间隔处，所以，5 名女生可有p_6^5种站法。同时，7 名男生也有p_7^7种站法。最后，由乘法原理求积即可。

$p_7^7 \times p_6^5 = 5040 \times 720 = 3628800$（种）

答：共有 3628800 种不同排法。

17. 因为在组成千位是 4 的所有四位数中，4123 这个数是最小的，所以，只要求出比 4123 小的四位数共有多少个，问题也就解决了。而比 4123 小的四位数共有三类，即千位是 1，千位是 2 或千位是 3，并且组成每一类四位数的个数都一样，都有p_4^3个，因此，三类四位数共有$3p_4^3$个。

$p_4^3 \times 3 + 1 = 4 \times 3 \times 2 \times 3 + 1$

$= 73$

答：4123 是 73 个数。

18. 所组成的比 50000 大的自然数可分为两类。

第一类，组成的自然数是五位数。这时，万位上可从数字 5 和 6 中任选一个 有p_2^1种选法，其他数位上的数字可以从剩下五个数字中选出 4 个进行排列，共有p_5^4种排法，由乘法原理可知，所组成的五位数共有$p_2^1 \times p_5^4$个。

第二类，组成的自然数是六位数。显然，是六个数字的全排列问题。

由加法原理，比 50000 大的自然数共有$p_2^1 \times p_5^4 + p_6^6 = 2 \times 120 + 720 = 960$（个）

答：可以组成 960 个设有重复数字且比 50000 大的自然数。

19. 分析方法类似于第 18 题，要从一位数、两位数、三位数、四位数、五位数五类分别考虑。

$p_5^1 + p_5^2 + p_5^3 + p_5^4 +$（$p_5^5 - p_4^4 \times p_2^1$）

$= 5 + 20 + 60 + 120 + 72$

$= 277$（个）

答：可以组成 277 个没有重复数字且比 40000 小的自然数。

20. ①由 1、3、5、7 四个数字组成的所有四位数共有p_4^4个，而每个四位数的数字之和都是$1 + 3 + 5 + 7$。有了以上两个条件，问题也就解决了。

（$1 + 3 + 5 + 7$）$\times p_4^4 = 16 \times 24 = 384$

②由于每个数字在各个数位上出现的次数都相等，都是 6 次，故可以先求出所有四位数的和，再求出平均数。

$[(1 + 3 + 5 + 7) \times 6 \times 1000 + (1 + 3 + 5 + 7) \times 6 \times 100 +$
$(1 + 3 + 5 + 7) \times 6 \times 10 + (1 + 3 + 5 + 7) \times 6] \div p_4^4$

$= 96 \times 1111 \div 24$

$= 4444$

答：①所以四位数的数字和为 384；

②所有四位数的平均数为 4444。

第十一章 组合

1．计算:C_7^4，$C_8^4—C_5^4$

2．计算:C_{100}^{99}，$C_{1997}^{1996}—1996C_{1997}^{1997}$

3．某个学生要从 8 本科技书中选 3 本，共有多少种选法？

4．星期日全班学生（40 人）举行聚会，相见时相互都握了手，这次聚会大家一共握了多少次手？

5．某铁路沿线共有 10 个车站，共有多少票价？

6．有红、黄、蓝、紫、白五种颜色的塑料花，把任意四种扎成一束，可以组成多少种不同的花束？

7．平面上有 10 个点，其中任意三个点均不在同一条直线上，

①共可画出多少条直线？

②共可画出多少个三角形？

8．甲袋中有 4 个球，乙袋中有 5 个球，这些球的颜色各不相同，如果每次从一个

口袋中取出两个球，那么共有多少种不同的取法？

9．从写有 2、4、6、8、10 的五张卡片中，任取两张作两个一位数乘法，①有多少种不同的算式？②有多少个不同的乘积？

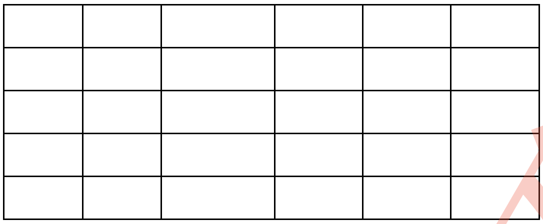
10．有 A、B、C、D、E 五种硬币各一枚，一共可以组成多少种不同的币值？

11．某校六年级有 5 个班，五年级有 6 个班，各年级进行班与班的单循环足球赛，一共要赛多少场？

12．6 种不同的玩具分给甲、乙、丙三人，如果每人分得 2 种，有多少种分法？

13．6 种不同的玩具分给甲、乙、丙三人，如果甲分得 1 种，乙分得 2 种，丙分得 3 种，有多少种分法？

14．如图，共有多少个长方形？



15．从 12 个人中选 5 个人去开会，如果 A、B 两人必须去开会，那么有多种不同的选法？

16．从 10 个人中选 6 个人去开会，如果 A、B 两个人中只去一人，那么有多少种选法？

17．从 7 名男生，6 名女生中选出 3 人去开会，至少有 1 名女生的选法有多少种？

18．10 名男生、8 名女生，现在选出 8 个人去比赛，某两名男生、某两名女生不能同时入选，共有多少种选法？

19．在产品检验时，常从产品中抽出一部分进行检验，现有 100 件产品，其中 2 件次品，如果从这个 100 件产品中任意抽出 3 件检验，其中至少有一件次品的抽法一共有多少种？

20．10 个人围成一圈，从中选出两个不相邻的人，共有多少种选法？

分析解答

1．

$$C_7^4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$$

$$C_8^4-C_5^4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}-\frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}$$
$$=70-5$$
$$=65$$

2．$C_{100}^{99}=C_{100}^{100-99}=C_{100}^{1}=\frac{p_{100}^{1}}{p_1^1}=\frac{100}{1}=100$

$$C_{1997}^{1996}-1996C_{1997}^{1997}=C_{1997}^{1}-1996\times1$$
$$=1997-1996$$
$$=1$$

3．由题意可知，只要从 8 本书中取出 3 本就可以，与书的顺序无关，所以，这个

问题实质是从 8 个元素中取 3 个元素的组合问题。

$C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$（种）

答：共有 56 种选法。

4. 由于同学间的握手与顺序无关，故此问题是从 40 个元素中任取 2 个元素的组合问题。

$C_{40}^2=\frac{40\times39}{2\times1}=780$（次）

答：这次聚会大家一共握了 780 次手。

5. 由于票价只与起点到终点的距离有关，与顺序无关，故是组合问题。

$C_{10}^2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$（种）

答：共有 45 种不同的票价。

6. 由于每种花束只与组成花束的四种颜色有关，与颜色间的排列顺序无关。故此问题是从 5 个元素中任取 4 个元素的组合问题。

$C_5^4=C_5^1=5$（种）

答：可以组成 5 种不同的花束。

7. 无论是直线，还是三角形，只与所取点的个数有关，而与点的顺序无关，故所求是组合问题。

$C_{10}^2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$（条）

$C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$（个）

答：共可画出 45 条直线，120 个三角形。

8. 因为所取的两个球，要么是从甲袋取的，要么是从乙袋中取的，所以，所有的取法可分为两类。最后，再由加法原理解答。但要注意到，无论哪一类，所取的两个球都只与球的颜色有关，与所取两个球的顺序无关，故两类又都是组合问题。

$C_4^2+C_5^2=6+10=16$（种）

答：共有 16 种取法。

9. ①由于乘法算式不仅与所取的两张卡片上的数字有关，而且与两张卡片取出的顺序也有关，所以这是一个排列问题。

$P_5^2=5\times4=20$（种）

②与①不同，所得到积只与所取的两张卡片上的数字有关，而与卡片取出的顺

序无关。所以这是一个组合问题。

$C_5^2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$（个）

答：有 20 种不同的乘法算式，10 个不同的乘积。

10．由于不同的币值是由不同的硬币或不同枚数的硬币所组成，故所有组成的币值可分为五类，即取一枚硬币所组成的币值、取两枚硬币所组成的币值、取三枚硬币所组成的币值、取四枚硬币所组成的币值、取五枚硬币所组成的币值。又由于币值只与取的枚数有关，与取的顺序无关，所以，以上五类都是组合问题。

$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$

$=5+10+10+5+1$

$=31$（种）

答：一共可以组成 31 种不同的币值。

11．由于各年级的比赛都是单循环制的，所以每两个队都要进行一场比赛，并且比赛的场次只与两个队选取有关而与两个队选出的顺序无关，因此，各年级比赛的场次都是组合问题。最后可由加法原理求出问题。

$C_5^2+C_6^2=10+15=25$（场）

答：一共要赛 25 场比赛。

12．由于分法只与每个人分到的不同玩具有关，与分到玩具的顺序无关。所以这是一个组合问题。

$C_6^2\times C_4^2\times C_2^2=15\times6\times1$

$=90$（种）

答：有 90 种分法。

13．解答此题可分三步。第一步，从 6 种玩具中选出一种给甲；第二步，从剩下的 5 种玩具中选出 2 种给乙，这时，所有的选法只与选出的玩具有关，而与两种玩具选出的顺序无关，故是组合问题。同理，第三步也是组合问题，从剩下的 3 种玩具中选出 3 种给丙。根据乘法原理，求积即可求出问题。

$C_6^1\times C_5^2\times C_3^3=6\times10\times1$

$=60$（种）

答：共有 60 种分法。

14．因为长方形有两组平行线，所以，可先从水平方向的 6 条平行线中选出两条，再从竖直方向的 7 条平行线中选出两条，最后根据乘法原理解决。但要注意的

是，取出的平行线与顺序无关，是组合问题。

$C_6^2 \times C_7^2 = 15 \times 21 = 315$（个）

答：共有 315 个长方形。

15. 由于 A、B 两人已经确定，所以，问题就转化成从$(12-2)$个人中选$(5-2)$个人的组合问题了。

$C_{12-2}^{5-2} = C_{10}^3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$（种）

答：共有 120 种不同的选法。

16. 由 A、B 两人只去一人，可以把问题分为两类来考虑。

第一类，A 去 B 不去，这时问题就转化成从$(10-2)$个人中任取$(6-1)$个人的组合问题了。

同样，第二类 B 去 A 不去，也是把问题转化成从$(10-2)$个人中任取$(6-1)$个人的组合问题了。

由加法原理可知，两类组合数求和即可解答问题。

$$\begin{aligned} C_{10-2}^{6-1} + C_{10-2}^{6-1} &= C_8^5 + C_8^5 \\ &= 2C_8^5 \\ &= 112 \text{（种）} \end{aligned}$$

答：共有 112 种选法。

17. 有条件“选 3 人，至少有一名女生”可把问题分为三类。

第一类，选出的 3 个人中只有一名女生。共有$C_6^1 \times C_7^2$种选法。

第二类，选出的 3 个人中只有两名女生。共有$C_6^2 \times C_7^1$种选法。

第三类，选出的 3 个人都是女生。共有C_6^3种选法。

由加法原理可知，三类组合数求和即可解决问题。

$C_6^1 \times C_7^2 + C_6^2 \times C_7^1 + C_6^3$

$= 6 \times 21 + 15 \times 7 \times +20$

$= 126 + 105 + 20$

$= 251$（种）

答 ：至少有 1 名女生的选法有 251 种。

18. 解答此题可以反过来想，即从所有选法中去掉 4 个人都入选的选法。

$C_{10+8}^8 - C_{14}^4 = C_{18}^8 - C_{14}^4$

$= 43758 - 1001$

$= 42757$（种）

答：共有 42757 种选法。

19．分析方法类似于第 17 题。

$C_2^1 \times C_{98}^2 + C_2^2 \times C_{98}^1$

$= 2 \times \frac{98 \times 97}{2} + 1 \times 98$

$= 98 \times 97 + 98$

$= 9604$（种）

答：至少有一件是次品的抽法有 9604 种。

20．要想使选出的两个人不相邻，可以把问题分为两步来考虑。

第一步可以先从 10 个人中任选一人，有C_{10}^1种选法。

第二步，由于所选两人不能相邻，故在选另外一个人时，应从剩下的 7 人中任选一人，有C_7^1种选法。但要注意的是，在上面两步的选法中，每种选法都算了 2 次。由以上分析，可由乘法原理解决。

$C_{10}^1 \times C_7^1 \div 2 = 10 \times 7 \div 2$

$= 35$（种）

答：共有 35 种选法。

第十二章　排列组合

1．计算$\frac{P_6^4}{C_6^4}$，$C_7^4 \times C_4^4$

2．从 6 个运动员中选出 4 个人参加4×100米接力，若甲乙两人不能跑第一棒，那么有多少种不同的分配方案。

3．从 5 种菜籽中选出 4 种分别种在 4 块不同土质的土地上，共有多少种不同的种植方法？

4．从 5 个声母，3 个韵母中每次取 3 个声母，2 个韵母的排列方法有几种？

5．有 5 名男司机，4 名女司机，现派 3 名男司机，2 名女司机，到 5 个不同的地方去，有多少种分配方案？

6．从 1、3、5、7 中任取 3 个数字，从 2、4、6、8 中任取 3 个数字，共可组成多少个没有重复数字的六位数？

7．4 名男生 5 名女生站成一排，如果男生不分开，女生也不分开，有多少种不同的站法？

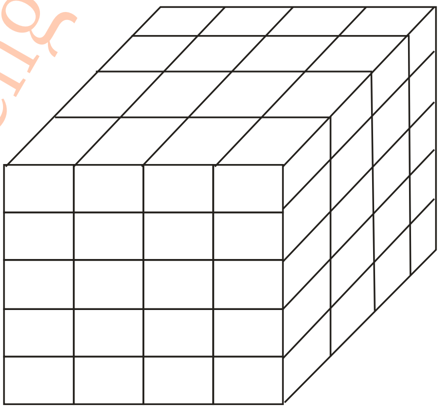
8．某乒乓球队有 5 名女队员和 10 名男队员，从中选出两名男队员和两名女队员进

行混合双打比赛，共有多少种分组方法？

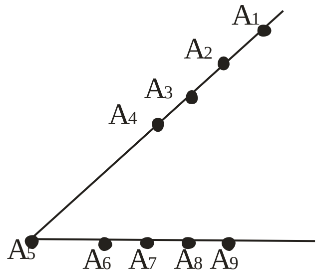
9．有 6 本不同的书分别分给甲、乙、丙三人，如果一人得一本，一人得 2 本，一人得 3 本，有多少种分法？

10．有 13 个队参加足球赛，比赛分两个组，第一组七个队，第二组六个队，各组先进行单循环赛，然后由各组的前两名共四个队再进行单循环赛决定冠亚军，共需比赛多少场？

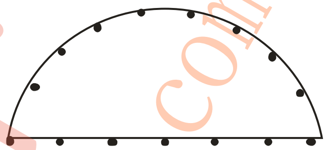
11．下图中共有多少个长方体？



12．从A_1到A_9这九个点中任选三个点可以组成多少个不同的三角形？



13．在一个半圆周上共有 15 个点，以这些点为顶点，可以画出多少个四边形？



14．8 人站成前后两排，每排 4 人，其中某两人要站在前排，某一人要站在后排，有多少种不同排法？

15．五对孪生兄妹排成一排，每对兄妹不能分开，共有多少种坐法？

16．有 5 个不同编号的红球，7 个不同编号的白球，从中选出 5 个，使红球比白球少的选法有多少种？

17．10 名男生，8 名女生，现在要选出 8 人去开会，如果某两名女生、某两名男生最多入选两人，那么共有多少种选法？

18．由数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字，且 2 与 3 不相邻的三位数？

19．从 1、3、5 中在选两个数字，从 0、2、4 中任取两个数字，共可组成多少个没有重复数字的四位数？（原题有误）

20．由数字 0、1、2、3、4 可以组成多少个没有重复数字的偶数？

分析解答

1．$\frac{P_6^4}{C_6^4}=\frac{6\times5\times4\times3}{\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}}=24$

$C_7^4\times P_4^4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times4\times3\times2\times1$

$=7\times6\times5\times4=840$

2．由于甲、乙两人不能跑第一棒，故跑第一棒的人可以从剩下的 4 人中任选一人，有C_4^1种选法。而对于跑第二棒、第三棒、第四棒的人，可以从其它 5 人中选出 3 人进行排列。最后由乘法原理解决。

$C_4^1\times P_5^3=4\times5\times4\times3$

$$=240(种)$$

答：有 240 种不同的分配方案。

3．在这个问题中，第一步应从 5 种菜籽中选出 4 种，有C_5^4种选法。这是因为选菜籽只与选出的菜籽有关，与菜籽被选出的顺序无关，所以是组合问题。第二步是把所选出的 4 种菜籽按照一定的顺序种在不同的土地上，是排列问题。由乘法原理求积即可求出问题。

$$C_5^4 \times P_4^4 = \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$=120(种)$$

答：共有 120 种不同的种植方法。

4．分析方法同第 5 题。

$$C_5^3 \times C_3^2 \times P_5^5 = 10 \times 3 \times 120$$

$$=3600(种)$$

答：共有 3600 种排法。

5. 分析过程类似于第 2 题。不同的是要分三步完成，第一步，选 3 名男司机，有C_5^3种选法；第二步，选 2 名女司机，有C_4^2种选法；第三步，选出的 5 名司机按照一定的顺序进行排列。

$$C_5^3 \times C_4^2 \times P_5^5 = 10 \times 6 \times 120$$

$$=7200(种)$$

答：共有 7200 种分配方案。

6．分析方法同第 5 题。

$$C_4^3 \times C_4^3 \times P_6^6 = 4 \times 4 \times 720$$

$$=11520(个)$$

答：共可组成 11520 个没有重复数字的六位数。

7．在这个问题中，男生不分开，有P_4^4种站法，女生不分开，有P_5^5种站法。又由于男生与女生可以交换位置，故有P_2^2种换法。最后可由乘法原理解决。

$$P_4^4 \times P_5^5 \times P_2^2 = 24 \times 120 \times 2$$

$$=5760(种)$$

答：共有 5760 种不同站法。

8．解答这个问题，可分三步完成。

第一步，从 5 名女队员中选出 2 名，有C_5^2种选法。

第二步，从 10 名男队员中选出 2 名，有C_{10}^2种选法。

第三步，所选的 4 名队员在比赛时，两名女队员（或两名男队员）又可交换位置，有P_2^2种换法。

由乘法原理可知，求积即可

$$C_5^2 \times C_{10}^2 \times P_2^2 = 10 \times 45 \times 2$$
$$= 900(种)$$

答：共有 900 种分组方法。

9．在这个问题中，可以先选出符合要求的一本书，2 本书和 3 本书，然后再把所选的书按照一定的顺序分给甲、乙、丙三人。

$$C_6^1 \times C_5^2 \times C_3^3 \times P_3^3$$
$$= 6 \times 10 \times 1 \times 6$$
$$= 360(种)$$

答：有 360 种分法。

10．比赛的所有场次包括三类：第一组中比赛的场次、第二组中比赛的场次、决赛时比赛的场次。

第一组中有 7 个队，每两队比赛一场，共比赛C_7^2场；第二组中有 6 个队，每两队比赛一场，共比赛C_6^2场，决赛中 4 个队，共比赛C_4^2场。

由加法原理求和即可

$$C_7^2 + C_6^2 + C_4^2 = 21 + 15 + 6 = 42(场)$$

答：共需比赛 42 场。

11．由于任何一个长方体都是三组分别平行的平面所构成，因此，可以先从平行于上面的所有平面中任取两个平面，再从平行于前面的所有平面中任取两个平面，最后从平行于左面的所有平面中任取两个平面。由乘法原理，求积即可。

$$C_6^2 \times C_5^2 \times C_5^2 = 15 \times 10 \times 10$$
$$= 1500(个)$$

答：图中共有 1500 个长方体。

12．因为在一条直线上的三个点不能组成三角形，所以可从所有的选法中去掉两条直线上不合要求的选法。

$$C_9^3 - C_5^3 - C_5^3 = 84 - 10 - 10$$

$= 64(个)$

答：共可组成 64 个不同的三角形。

13．分析方法类似于第 12 题，但要注意的是所去掉选法分为 2 类，即四个顶点均在直径上和三个顶点在直径上。

$C_{15}^4 - C_7^4 - C_7^3 \times C_8^1$

$= 1365 - 35 - 35 \times 8$

$= 1050(个)$

答：可以画出 1050 个四边形。

14．要想使某两人站在前排，某一人站在后排，可分三步完成。最后可由乘法原理解决。

第一步，必须站在前排的两个人可以从四个位置中任取两个并按一定顺序站好。共有P_4^2种站法。

第二步，必须站在后排的某个人可以坐在后排 4 个位置中的任何一个，共有P_4^1种站法。

第三步，剩下的 5 个人可以进行排列。最终使 2 个人站在前排，3 个人站在后排。

$P_4^2 \times P_4^1 \times P_5^5 = 12 \times 4 \times 120$

$= 5760(种)$

答：共有 5760 种排法。

15．由于兄妹不能分开，故可把每对兄妹看成一个整体，问题转化成 5 个整体全排列问题。但要注意到，在整体排列过程中，每对兄妹又可以交换位置。因此，每对兄妹又都是排列问题。最后，可由乘法原理解决。

$P_5^5 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2 \times P_2^2$

$= 120 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 3840(种)$

答：共有 3840 种坐法。

16．要使取出的红球比白球少，需要分三类来考虑。

第一类，取 0 个红球，5 个白球，共有C_7^5种取法。

第二类，取 1 个红球，4 个白球，共有$C_5^1 \times C_7^4$种取法。

第三类，取 2 个红球，3 个白球，共有$C_5^2 \times C_7^3$种取法。

最后，可由加法原理解答。

$$C_7^5+C_5^1\times C_7^4+C_5^2\times C_7^3$$
$$=21+5\times35+10\times35$$
$$=546(\text{种})$$

答：红球比白球少的选法有 546 种。

17. 根据条件“某两名女生、某两名男生最多入选两人”，可以把问题分为三类解决。

第一类，某两名男生和某两名女生都不入选。这时，问题转化成由剩下的$(10+8-4)$个人中选 8 个人的组合问题，共有C_{14}^8种选法。

第二类，某两名男生和某两名女生中只入选一人，这时，共有$C_4^1\times C_{14}^7$种选法。

第三类，某两名男生和某两名女生中只入选两人，这时，共有$C_4^2\times C_{14}^6$种选法。最后，可由加法原理解答。

$$C_{14}^8+C_4^1\times C_{14}^7+C_4^2\times C_{14}^6=34747(\text{种})$$

答：共有 34747 种选法。

18. 反过来想，可以从所组成的所有三位数中去掉 2 与 3 相邻的三位数。其中 2 与 3 相邻的三位数共有$3P_2^2\times P_2^2$种。

$$P_5^3-3P_2^2\times P_2^2=60-12$$
$$=48(\text{个})$$

答：可以组成 48 个没有重复数字，且 2 与 3 不相邻的三位数。

19. 所有组成的四位数可根据有 0 与无 0 分为两类。

第一类，有 0，这时 4 个数的取法有$C_3^2\times C_2^1=6$种。由于每种取法中都有 0，0 又不能在千位，故每取的 4 个数都可组成$3P_3^3$个四位数。由乘法原理可知，此类情况，共可以组成$3P_3^3\times6$个四位数。

第二类，无 0，这时 4 个数的取法有$C_3^2\times C_2^2=3(\text{种})$，共可组成四位数$C_3^2\times C_2^2\times P_4^4$个。

最后，可根据加法原理解决。

$$3P_3^3\times6+C_3^2\times C_2^2\times P_4^4$$
$$=3\times6\times6+3\times1\times24$$
$$=180(\text{个})$$

答：共可组成 180 个没有重复数字的四位数。

20．由数字 0、1、2、3、4 可组成的偶数可分为五类。

第一类：一位偶数，只有 3 个。

第二类：两位偶数，这时个位可以是 0、2、4 中的某一个，个位是 0，十位有 C_4^1种取法，个位是 2，十位有C_3^1种取法；个位是 4，十位也有C_3^1种取法。故两位偶数共有$(C_4^1+C_3^1\times2)$个。

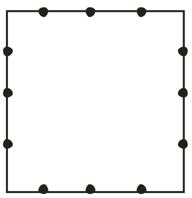
类似地可知，第三类中共有$(P_4^2+3\times C_3^1\times2)$个三位偶数，第四类中共有$(P_4^3+3\times P_3^2\times2)$个四位偶数；第五类中共有$(P_4^4+3\times P_3^3\times2)$个五位偶数。最后，可由加法原理解决。

$$3+(C_4^1+C_3^1\times2)+(P_4^2+3\times C_3^1\times2)+(P_4^3+3\times P_3^2\times2)+(P_4^4+3P_3^3\times2)=163(\text{个})$$

答：可以组成 163 个没有重复数字的偶数。

第十三章　排列组合的综合应用

1．如图、正方形的每条边上都有 3 个点，任取 3 个点为顶点，可以画出多少个三角形？



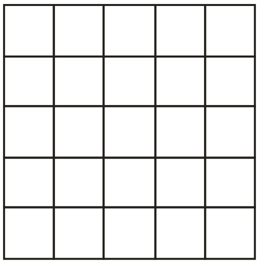
2．书架上有不同的中文书 8 本，不同的英语书 6 本，不同的法文书 9 本，从其中

取出不同文字的书 2 本，共有几种不同的取法？

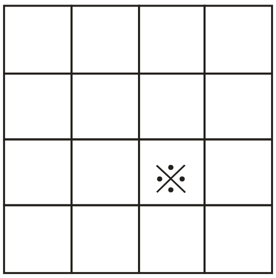
3. 用 1、2、3、4 这四个数字中的任意几个表示不同的信息（顺序不同表示的信息不同），共有多少种不同信息？

4. 10 个人围成一圈，从中选出三个人，其中恰有两个相邻，共有多少种不同选法？

5. 如图，共有 25 个小方格，要把 A、B、C、D、E 五个不同的棋子放在方格里，每行和每列只能出现一个棋子，那么共有多少种放法？



6. 图中包含“※”的长方形共有多少个？



7. 从 20 名运动员中挑选 6 个组成一个代表队参加国际比赛，但运动员甲和乙两人中至少有一个必须参加代表队，一共有多少种选法？

8．学校乒乓球队有 10 名男生、8 名女生，现在要选 8 人参加区里比赛，某两名女生最多入选一人，某两名男生至少入选一人，共有多少种选法？

9．北京市的电话号全是八位数，若前三位只能用 1—9 这 9 个数码，则北京市安装了多少台不同的电话号码的电话？

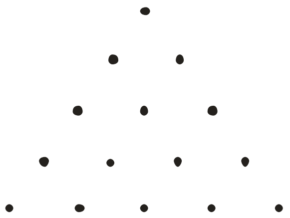
10．用 0、1、2、3、4、5、6 这七个数字可以组成多少个比 300000 大的无重复数字的六位偶数？

11．7 人站成一排，其中 4 名男生、3 名女生，如果限定女生不能站两头，且女生站在一起，一共有多少种不同的站法？

12．把 5 个小灯泡排成一排，每个小灯泡都有亮和不亮两种状态，共可以表示多少种不同的信号？

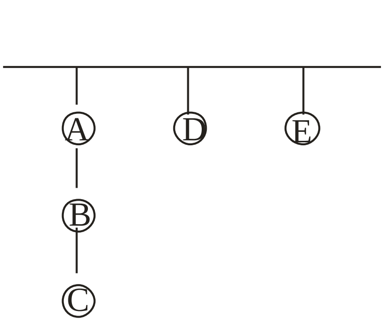
13．四个好朋友去看电影，电影院有 3 个入口，他们进入电影院共有多少种走法？

14．从图中 15 个点中任取 3 个点，可画出多少个三角形？



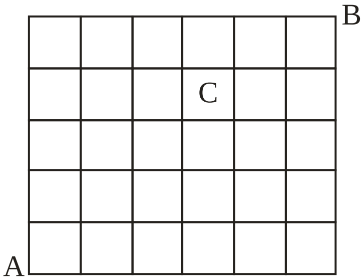
15．甲、乙二人在象棋比赛中，赛了 3 盘，试列出所有可能的结果？

16．如图，在一次射击比赛中，5 个汽球排成三列，要求按下列规则击碎气球，先挑选一列，然后必须击碎这列中尚未被击碎的气球中最低的一个，遵循这一规则，击碎全部五个气球可以有多少种不同的次序？



17. 有一角人民币 2 张，五角人民币 3 张，壹元人民币 4 张，伍元人民币 1 张，用这些纸币可以组成多少种不同的币值？

18. 如图，不过 C 点，从 A 点走到 B 点最短的走法有多少种？



19. 七个相同的球放入四个不同的盒子里，每个盒子至少放一个，不同的放法有多少种？

20. 用 1、2、3、4 这四个数字组成没有重复数字的四位数$\overline{abcd}$，如果$a \neq 1$，$b \neq 2$，$c \neq 3$，$d \neq 4$，那么满足上述条件的四位数一共有多少个？

分析解答

1．在这个问题上，我们可以从所有的选法中去掉不合要求的选法。即去掉的是每条边上不能画出三角形的选法。

$$C_{12}^{3}-C_{3}^{3}\times 4=220-4$$
$$=216(\text{个})$$

答：可以画出 216 个三角形。

2．由于取出的 2 本书文字不同，故可把所有的取法分为三类。

第一类，中文书和英文书各取一本，由乘法原理，共有$C_{8}^{1}\times C_{6}^{1}$种取法。

第二类，中文书和法文书各取一本，共有$C_8^1 \times C_9^1$种取法。

第三类，英文书和法文书各取一本，共有$C_6^1 \times C_9^1$种取法。

最后，由加法原理解决。

$$C_8^1 \times C_6^1 + C_8^1 \times C_9^1 + C_6^1 \times C_9^1$$
$$= 48 + 72 + 54$$
$$= 174(\text{种})$$

答：共有 174 种取法。

3．所有的信息可以分四类。

第一类，由一个数字组成的信息，有 4 种。

第二类，由两个数字组成的信息，这时，信息不但与所取数字有关，而且与数字的排列顺序也有关，故是排列问题，因此由两个数字组成的信息共有P_4^2种。

同样，第三类，由三个数字组成的信息有P_4^3种；第四类，由四个数字组成的信息有P_4^4种。

最后，可由加法原理解决。

$$4 + P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24$$
$$= 64(\text{种})$$

答：共有 64 种不同信息。

4．要想使选出的三个人恰有两人相邻，可分二步完成。

第一步，从 10 人中选出两人相邻的方法有 10 种，即 A 和 B、B 和 C，C 和 D……G 和 A。

第二步，由于所选的三个人恰有两人相邻，故在选另外一人时应从与相邻两人不相邻的（1…—4）个人中任选一人，有C_6^1种选法。

由乘法原理可知，求积即可。

$$C_6^1 \times 10 = 6 \times 10 = 60(\text{种})$$

答：共有 60 种不同的选法。

5．如果我们假定 A 只能放在第一列，B 只能放在第二列，C 只能放在第三列，D 只能放在第四列，E 只能放在第五列，且每行、每列只能出现一个棋子，那么共有P_5^5种放法。但是条件又允许五个棋子放在不同列中，故又有P_5^5种放法。由乘法原理可知所求问题需把两个全排列数求积。

$$P_5^5 \times P_5^5 = 120 \times 120$$
$$= 14400(\text{种})$$

答：共有 14400 种放法。

6. 如果包含“※”的长方形的四条边的位置确定了，那么长方形也就确定了，故问题转化成在※号的上、下、左、右各取一边可组成多少个长方形。

由于从※号上、下、左、右各取一边分别有C_3^1、C_2^1、C_3^1、C_2^1种取法，故问题可由乘法原理解答。

$C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36(个)$

答：图中包含※的长方形共有 36 个。

7. 所有选法可根据甲参加乙没参加、乙参加甲没参加和甲、乙都参加三类。

第一类与第二类都是把问题转化成从 18 人中任选 5 人的组合问题，各有C_{18}^5种选法。

第三类是把问题转化成从 18 人中任选 4 人的组合问题，有C_{18}^4种选法。根据加法原理，三类选法数求和即可。

$C_{18}^5 + C_{18}^5 + C_{18}^4 = 20196(种)$

答：共有 20196 种不同选法。

8. 根据某两名女生最多入选一人，某两名男生至少入选一人，可把所有符合要求的选法分为四类。

第一类：某两名女生都不入选，某两名男生只入选一人，共有$C_2^1 \times C_{14}^7$种选法。

第二类：某两名女生都不入选，某两名男生都入选，共有C_{14}^6种法。
选法。

第三类：某两名女生入选一人，某两名男生入选一人，共有$C_2^1 \times C_2^2 \times C_{14}^6$种选法。

第四类：某两名女生入选一人，某两名男生都入选，共有$C_2^1 \times C_2^2 \times C_{14}^5$种选法。最后由加法原理解决。

$C_2^1 \times C_{14}^7 + C_{14}^6 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_{14}^6 + C_2^1 \times C_2^2 \times C_{14}^5$
$= 6864 + 3003 + 12012 + 4004$
$= 25883(种)$

答：共有 25883 种选法。

9. 由题意，我们可以先确定前三位数码的取法，由于前三位只能从 1—9 这 9 个数中取，数字又允许重复，因此前三位的每一位数码都有 9 种取法。同理可知，后五位的每一位数码都有 10 和取法，因为后五位可以取 0。由乘法原理可知，

求积即可求出问题。

$$9\times9\times9\times10\times10\times10\times10\times10$$
$$=72900000(台)$$

答：共安装了 72900000 台不同的电话号码的电话。

10. 要使组成的六位数是偶数，个位必需是 0、2、4、6 中的某一个，故可分为四种情况考虑。然后由加法原理解决。

第一种情况：个位是 0。由于所组成的六位数要比 300000 大，故十万位上数字只能从 3、4、5、6 中任选一个，有C_4^1种选法。而其它四位上的数可由剩下的五个数中任选四个进行排列，有P_5^4种选法，由乘法理。个位是 0，且比 300000 大的六位偶数共有$C_4^1\times P_5^4$个。

第二种情况：个位是 2，类似于第一种情况，也有$C_4^1\times P_5^4$个比 300000 大且没有重复数字的六位偶数。

第三种情况：个位是 4，这时十万位上数字不能在取 4，故十万位上只有C_3^1种选法。所以，此类共有符合要求的四位数$C_3^1\times P_5^4$个

同样可以知道，个位是 6 时，符合要求的四位数也有$C_3^1\times P_5^4$个，这时十万位上不能是数字 6。

$$C_4^1\times P_5^4+C_4^1\times P_5^4+C_3^1\times P_5^4+C_3^1\times P_5^4$$
$$=(4+4+3+3)\times120$$
$$=14\times120$$
$$=1680(个)$$

答：共可组成 1680 个比 300000 大且没有重复数字的六位偶数。

11. 由于女生不能站在两端，故站在两端的两名男生可有P_4^2种选法。又由于女生不能分开，所以，女生本身可有P_3^3种站法。我们还应注意到，女生本身站定后，还可以与剩下的 2 名男生进行排列，有P_3^3种选法。由乘法原理，求积即可。

$$P_4^2\times P_3^3\times P_3^3=12\times6\times6$$
$$=432(种)$$

答：一共有 432 种不同站法。

12. 由于每种信号都是由 5 个灯泡不同状态所构成，故可分为五步来完成，又由于每步都是从两种状态中任取一种，所以每步都有 2 种取法，由乘法原理可知，求积即可。

$$2\times2\times2\times2\times2=32（种）$$

答：共可以表示 32 种不同的信号。

13．由于每个人都有 3 种方法进入电影院，故可由乘法原理解决。

$3\times3\times3\times3=81$（种）

答：共有 81 种走法。

14．因为三角形与三个点的顺序无关，所以此题为组合问题。解答时，可以从组合总数（C_{15}^3）中去掉三点共线不能构成的三角形个数，四点共线不能构成的三角形个数及五点共线不能构成的三角形个数。

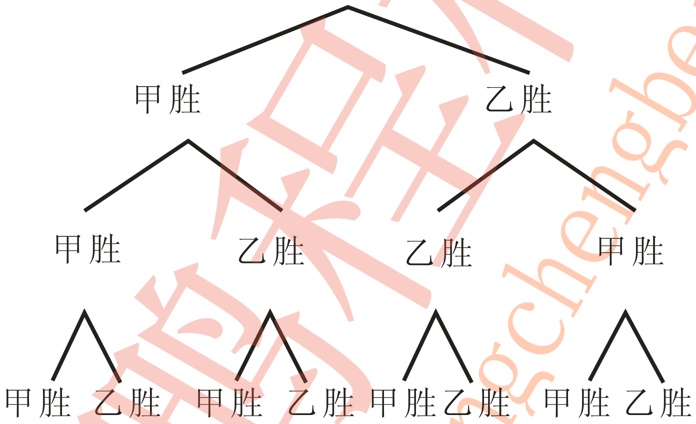
$C_{15}^3-3C_3^3-3C_4^3-3C_5^3$

$=455-3-12-30$

$=410$（个）

答：可画出 410 个三角形

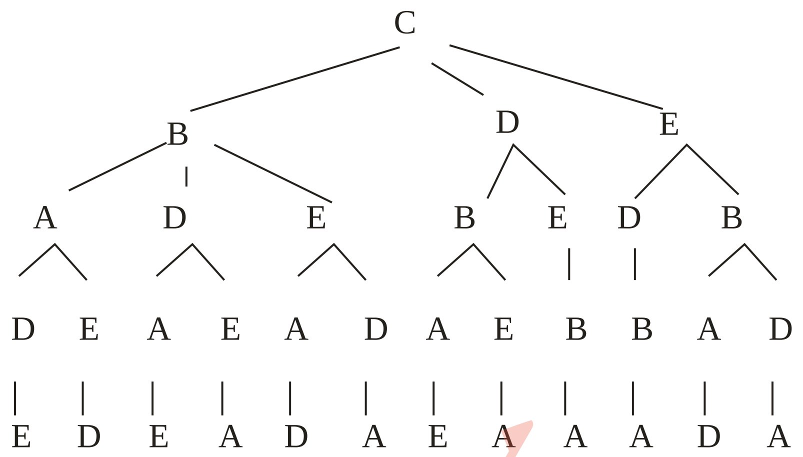
15．我们用树形图来表示两人胜负情况。



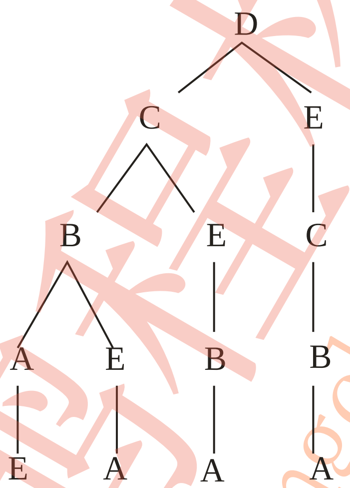
答：共可出现 8 种情况。即甲甲甲、甲甲乙、甲乙甲、甲乙乙、乙乙甲、乙乙乙、乙甲甲、乙甲乙。

16．解答此题可分三步完成，即先击 C、先击 D、先击 E，最后由加法原理解答。

第一步，先击 C



共 12 种。
第二步、先击 D



共 4 种

第三步，先击 E，同先击 D 的情况，共 4 种，

$12+4\times2=20$（种）

答：可以有 20 种不同的次序。

17. 由于 2 张五角人民币与一张壹元人民币币值相同，故可以把 3 张五角人民币，4 张壹元人民币，1 张伍元人民币兑换成 21 张五角人民币，这时问题转化成 2 张一角人民币，21 张五角人民币可以组成多少种不同的币值。

在取币过程中可分两步完成，然后由乘法原理解决。

第一步，从 2 张一角人民币中取，有取 0、1、2 张 3 种取法。

第二步，从 21 张五角人民币中取，有取 0，1，2，……21 张 22 种取法。

但要注意，应从所有取法中去掉全不取的一种情况。

$3\times 22-1=65$（种）

答：可以组成 65 种不同的币值。

18. 由于所有从 A 到 B 的最短走法都是由 5 个 a 和 6 个 b 这 11 个元素所构成的(如图)，并且任何一种走法中的 5 个 a 的位置确定了，6 个 b 的位置也就确定了，故从 A 到 B 的所有最短走法相当于从 11 个位置中选出 5 个位置的组合数。即C_{11}^{5}种走法。

同理我们可以求出从 A 经 C 到 B 的所有最短走法有$C_{6}^{3}\times C_{5}^{2}$种。

有了以上两个条件，只要从所有最短走法中去掉经过点 C 的最短走法，问题也就解决了。

$C_{11}^{5}-C_{6}^{3}\times C_{5}^{2}=462-200=262$（种）

答：共有 262 种走法。

19. 由于 7 分成 4 个数之和的情况有以下 3 种情况$7=1+1+1+4$，$7=1+2+2+2$，$7=1+1+2+3$，故所有的放法可分三种情况。

第一种情况，$7=1+1+1+4$，由于 4 个球可以放在 4 个盒子中的任何一个，有 4 种放法。而其它盒子只放一个球，无论怎样调换位置，都是相同的放法，故只有 4 种放法。

第二种情况，$7=1+2+2+2$，类似于第一种情况，也有 4 种放法。

第三种情况，$7=1+1+2+3$，此种情况说明，有两个盒子里各放 1 个球，另外两个盒子里分别放 2 个和 3 个球，故可分两步完成。

第一步，从 4 个盒子中任取两个各放一个球，有C_{4}^{2}种取法。

第二步，余下的盒子分别放 2 个球和 3 个球，共有P_{2}^{2}种放法。

由乘法原理可知，此种情况共有$C_{4}^{2}\times P_{2}^{2}$种放法。

最后，可由加法原理解决。

$4+4+C_{4}^{2}\times P_{2}^{2}$

$=8+12$

20（种）

答：共有 20 种不同的放法。

20. 由$a\neq 1$可把所有符合要求的四位数分为三类，即$a=2$，$a=3$，$a=4$，下面用树形图说明所有情况。

a	b	c	d	
	1	4	3	
2	3	1	4	（舍去） 共3个
		4	1	
	4	1	3	
	1	2——	—4	（舍去） 共3个
3		4——	—2	
	4	1——	—2	
		2——	—1	
	1——	—2——	—3	共3个
4	3	1——	—2	
		2——	—1	

$3+3+3=9(\text{个})$

答：满足条件的四位数一共有 9 个。

第十四章　行程问题

1．甲、乙两队同时修一条路，全长 4320 米，甲队从一端起每天修 25 米，乙队从

另一端起每天比甲队少修 5 米，两队在离中点多远处汇合？

2．一列客车以每小时 72 千米的速度行驶，客车司机发现对面开来一列货车，速度是每小时 54 千米，这列货车从他身边驶过，共用了 10 秒钟，求这列货车的长度是多少米？

3．上午 9 时有一列货车以每小时 49 千米的速度从甲城开往乙城，上午 11 时，又有一列客车以每小时 67 千米的速度从甲城开往乙城，为了行车安全，列车间的距离不应超过 8 千米，那么货车最晚在什么时刻停车，让客车开过去？

4．一个人开汽车从 A 城到 B 城要行 432 千米。开始时，他以每小时 48 千米的速度行驶，但途中因汽车故障停车修理用去 2 小时，因此为了按原定计划准时到达，他须把速度增加 24 千米来跑完以后的路程，问：他是在离甲城多远的地方停车的？

5．甲、乙两人骑车从一条公路的两端同时相向骑行，甲每小时行 12 千米，乙每小时行 10 千米，结果，甲比乙早 2 小时到达公路的中点，这条公路有多长？

6. 有人沿着公路步行前进，对面开来一辆汽车，步行人问司机："后面是否有骑车人？"司机回答："10 分钟前我曾超过一个骑车人。"步行人继续走了 10 分钟遇到了这个骑车人。已知骑车人的速度是步行速度的 4 倍，请问：汽车的速度是步行速度的多少倍？

7. A、B 两镇相距 150 千米，甲从 A 镇出发以每小时 13 千米的速度向 B 镇行驶，乙、丙均从 B 镇与甲同时出发向 A 镇行驶，乙的速度为每小时 12 千米，丙的速度为每小时 18 千米，途中丙见到 A 即折回头向 B 镇走，遇见乙则又折回头向 A 镇走，这样往返，一直到三人均在途中相遇为止。请问：丙走了多少千米？

8. 摩托车和自行车从相距 135 千米的两地相向而行，自行车于 13 时出发，摩托车于 14 时出发，在 16 时相遇。摩托车的速度是自行车的 3 倍。两种车各行多少千米？

9. 弟弟以每小时 6 千米的速度从家出发步行去香山公园，2 小时后，哥哥离家以每小时 30 千米的速度骑车追赶弟弟。问：多少时间后，哥哥能追上弟弟？

10．小红于 17 时离校，以每分钟 50 米的速度步行回家，小东于 17 时 15 分骑车从学校出发追赶小红，结果在离学校 1000 米处追上小红，请问小东的骑车速度。

11．甲、乙两队合修一条长 2100 米长的水渠，甲队每天修 90 米，乙队每天修 85 米，两队各从一端相向施工，相遇时，甲队超过中点多少米？

12．一艘轮船发生漏水事故，船长立即安排用两部抽水机同时向外抽水，当时已漏水 450 桶，一部抽水机每分钟抽水 18 桶，另一部每分钟抽水 12 桶，经过 25 分钟后把水抽完。问：每分钟漏进水多少桶？

13．一只船从 A 港开往相距 437 千米的乙港，去时顺水 19 小时到达，返回时逆水则需 23 小时到达，请问船在静水中的速度和水流的速度各为多少？

14. 小东计划在某一时间骑车到达雁栖湖，如果他坐旅游汽车以每小时 40 千米的速度行驶，则比骑车去早到 3 小时；如果他以每小时 8 千米的速度步行去，则骑车去晚到 5 小时。请问：他骑车去并按计划准时到达，则骑车的速度应是多少？

15. 小红、小东和小明三人从甲乙两地相向而行，小红以每分钟 70 米的速度与小东以每分钟 80 米的速度同时从甲地向乙地行驶，小明则以每分钟 90 米的速度同时从乙地向甲地行驶，小明遇到小东以后 2 分钟又同小红相遇。请问：甲乙两地相距多少米？

16. 修路队修一条公路，已经修了 775 米，以后如果每天比原来多修 6 米还要 40 天修完，但最后一天要修 15 米。如果按原来的工作效率修路，就需要多工作 3 天，请问：这条公路总长多少米？

17. 小红以每小时行 6 千米的步行速度从学校出发到 30.6 千米外的营地报到，营地老师半小时后闻讯前往迎接，每小时比小红多走 1.8 千米，又过了 1.5 小时，小立从学校骑车也去营地报到，结果三人同时在途中相遇。请问：骑车每小时行驶多少千米？

18．一行人和一骑车人同时同向沿铁路边行进，行人速度为每小时 3.6 千米，骑车人每小时 10.8 千米。这时一列火车从他们背后开过来，火车通过行人用了 22 秒，通过骑车人用了 26 秒，问：这列火车的身有多长？

19．一人骑自行车和一人步行在同一条公路上，同方向行驶，骑车人的速度是步行人的 4 倍，每隔 8 分钟，有一辆公共汽车超过步行人，每隔 12 分钟有一辆公共汽车超过骑车人，若公共汽车始发站发车时间间隔不变，那么间隔几分钟发一辆公共汽车？

20．从时针指向七点开始，再过多少分钟，则时针与分钟正好重合？

分析解答

1． 解法一：$25\times[4320\div(25+25-5)]-4320\div2$

$= 25 \times [4320 \div 45] - 2160$

$= 25 \times 96 - 2160$

$= 2400 - 2160$

$= 240(米)$

答：略

解法二：$4320 \div 2 - (25 - 5) \times [4320 \div (25 + 25 - 5)]$

$= 4320 \div 2 - 20 \times [4320 \div 45]$

$= 2160 - 20 \times 96$

$= 2160 - 1920$

$= 240(米)$

答：略

2．本题实际上是货车的车尾与客车的车头的相遇问题，它们的速度和乘以相遇时共用的时间，就是货车的车身长度。

解：客车的速度：72 千米/小时=20 米/秒，

货车的速度：54 千米/小时=15 米/秒。

$(20 + 15) \times 10 = 350(米)$

答：这列货车的长是 350 米。

3．解法一：

$[49 \times (11 - 9) - 8] \div (67 - 49) + 11$

$= 90 \div 18 + 11$

$= 5 + 11$

$= 16(时)$

答：略。

解法二：设货车行 x 小时追上客车

$67x = 49 \times [x + (11 - 9)]$

解得：$x = 7$

$7 + 9 = 16(时)$

答：略。

4．解法一：设他行了 x 小时后停车。

$432 - 48x = (48 + 24)(432 \div 48 - 2 - x)$

$432 - 48x = 72(7 - x)$

$24x = 72$

$x = 3$

$48 \times 3 = 144(千米)$

答：略。

解法二：

$48 \times \{432 \div 48 - 2 - [432 - 48 \times (432 \div 48 - 2)] \div 24\} = 144(千米)$

答：略。

5. 解法一：$10 \times [12 \times 2 \div (12 - 10)] \times 2 = 240(千米)$

答：略

解法二：设这条公路有 x 千米长。

$x \div 10 \div 2 - x \div 12 \div 2 = 2$

$x \div 10 - x \div 12 = 4$

解之得：$x = 240$

答：略

6. 汽车与骑车人是追及问题，骑车人又与步行人是相遇问题，由题目可知汽车与骑车人的追及路程与骑车人与步行人的相遇路程是相等的，追及路程 $=$ $(汽车速度 - 骑车速度) \times 追及时间$。相遇路程 $= (骑车速度 + 步行速度) \times$ 相遇时间，因此，可得出：

$(汽车速度 - 骑车速度) \times 10$ 分钟 $= (骑车速度 + 步行速度) \times 10$ 分钟。

即：汽车速度 $-$ 骑车速度 $=$ 骑车速度 $+$ 步行速度

这样就可以求出汽车速度：

汽车速度 $=$ 步行速度 $+$ 骑车速度 $\times 2$

由于已知骑车速度是步行速度的 3 倍，所以步行速度为 1 倍

因此本题的解是

$1 + 3 \times 2 = 7$（倍）

答：汽车速度是步行速度的 7 倍。

7. 要求丙走了多少千米，则只要求出丙走了多少时间就可以了，而丙走的时间正是甲、乙相遇时间。

所以本题的解是：

$18 \times [150 \div (13 + 12)] = 108(千米)$

答：丙走了 108 千米。

8．解法一：设自行车每小时行 x 千米

$$[135-(14-13)x]\div(3x+x)=16-14$$

$$[135-x]\div 4x=2$$

$$x=15$$

自行车行驶距离：$15\times(16-13)=45(\text{千米})$

摩托车行驶距离则为 90 千米。

答：略

解法二：$135\div[(16-13)+(16-14)\times 3]=15(\text{千米})$

自行车行：$15\times(16-13)=45(\text{千米})$

摩托车行：$135-45=90(\text{千米})$

答：略。

9．这是一道追及问题，追及时间 = 追及路程 ÷ 速度差。

因此本题的解为：

$(6\times 2)\div(30-6)=0.5(\text{小时})$

答：0.5 小时后，哥哥能追上弟弟。

10．这道题实质是追及问题，要求小东的骑车速度须先求出追及时间，小红于 17 时出发，小东于 17 时 15 分出发，说明小红提前 15 分钟出发，因此本题的解为：

17 时 15 分 − 17 时 = 15 分

$(1000-15\times 50)\div 50=5(\text{分钟})$

$1000\div 5=200$（米/分）

答：小东骑车的速度为每小时 200 米。

11. 这是一道相遇问题，要想求甲队超过中点多少米，则先要求出甲队修了多少米，而要求甲修的距离就必须知道甲队修的时间所以本题的解为：

$90\times[2100\div(90+85)]-2100\div 2$

$=90\times 12-1050$

$=1080-1050$

$=30$（米）

答：甲队超过中点 30 米。

12．这道题实质是追及问题。

解法一：$[(18+12)\times 25-450]\div 25=12(桶)$

答：略

解法二：设每分钟漏进水 x 桶。

$$(18+12-x)\times 25=450$$

$$(30-x)\times 25=450$$

$$25x=300$$

$$x=12$$

答：略。

13．因为顺水速度=船在静水的速度+水流速度、逆水速度=船在静水的速度−水流速度，因此，船在静水的速度=（顺水速度+逆水速度）÷ 2

所以本题的解为：

$(437\div 19+437\div 23)\div 2=21$（千米/小时）

$23-21=2$（千米/小时）

答：船在静水的速度为每小时 21 千米，水流速度为每小时 2 千米。

14．解法一：（1）骑车去所用时间：

$(40\times 3+8\times 5)\div(40-8)=5(小时)$

（2）骑车的速度：

$8(5+5)\div 5=16$（千米/小时）

或 $40\times(5-3)\div 5=16$（千米/小时）

答：略。

解法二：设骑车去用 x 小时。

$$40\times(x-3)=8\times(x+5)$$

$$32x=160$$

$$x=5$$

$8\times(5+5)\div 5=16$（千米/小时）

答：略。

15．这道题包含了追及问题与相遇问题，由已知可得到：小明遇到小东以后，小时再走 2 分钟与小红相遇，因此小明与小红 2 分钟所走的距离就是小东与小红的追及距离，因此，可求出追及时间，而追及时间就是小明与小东的相遇时间，求出相遇时间就可求出甲乙两地的距离。

相遇（追及）时间：$(70+90)\times 2\div(80-70)=32$（分）

甲乙距离：$(80+90)\times 32=5440$(米)

答：甲乙两地相距 5440 米。

16. 解法一：

（1）原工作效率：$(6\times 40-15)\div 3=75$(米)

（2）未修的长度：$(75+6)\times 40-15=3225$（米）。

（3）公路总长度：$3225+775=4000$（米）

答：略

解法二：设公路总长为 x 米。

$x-775=[(6\times 40-15)\div 3+6]\times 40-15$

解之得：$x=4000$

答：略。

17. 解法一：

（1）小红与老师相遇时老师行走时间：

$(30.6-6\times 0.5)\div(6+1.8+6)=2$（小时）

（2）小立相遇时行驶时间：$2-1.5=0.5$（小时）

（3）小立骑车的速度：$6\times(2+0.5)\div 0.5=30$（千米）

答：略

解法二：设老师行 x 小时与小红相遇。

$6(x+0.5)+(6+1.8)x=30.6$

解出$x=2$

于是小立骑车从学校到相遇地点用了：$2-1.5=0.5$（小时）

所以，他骑车每小时行驶：

$6\times(2+0.5)\div 0.5=30$（千米）

答：略。

18. 首先将单位统一：3.6 千米/小时=1 米/秒，10.8 千米/小时=3 米/秒

解法一：

（1）求火车的速度：$(3\times 26-1\times 22)\div(26-22)=14$（米/秒）

（2）求火车车身长：$(14-1)\times 22=286$（米）

答：略

解法二：

（1）设火车的速度为每秒行 x 米

$(x-1)\times 22=(x-3)\times 26$

解出$x=14$

（2）求车身长度：$(14-1)\times 22=286$（米）

答：略

19. 要求汽车发车的间隔时间，只要求出汽车速度和相邻两汽车的间隔距离即可。

假定骑车的速度用$V_{汽}$表示，步行人的速度用$V_{步}$表示，骑车人的速度为$V_{骑}$表示，从题目中，可知相邻两汽车的间隔距离是相等的，由此，我们可以列出下面等量关系式：

$\left(V_{汽}-V_{步}\right)\times 8=\left(V_{汽}-V_{骑}\right)\times 12$

又$\because V_{骑}=V_{步}\times 4$

则可求得：$V_{步}=\frac{1}{10}V_{汽}$

$\therefore \left(V_{汽}-V_{步}\right)\times 8=7.2V_{汽}=$间隔距离

$\because$ 间隔时间 = 间隔距离 ÷ 汽车速度

$\therefore$ 间隔时间 $=7.2V_{汽}\div V_{汽}=7.2$（分）

答：间隔 7.2 分钟发一辆公共汽车。

20. 这道题实质上是一个追及问题，两针之间的路程差为 35 分格，时针每小时走 5 分格：即它的速度为每分钟$\frac{1}{12}$分格，而分针的速度为每分钟 1 分格，当它们第一次重合时，也就一定是分针从后面追上时针。

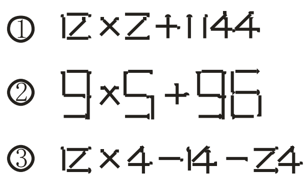
因此本题的解为：

解：$35\div(1-\frac{1}{12})=35\div\frac{11}{12}=38\frac{2}{11}$（分）

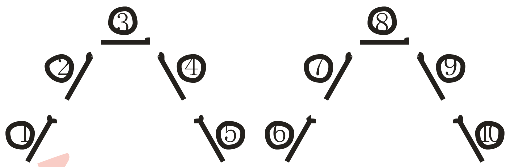
答：再过$38\frac{2}{11}$分钟则时针与分针正好重合。

第十五章　数字游戏

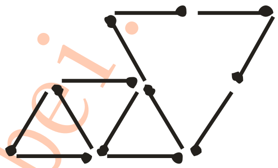
1. 移动一根或两根火柴使下列算式成为等式。



2．如图，移动 4 根火柴棍使杯口向上。



3．如图，请你移动两根火柴，使图形中增加一个等边三角形。



4．你能用 6 根火柴摆 4 个等边三角形吗？

5．有一个小朋友，两只手里分别写着一个奇数和一个偶数，如果用 2 乘以他左手里的数，用 3 乘以他右手里的数之后把两个乘积相加，那么和是 35，请你猜一猜这个小朋友左手藏的是奇数还是偶数？

6. 请你随便想一个两位数，不说出来，然后将你想的两位数乘以 167，再加上 2500，把所得的结果告诉我，我就可以知道你所想的两位数是几？

7．请你随便想一个数，不说出来，然后作下面的运算，先将这个数乘以 4，再加上 124，减去 28，然后再除以 4，减去你所想的数，现在我可以猜到你的答案是什么？

8．把你的出生月份乘以 2，再加上 5，然后乘以 50，再加上你的年龄，减去 365，把最后的结果告诉我，我可以猜出你的年龄和出生月份？

9．二人轮流报数，每人每次报出的数是 1 至 4 的自然数，同时把两人所报数一一累加起来，谁先使这个累加和达到 41，谁就获胜，问怎样才能确保获胜？

10．两人按自然数顺序轮流报数，每人每次只能报 1 个、2 个或 3 个数，如第一人报 1、2、3，第二人就可以接着报 4、5、6，这样继续下去，谁报到 30，谁就获胜，问怎样才能取得胜利？

11．1997 个空格排成一排，第一格中放有一枚棋子，现有两人做游戏，轮流移动棋子，每人每次可前移 1 格、2 格、3 格或 4 格；谁选移到最后一格，谁失败。问怎样的移法才能确保获胜？

12．甲、乙二人玩轮流从下图选数的游戏，谁选的数中有三个在同一条直线上，谁就胜，先选的人有没有必胜的方案？

6	1	8
7	5	3
2	9	4

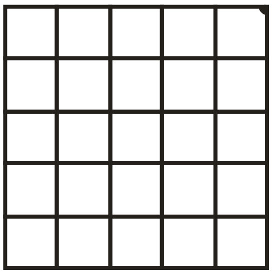
13．两人轮流在一张正方形桌面上放五枚硬币，规则是①每人每次放一枚；②任何两个硬币不能有重迭部份；③已放过的硬币位置不能改变。谁放完一枚后，使得对方无法再往桌面的放硬币时，谁就算获胜。问怎样放才能保证获胜？

14．有两堆火柴，其中甲堆 27 根，乙堆 18 根，两人轮流从其中任意一队火柴中取出一根或几根火柴，谁最后把火柴取完，谁就获胜，问怎样取才能获胜？

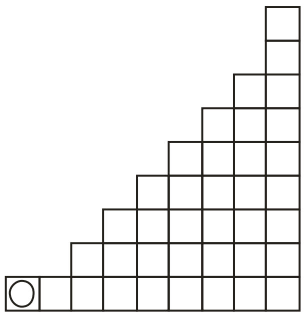
15．有三堆棋子，棋子数分别为 25、13、13，甲、乙两人轮流从其中任意一堆中取棋子，并且至少取一枚，谁先将棋子取完，谁获胜，怎样取必胜？

16. 一张白纸上开始写了三个数：4、4、4，然后对这三个数操作如下，任意擦去一个数，换上另外两个数的和再减去 1 所得的差，这样操作有限次之后，白纸上可否出现 19、1985、1999 这三个数？

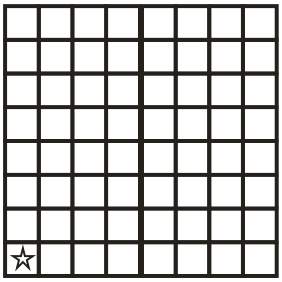
17. 在5×5方格图的右上角放一枚棋子，每一步只能向左、向下或向左下对角线走一格，二人交替走，谁先达到左角，谁为胜者，问必胜的策略是什么？



18. 把一棋子放在下图左下角格内，双方轮流移动棋子，可以向右、向上或向右上移一次可移动任意多格。谁把棋子走进顶格，谁就获胜，问如何走法？



19. 在8×8棋盘上有一粒棋子，它放在左下角的方格里，甲、乙两人玩游戏，由甲开始，二人交替地移动这粒棋子，每次只能向上、向右或向右上方移动一格，谁把棋子移到右上角谁胜，问应采取什么办法才能取胜？



20．请你随意选定 1—12 中的任一个数，不要说出来，我用教鞭在时钟的字盘中指点，并规定，我每指一下，你就要在原先的数上加上 1，当你加到 20 时，我的教鞭恰好指在你原先选定的那个数上。你知道为什么吗？

分析解答

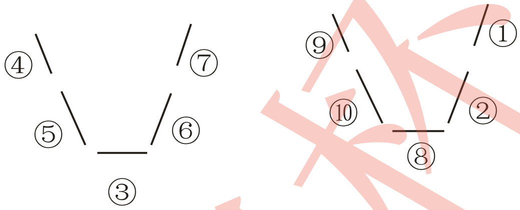
1.

① $12\times12=144$

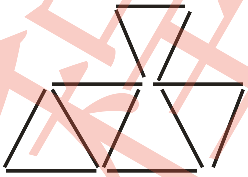
② $3\times5-9=6$

③ $12\times4-4=44$

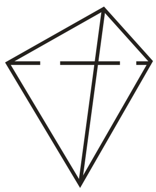
2.



3.



4．6 根火柴可以摆成由 4 个等边三角形组成的正 4 面体。



5．由于 35 是奇数，故$35=$ 偶数 $+$ 奇数。如果 2 乘以的是奇数，3 乘以的是偶数，那么和必是偶数，由此可知 2 乘以的不是奇数而是偶数。即左手是偶数，右手是奇数。

6．假设所想的两位数为 x。由

$$(x\times167+2500)\times3$$
$$=x\times501+7500$$
$$=(x\times5+75)\times100+x$$

可知，得数乘以 3 以后的末两位数字组成的数就是 x，即所想的两位数。

7. 答案是 24，这是因为答案与所想的数无关。证明如下：

设所想的数为 x。

$$
\begin{aligned}
&(x\times 4+124-28)\div 4-x\\
=&(4x+96)\div 4-x\\
=&x+24-x\\
=&24
\end{aligned}
$$

8. 为什么呢？这是通过所得的计算结果再加 115 后看出来的。因为

$$(\text{月份}\times 2+5)\times 50+\text{年龄}-365+115=\text{月份}\times 100+\text{年龄}$$

故此结果的末两位是年龄，末两位以前的是月份。

9. 要想获胜，应使累加和分别为 41，36，21，16，11，6，1，故若先报，应报 1。

10. 要想取得胜利，每次应报到被 4 除余 2 的数。即 30，26，22，18，14，10，6，2。

11. 便于方便，可以把这 1997 个空格编成 1 号、2 号、……、1997 号。要想取胜，应使棋子依次移到号码被 5 除余 1 的空格处。即 1　6、11、16……1991、1996。

12. 先选的人没有必胜的方案。这时因为 6 和 4，1 和 9，8 和 2，3 和 7 都关于数字 5 对称，因此后选者只要保证所选的数与先进者所选的数对称，先选者就没有取胜的可能。

13. 由于正方形是中心对称图形，故对于正方形内的任意一点，总可以找到它的关于中心的对称点。因此，获胜的方法是①先把一枚硬币放在正方形的中心处。②每次对方在桌面上某处放一枚硬币，你就在该处关于中心对称处放一枚硬币。依次下去，第一个无处放的必然是对方。

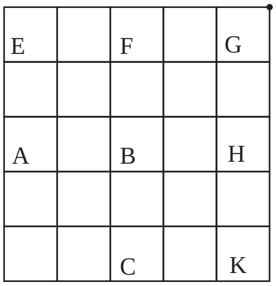
14. 取胜的方法是①先取走甲堆中的 9 根，使得堆火柴数相同。②每次对方在一堆中取走几根火柴，你就在另一堆中也取走几根火柴。这样，每次都给对方留下相同根数的两堆火柴，依次下去，第一个没有火柴取得必是对方，即你可获胜。

15. 要想获胜，第一步应把 25 个棋子这一堆全部取走。给对方留下 0，13，13 这种情况，第二步取法同 14 题。

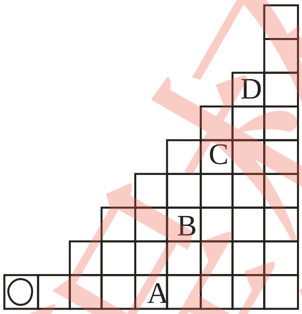
16. 由于 4，4，4 这三个数都是偶数，经过若干次操作后所得到的数为奇数、偶数、偶数情况，不可能出现结果的 3 个奇数情况。因此，白纸上不能出现 19、1985、1999 这三个数。

17. 要想到达左下角，就必须先到达 A、B、C 三处之一。依次类推要想先到达 A、

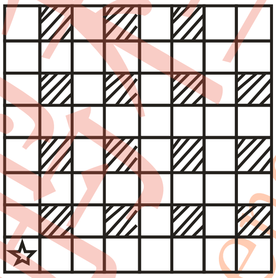
B、C 处，就必须先到达 E、F、G、H、K 中任意一处。由此可知，取胜的策略是，每次都要先占据字母处。



18．分析方法类似于第 17 题。即先要占据对自己有利的位置，A、B、C、D 中任一处。



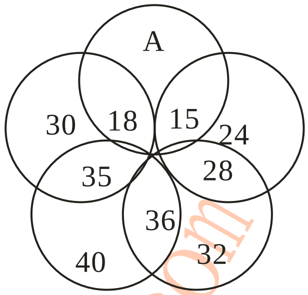
19．甲获胜的方法是每一步都把棋子移到某一个黑格中。



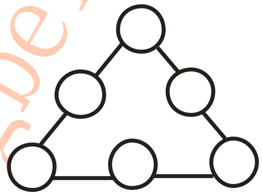
20．为什么会这样呢？这是由于你选的数不超过 12，故我至少在钟表上指 8 下，你才能加到 20，所以只要保证从第 8 下开始，顺着 12、11、10…的顺序依次指下去，就可以指到你所想的数了。

第十六章　有趣的数阵图

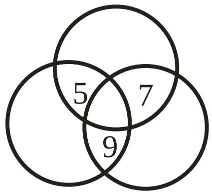
1．如图，五圆相连，每个位置的数字都是按一定规律填写的，请找出规律，并求出 A 所代表的数。



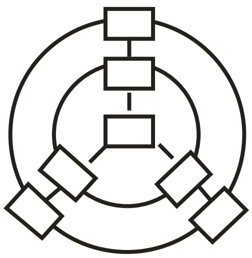
2．将1~6六个自然数分别填入下图的圆圈中，使三角形每边上的三个数之和都等于11。



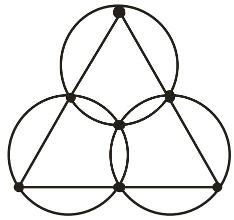
3．在右图的空白区域内分别填上 3、4、6、8 四个数，使每个圆中的四个数的和都为 23。



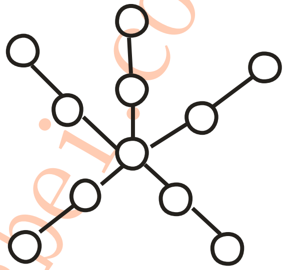
4．把 1 到 7 七个数字填入右图□中，使每一圆和每一线段上三个数之和都相等。



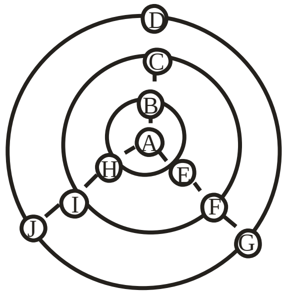
5. 将1~7七个数字放在图的黑点上，使每一圆上四数之和与每一线段上三数之和都等于同一个数。



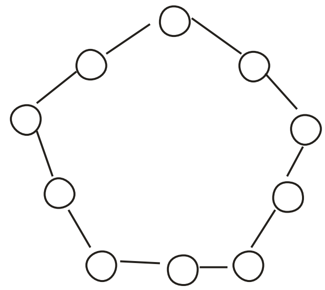
6. 将1~11这十一个连续自然数，分别填入图中的○内，使每条线上三个○内数的和都相等。



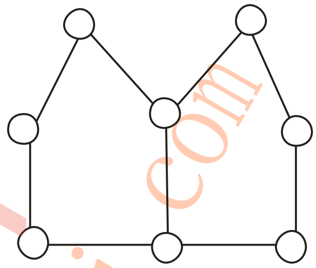
7. 将1~10这十个连续自然数，分别填入图中的○中，使每个大圆上的三个○内数的和相等，每条线段上四个○内数的和也相等。



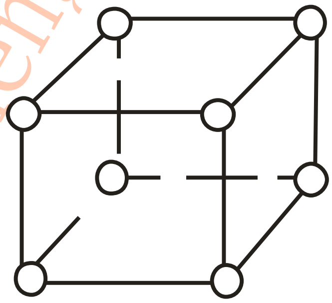
8. 将1~10这十个自然数分别填入图中 10 个○，使五边形每条边上的三数之和都相等。



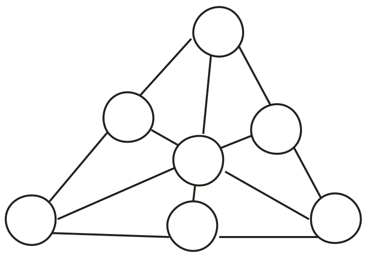
9．将1~8填入图中的○内，使每个五边形上的五个顶点之和为 22。



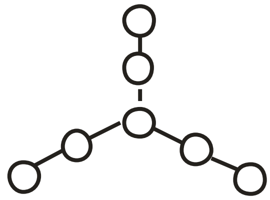
10．将1~8八个数字分别填入正方体的八个顶点上的○内，使每一个面（共有六个面）上四个数之和都一样。



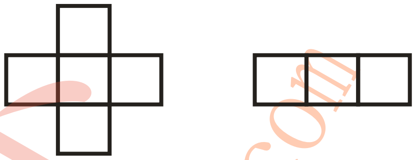
11．图上有七个○，各填上一个数，要求每条线上的三个数中，当中的数是两边数的平均数，现已填好两个数，求 X 是多少？



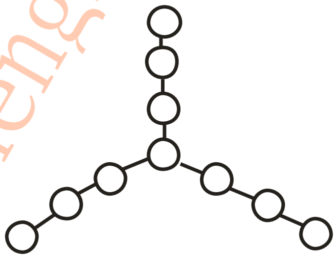
12．把1~7七个数字填入图中的○中，使得每条线段上的三个数的和相等。



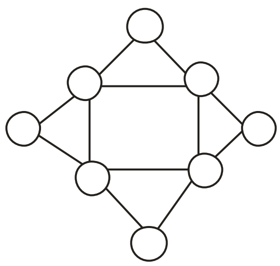
13．将8~15共八个数，分别填在图中的□中，使每一横行、每一竖行相邻的三个数的和都相等（每数只用一次）。



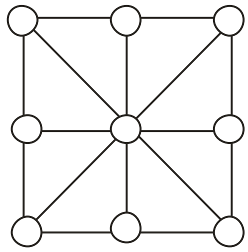
14．将1~10十个数分别填入图中的十个○中，使每条线上四个数之和相等。



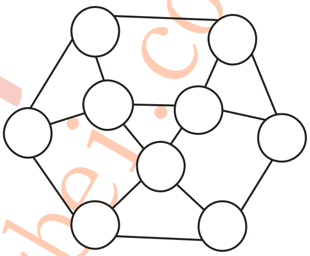
15．将1~8八个数分别填入图中的○内，使每个三角形的三个顶点上的数之和都相等。



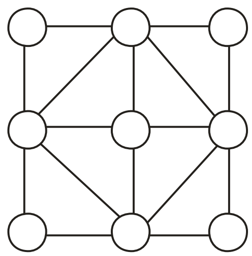
16．把1~9这九个数分别填入下图的○中，使每条线上三个数之和均相等。



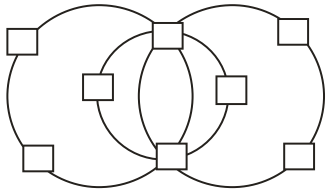
17．将1~9这九个数填入图中的○内，使每个三角形三个顶点的数字和都相等。



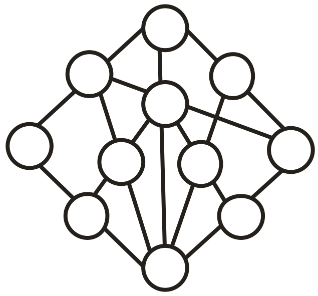
18．把1~9九个数字分别填入图中的○内，使每个正方形角上四个数字之和相等。



19．将 2，3，5，7，11，13，17，19 八个质数分别填入图中的八个□内，使每个圆上四个数之和都相等。



20. 请将1~11这十一个数，分别填入图中的十一个○内，使每条直线上的数字之和相等。



分析解答

1．经观察发现，图中所填数的规律为两个圆相交部分的数等于与它相邻的两部分里的数的和的一半。即：

$(24+32)\div 2=28$

$(32+40)\div 2=36$

$(40+30)\div 2=35$

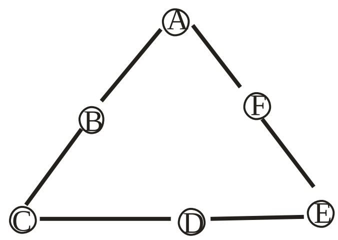
所以本题的解为：

解：$(A+24)\div 2=15$

解出：　　　　$A=6$

经检验：6 与 30 的和除以 2，也恰好等于 18。

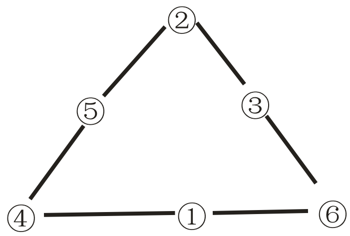
2．用字母填入圆圈中如图：



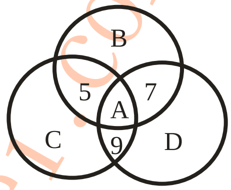
则有：$A+B+C=11$，$A+E+F=11$，$C+D+E=11$。将这三个等式相加

有 $2(A+C+E)+B+D+F=33$，则 $A+C+E+(1+2+3+4+5+6)=33$。所以$A+C+E=12$。

因此，本题的解是：



3．首先我们将空白区域填上字母如图：



由于图上已填的数字有 5，7，9。

所以有：$5+7+B+A=23$

$5+9+C+A=23$

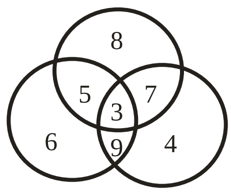
$7+9+D+A=23$

即：$12+B+A=23$

$14+C+A=23$

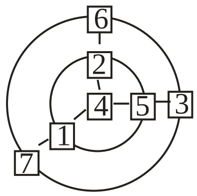
$16+D+A=23$

这三个等式均必有一个加数是奇数才能使和为奇数。要填的 3，4，6，8 中只有一个奇数 3，由此可得：A 必定是 3。从而可填出 B 为 8，C 为 6，D 为 4。即：如图。



4．1 到 7 个数之和为 28，如果二个圆和三条线数字相加，则中心的数字就被算三次，其他六个数字均被算两次。因此相加得和则为：28×2+中心数。将相加的和平均分成 5 份就是每一圆和每一直线上三个数的和。要使 28×2+中心数的和能被 5 整除，则中心数只能是 4、这样，每一圆或每一直线上的三个数的和是

（28×2+4）÷5=12。因此本题中有下面的解：



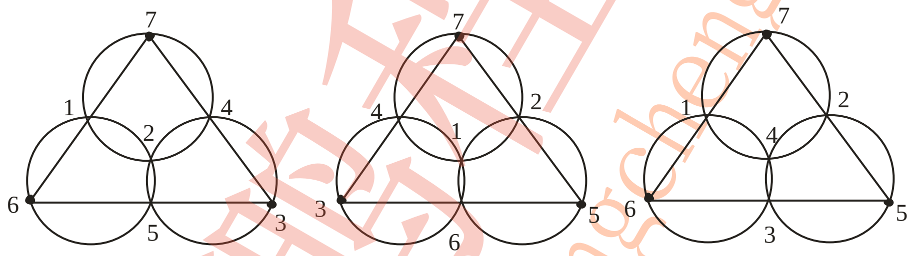
5．一个圆上四个数之和与线段三个数之和相等。又因为要填的数是 1 到 7 七个数字，所以（1+2+3+4+5+6+7）÷2=14 就是每个圆上四个数之和，也是每条线段上三个数之和。

因为 1~7 中，7 较大，占 14 的一半。因此 7 不可能放在三个圆的交点。

若 7 和 6 在同一个圆，则四个数之和就超过 14。所以 7 和 6 定不在同一个圆上。

若 7 在一条线段的中间点，则另两条线段所有的数字之和（包括一个数算两次）最大只能是 27，不够 28。因此，7 也不能放在线段的中间点处。

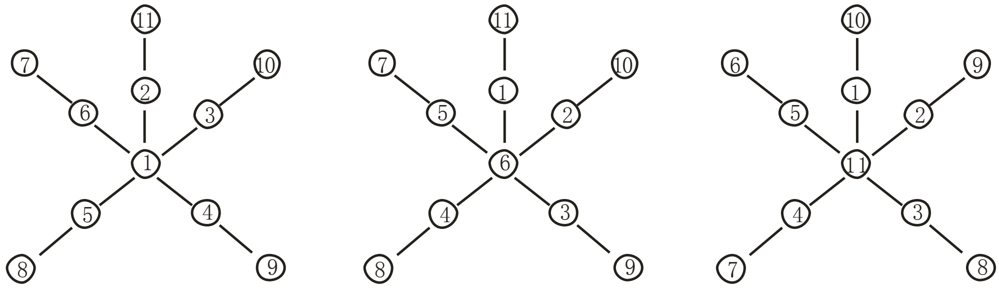
所以 7 只能是放在三角形的顶点。因此，三数之和为 14 的组合有三种：7，6，1；7，5，2；7，4，3。故本题有三种答案。



6．因为 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66。因此，五条线上所有数的总和（包括交点处的数字算五次）就等于 66 加上四个交点处的数。

由于题目要求每条线上三个○内的数和都相等。因此五条线上所有数的总和能被 5 整除。即 66 加上四个交点处的数字，结果能被 5 整除。因此，交点处的○内只能是 1，6，11。

由此可得中心数为 1，则每条线上三个数之和是 14；当中心数为 6，则每条线上三个数之和为 18；当中心数为 11，则每条线上三个数之和为 22。因此，本题有如下的基本解：

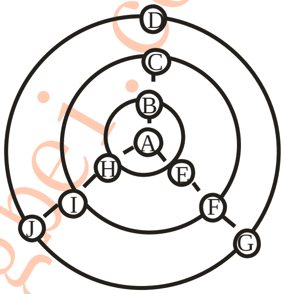


7. 首先将空白○填入字母如图：

$\because 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$。

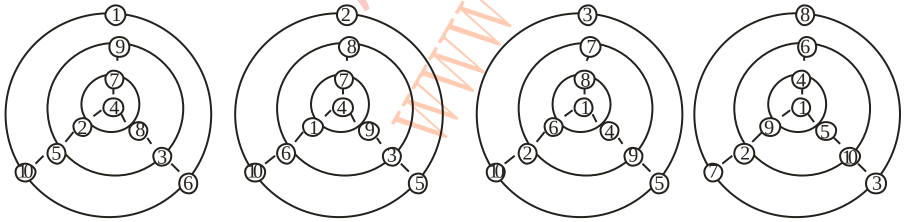
所以每条线四个数之和是$(55+2A)\div 3$，每个大圆三个数之和是$(55-A)\div 3$。

即：$55+2A$ 与 $55-A$均能被 3 整除。因此，A 只可能是 4 或 1。



若 A 是 4，则每条线四数之和是 21，即每条线上剩下三数之和为 17；还可知每个大圆三数之和也为 17。即$B+C+D=E+F+G=H+I+J=B+H+E=C+F+I=D+G+J=17$。剩下的九个数可以找到符合本题要求的解所以 D 是 4 成立。

若 D 是 1，则每条线上四数之和为 19，即每条线上其余三数之和为 18，而且每个大圆三数之和为 18。即：$B+C+D=E+F+G=H+I+J=B+H+E=C+F+I=D+G+J=18$。也可找出解，所以 D 是 1 也成立。



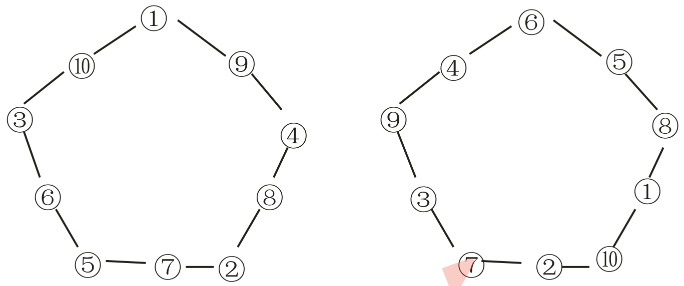
注：

除中心数外，圆与圆之间三个数可互换，线与线间三个数也可互换。

8. 由于1~10这十个自然数之和是 55。而五边形每条边上的三数之和就是 55 加上

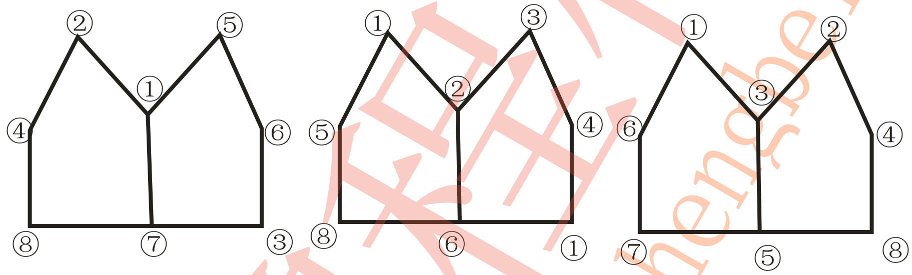
五边形的五个顶点数的和再被 5 整除。因此，五边形的五个顶点之和必然是 5 的倍数。从而得出五边形每条边上的三数之和最小等于 14，最大等于 19。

经试当五边形每条边三数之和是 14 或 19 才有解。因此，本题的解是



9. 由于每个五边形的五个顶点之和为 22，那么两个五边形总和为$22\times2=44$。而$1+2+3+4+5+6+7+8=36$。所以五边形公共边上的两点之和为$44-36=8$。因此这两个点可能为 1 和 7，2 和 6，3 和 5 三种情况。

因此本题有下面三种基本解：

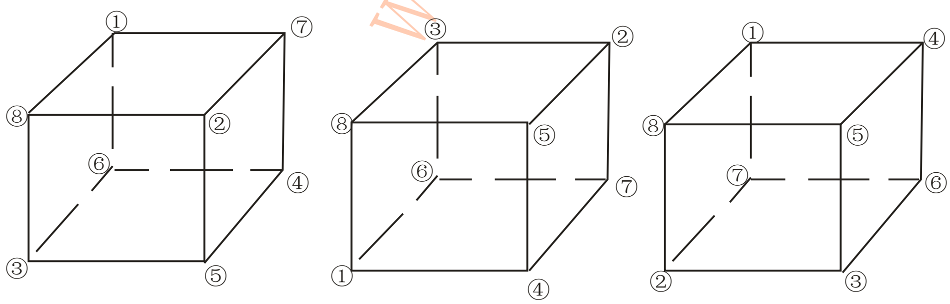


10. 1~8八个数字之和为 36，上下两个面各有四个不同的数字，它们的和相等，所以，每个面上四个数之和是 18。

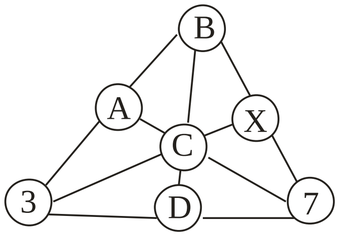
在1~8数中，四个数之和是 18 的组合有许多组，包括 8 的组合只有四组；①$8+7+2+1$；②$8+6+3+1$；③$8+5+3+2$；④$8+5+4+1$。

立方体上包括 8 的三个面上的数字之和，必是上面中的三组，由于每两个面相交于一条线，除 8 外，必定还有一个数字重合。

因由，可以找到本题的解是：



11．首先将空白○内填上字母如下图：



由题意，可知：$D=(3+7)\div 2=5$。

则有下列三式：

$C=(B+5)\div 2$　①

$A=(3+B)\div 2$　②

$C=(A+7)\div 2$　③

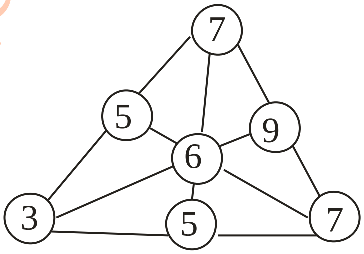
所以有$2C=B+5$　④

$2A=3+B$　⑤

$2C=A+7$　⑥

因此：$2C-2A=(B+5)-(3-B)=2$，则$C-A=1$，$C=A+1$，将$C=A+1$代入⑥式，得出。$2(A+1)=A+7$。则 $A=5$，$C=6$，所以$(3+X)\div 2=6$，即得出：$X=9$。

因此，本题的解为：



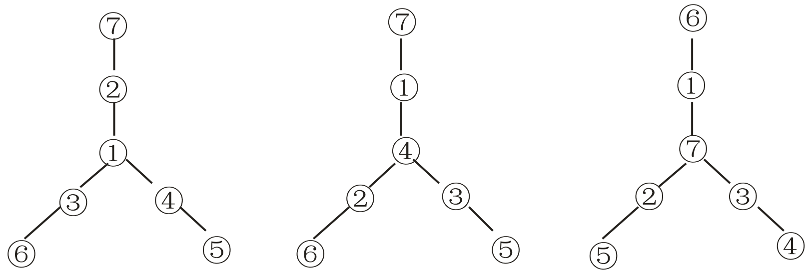
12．$\because$ 1~7七个数字之和为 28，则有$(28+\text{中心数}\times 2)$能被 3 整除。

$\therefore$ 中心数可以是 1，4，7。

则当中心数是 1，则每条线上其余两数之和为$(28+1\times 2)\div 3-1=9$，则有三组组合：7 和 2，6 和 3，5 和 4，可找到解。

当中心数是 4，每条线上其余两数之和则为 8，也可找到解。

当中心数是 7，也可找到符合要求的解。所以，本题有三种基本解：



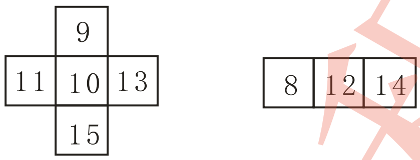
13．每一横行、竖行相邻三个数之和应是（$8+9+10+11+12+13+14+15+$“十字中心数”）$\div 3=(92+$中心数$)\div 3$，∴“十字”中心数可能是 10 和 13。

当“十字”中心数是 10，相邻三数之和应为 34，即“十字”横竖行的其余两数之和为 24。

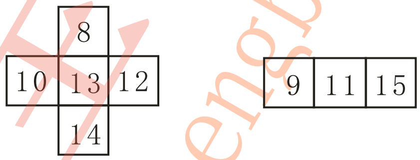
当“十字”中心数是 13，相邻三数之和应为 35，即“十字”横竖行的其余两数之和为 22。

因此，本题的基本解有两种：

①

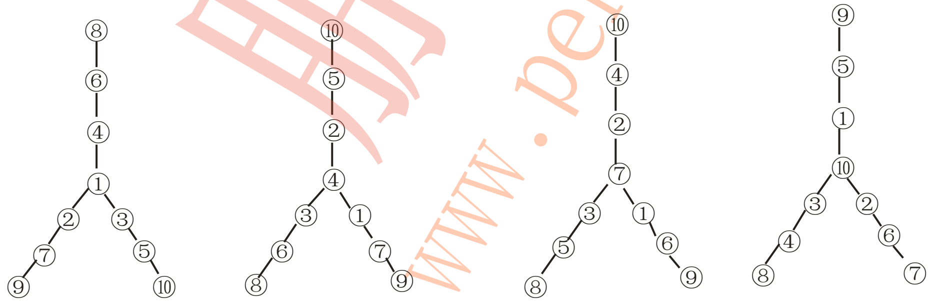


②

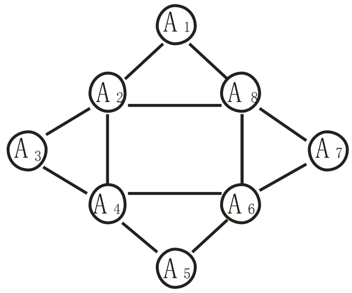


14．1~10十个数之和是 55。

由题意，$(55+$中心数$\times 2)$能被 3 整除所以中心数可以为 1，4，7，10。因此，本题有如下四种基本解。

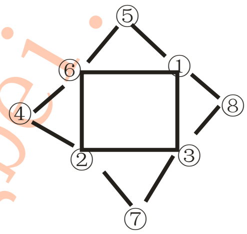


15．将空白○填入字母如下图：



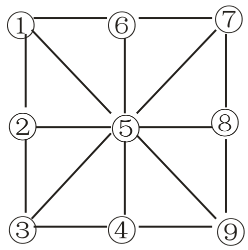
$1+2+3+4+5+6+7+8=36$。每个三角形中三数之和应是$(36+A_2+A_4+A_6+A_8)\div 4$。即$A_2+A_4+A_6+A_8$能被 4 整除。所以有以下三种情况：$1+2+3+6$；$2+3+4+7$；$3+4+5+8$；经试只有$A_2+A_4+A_6+A_8=1+2+3+6$时成立。

因此，本题的基本解是

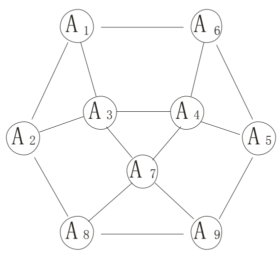


16．要使每条线上三个数之和都相等，则每条线上三个数之和必为$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\div 3=15$。

则由此可判定中心数必为 5。所以本题的基本解为



17．将图中的空白○填入字母如图：



由题目要求，我们可设每个三角形三个顶点○内的数字之和为 S，则有：

$A_1+A_2+A_3=S$　　$A_4+A_5+A_6=S$

$A_7+A_8+A_9=S$　　$A_3+A_4+A_7=S$

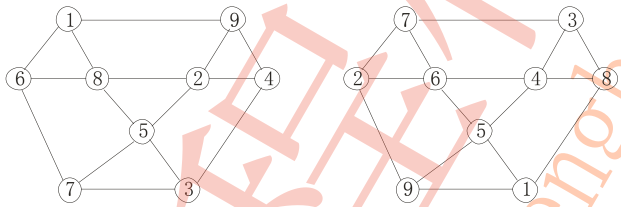
$A_2+A_4+A_8=S$　　$A_3+A_5+A_9=S$

$A_1+A_6+A_7=S$

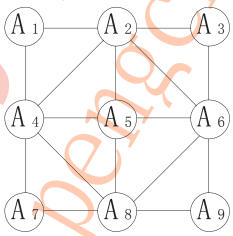
将七个等式相加得：$(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9)\times 2+A_3+A_4+A_7=7S$。所以 $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9=38$。即 $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\div 3=S$，可得$S=15$。

因此，三个数和是 15 的组合情况有：$1+9+5$；$1+8+6$；$2+9+4$；$2+8+5$；$3+7+5$；$2+7+6$；$3+8+4$；$4+5+6$；

由于A_3，A_4，A_7计算中要出现三次，因此，符合题意的解为两种：



18．将空白○填入字母如图：



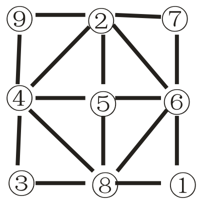
若设每个正方形角上四个数之和是 S，则有：$A_1+A_2+A_4+A_5=S$，$A_2+A_3+A_5+A_6=S$，$A_4+A_5+A_7+A_8=S$，$A_5+A_6+A_8+A_9=S$，$A_1+A_3+A_7+A_9=S$，$A_2+A_4+A_6+A_8=S$，将这六个等式相加得出 $(A_1+A_3+A_7+A_9)\times 2+(A_2+A_6+A_8+A_4)\times 3+A_5\times 4=6S$。

则 $A_5\times 4=S$。于是有：$4\times(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9)=4\times(A_1+A_2+A_3+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9)=4(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=4\times 45=9S$。则$S=20$，$A_5=5$。

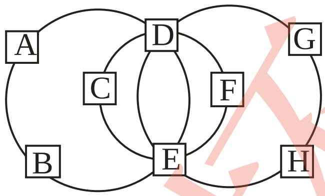
由此可得：$A_1+A_2+A_4=A_2+A_3+A_6=A_4+A_7+A_8=A_6+A_8+$

$A_9=15$。所以可得出$A_1+A_4=A_3+A_6$。$A_4+A_7=A_6+A_9$

经试，A_2定位偶数，因此可找到解是：



19．先将空白格填上字母如图：



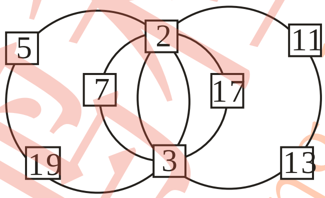
由于要填的八个数中只有一个是偶数 2，其余均为奇数，因此 2 必在 D 或 E 处。

又由于

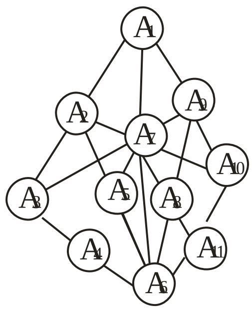
$(2+3+5+7+11+13+17+19)+(D+E)\times2=77+(D+E)\times\ 2$，

而$[77+(D+E)\times2]$必须能被 3 整除。因此，D、E 处只可能是 2 和 3。

由此可得每个圆上四数之和是 29。因此可找到解是：



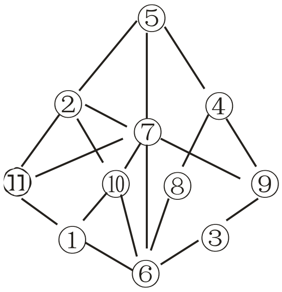
20．将空白○内填入字母如下图



由于 1 到 11 这十一个数之和是 66。A_3+A_4，A_1+A_7，A_8+A_9，

$A_{10}+\ A_{11}$，A_2+A_5这五对数的和相等，因此$66-A_6$要被 5 整除。

A_6只能是 1，6 和 11。



由$66-A_{10}-A_{11}$是$A_1+A_2+A_3$、$A_4+A_5+A_7$、$A_6+A_8+A_9$三条线数之和，$66-A_{10}-A_{11}+(A_6+A_{10}+A_{11})=66+A_6$是四条线数之和。$66+A_6$能被 4 整除。所以$A_6$只能是 6，而每条线数之和应是 18。

$A_3+A_7=18$，经试A_7只能为 7。

第十七章　简单的幻方及其它数阵图

1．将 20 以内除“1”以外的所有质数编成一个三阶幻方。

2．在图中的 A、B、C、D 处填上适当的数，使此图成为一个三阶幻方。

A	13	D
B	9	11
12	C	10

3．将2~10这九个数编排成一个三阶幻方。（已知幻方中心的方格填数为 6）。

	6	

4．将 3 个 22，3 个 30，3 个 38 编排成一个三阶幻方。

5．在图中空格中填入不大于 18 且互不相同的偶数（其中已填好一个数），使每行、每列和对角线上三个数之和都等于 30。

		4

6．将 1，3，5，7，9，11，13，15，17 这九个数在图中填写一个三阶幻方（其中已填好一个数），求幻方和。

		3

7．将$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{7}{12}$九个数分别填入图中的方格里成为一个三阶幻方。

8．将九个连续自然数填入 3 行 3 列的九个方格中，使每横行，每一竖列及每一对角线的三数之和都等于 51。

9．用 0，1，2，3，4，5，6，7，8 九个连续数，构成一个三阶幻方。

10．将 10 到 18 九个数，构成一个三阶幻方。

11．将1~16填入4×4的阵列中，构成一个四阶幻方，求幻方和

12．用对称交换法编排四阶幻方（用3~18这 16 个数）。

13．编排一个幻方和等于 50 的四阶幻方（请用对称交换法）。

14．编排一个幻方和等于 62 的四阶幻方（请用对称交换法）。

15．用巴舍法，将1~25，编排一个五阶幻方。

16．用2~26这 25 个数编排一个五阶幻方（请用罗伯法）。

17．使用对称交换法，用1~64这 64 个数编排成一个八阶幻方。

18．使用环形平移补空法，用1~64这 64 个数编排一个八阶幻方。

19．使用对称交换法，用 19，20，21，……，82 这 64 个数编排一个八阶幻方。

20．使用环形平移补空法，将2~65编排一个八阶幻方。

分析解答

1．20 以内除“1”以外的所有奇数是：3，5，7，9，11，13，15，17，19。这九个数分别填入下图的九个方格里。先设九个方格填入九个字母如图：

A_1	A_2	A_3
A_4	A_5	A_6
A_7	A_8	A_9

$$\because A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9$$
$$=3+5+7+9+11+13+15+17+19=99$$
$$\therefore A_1+A_2+A_3=A_4+A_5+A_6=A_7+A_8+A_9=99\div 3=33$$
$$\therefore A_2+A_5+A_8=A_1+A_5+A_9=A_3+A_5+A_7=33$$
$$\therefore A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+A_9+3A_5=33\times 4=132$$

∴ 可得$A_5=(132-99)\div 3=11$

因此，本题有如下的解：

9	19	5
7	11	15
17	3	13

9	7	17
19	11	3
5	15	13

5	19	9
15	11	7
13	3	17

5	15	13
19	11	3
9	7	17

17	7	9
3	11	19
13	15	5

17	3	13
7	11	15
9	19	5

13	15	5
3	11	19
17	7	9

13	3	17
15	11	7
5	19	9

2．从 1 行和 3 列得：$A+13+D=D+11+10$，则$A=8$。

对角线三数之和是$A+9+10=27$。∴可求出$B=7$，$C=5$，$D=6$。

因此，本题的解为：

8	13	6
7	9	11
12	5	10

3． $(2+3+4+5+6+7+8+9+10)\div 3=18$。即为这个三阶幻方的幻方和。

又由于中心方格已知是 6，因此，本题的解是：

3	10	5
8	6	4
7	2	9

3	8	7
10	6	2
5	4	9

5	10	3
4	6	8
9	2	7

5	4	9
10	6	2
3	8	7

7	2	9
8	6	4
3	10	5

7	8	3
2	6	10
9	4	5

9	2	7
4	6	8
5	10	3

9	4	5
2	6	10
7	8	3

4．这个三阶幻方有 22，30，38 这三个数重复组成，由此可知中心数必为 30。

所以本题的解为：

22	38	30
38	30	22
30	22	38

30	38	22
22	30	38
38	22	30

5．将图中的空格填入字母如下图：则根据

A_1	A_2	4
A_3	A_4	A_5
A_6	A_7	A_8

题意，可知：$A_1+A_2+4=30$，$A_3+A_4+A_5=30$，$A_6+A_7+A_8=30$

且$A_1+A_4+A_8=30$，$A_2+A_4+A_7=30$，$A_6+A_4+4=30$，

$\therefore$有$(A_1+A_2+A_3+\ A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+4)+A_4\times 3=30\times 4$

所以有$A_4\times 3=120-90=30$，因此$A_4=10$。

因此，符合题目要求的解是：

8	18	4
6	10	14
16	2	12

12	14	4
2	10	18
16	6	8

6．先求幻方和，才好填数，然后再找出中心数，最后通过定四个角上的数后，便可根据幻方和是多少填写出来。

（1）幻方和$=(1+3+5+7+9+11+13+15+17)\div 3=27$。

（2）中心数的确定：将空格填入字母如图：则$A_1+A_4+A_8=27$

A_1	A_2	3
A_3	A_4	A_5
A_6	A_7	A_8

$A_2+A_4+A_7=27$

$3+A_4+A_6=27$

$A_3 + A_4 + A_5 = 27$

将四个等式相加得：

$(A_1 + A_2 + 3 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8) + 3A_4 = 27 \times 4$，

即$81 + 3A_4 = 108$， $\therefore A_4 = 9$。

因此，本题的解为：

幻方数是 27。

7	17	3
5	9	13
15	1	11

或

11	13	3
1	9	17
15	5	7

7．将九个分数扩大转化为整数。由于九个分数的分母是 2，3，4，6，12。它们的最小公倍数是 12，因此将九个分数扩大 12 倍得 1，2，3，4，5，6，7，8，9。先找到由 1，2，3，4，5，6，7，8，9 编成的三阶幻方图，再将图上的每个数除以 12 即可。

因此，本题的解是：

$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$

8．我们知道在3×3的阵列中填入$1 \sim 9$的自然数，构成的三阶幻方，其幻和为 15。而这里填的九个连续自然数构成的三阶幻方，其幻和为 51，$51 - 15 = 36$。这个幻和比由$1 \sim 9$九个数构成的三阶幻方的幻和大 36，则每行，每列，每条对角线上的三个数也应增加$36 \div 3 = 12$。因此这九个数为 13，14，15，16，17，18，19，20，21

因此，本题的解是：

16	21	14
15	17	19
20	13	18

16	15	20
21	17	13
14	19	18

14	21	16
19	17	15
18	13	20

14	19	18
21	17	13
16	15	20

20	13	18
15	17	19
16	21	14

20	15	16
13	17	21
18	19	14

18	19	14
13	17	21
20	15	16

18	13	20
19	17	15
14	21	16

9．这个三阶幻方的幻和应是：$(0+1+2+3+4+5+6+7+8)\div 3=12$。

由此，可得出三阶幻方的中心数是 4。

因此，本题的解是：

3	8	1
2	4	6
7	0	5

3	2	7
8	4	0
1	6	5

5	6	1
0	4	8
7	2	3

5	0	7
6	4	2
1	8	3

1	8	3
6	4	2
5	0	7

1	6	5
8	4	0
3	2	7

7	2	3
0	4	2
5	6	1

7	0	5
2	4	6
3	0	1

10．（1）幻和$=(10+11+12+13+14+15+16+17+18)\div 3=42$。

（2）三阶幻方的中心数为 14。

（3）本题的解是：

17	12	13
10	14	18
15	16	11

17	10	15
12	14	16
13	18	11

13	12	17
18	14	10
11	16	15

13	18	11
12	14	16
17	10	15

11	18	13
16	14	12
15	10	17

11	16	15
18	14	10
13	12	17

15	10	17
16	14	12
11	16	13

15	16	11
10	14	16
17	12	13

11．首先我们可以求出四阶幻方的幻和是

$$(1+2+3+\cdots+15+16)\div 4=134\div\ 4=34$$

因为四阶幻方为双偶阶幻方，因此可以采用对称交换法求出本题的解。

先写出四阶自然方阵，然后进行中心对称交换

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

从而得出一个解是：

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

再根据对称性，可以得出其余的解是：

1	12	8	13
15	6	10	3
14	7	11	2
4	9	5	16

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

13	8	12	1
3	10	6	15
2	11	7	14
16	5	9	4

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	5	9	4
2	11	7	14
3	10	6	15
13	8	12	1

12．先将3~18这 16 个数排成四阶自然方阵，再把四阶自然方阵中对角线上的数不动，固定作为四阶幻方对角线上的数，最后将对角线以外的数作中心对称交换即能得到本题的解：

3	17	16	6
14	8	9	11
10	12	13	7
15	5	4	18

3	14	10	15
17	8	12	5
16	9	13	4
6	11	7	15

6	16	17	3
11	9	8	14
7	13	12	10
18	4	5	15

6	11	7	18
16	9	13	4
17	8	12	5
3	14	10	15

15	5	4	18
10	12	13	7
14	8	9	11
3	17	16	6

15	10	14	3
5	12	8	17
4	13	9	16
18	7	11	6

18	4	5	15
7	13	12	10
11	9	8	14
6	16	17	3

18	7	11	6
4	13	9	16
5	12	8	17
15	10	14	3

13．$\because$ 幻和 = 十六个数之和 ÷ 4， $\therefore$ 十六个数之和 = 200。因此得出：这十六个数的最小数与最大数之和= $200 \times 2 \div 16 = 25$。

所以可得出这 16 个数是5~20这 16 个数。

因此，本题的解是：

5	16	12	17
19	10	14	7
18	11	15	6
8	13	9	20

5	19	18	8
16	10	11	13
12	14	15	9
17	7	6	20

8	18	19	5
13	11	10	16
9	15	14	12
20	6	7	17

8	13	9	20
18	11	15	6
19	10	14	7
5	16	12	17

17	7	6	20
12	14	15	9
16	10	11	13
5	19	18	8

17	12	6	5
7	14	10	19
6	15	11	18
20	9	13	8

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

20	9	13	8
6	15	11	18
7	14	10	19
17	12	16	5

14．四阶幻方共 16 个数，幻方和= 62，则这 16 个数的和一定是 248。则这 16 个数分别是：8，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，23。因此，本题的解是：

8	22	21	11
19	13	14	16
15	17	18	12
20	10	9	23

8	19	15	20
22	13	17	10
21	14	18	9
11	16	12	23

11	21	22	8
16	14	13	19
12	18	17	15
23	9	10	20

11	16	12	23
21	14	18	9
22	13	17	10
8	9	15	20

20	10	9	23
15	17	18	12
19	13	14	16
8	22	21	11

20	15	19	8
10	17	13	22
9	18	14	21
23	12	16	11

23	12	16	11
9	18	14	21
10	17	13	22
20	15	19	8

23	9	10	20
12	18	17	15
16	14	13	19
11	21	22	8

15．画图填数后，将圈住的四个数不动，其余数进行平移补空这样，便可得到一个五阶幻方。

因此，本题的解是

（1）

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

（2）

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

（3）

11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

（4）

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

（5）

15	22	9	16	3
2	14	21	8	20
19	1	13	25	7
6	18	5	12	24
23	10	17	4	11

（6）

15	2	19	6	23
22	14	1	18	10
9	21	13	5	17
16	8	25	12	4
3	20	7	24	11

（7）

23	10	17	4	11
6	18	5	12	24
19	1	13	25	7
2	14	21	8	20
15	22	9	16	3

（8）

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

16．

（1）

18	25	2	9	16
24	6	8	15	17
5	7	14	21	23
11	13	20	22	4
12	19	26	3	10

（2）

18	24	5	11	12
25	6	7	13	19
2	8	14	20	26
9	15	21	22	3
16	17	23	4	10

（3）

12	19	26	3	10
11	13	20	22	4
5	7	14	21	23
24	6	8	15	17
18	25	2	9	16

（4）

12	11	5	24	18
19	13	7	6	25
26	20	14	8	2
3	22	21	15	9
10	4	23	17	16

（5）

16	9	2	25	18
17	15	8	6	24
23	21	14	7	5
4	22	20	13	11
10	3	16	19	12

（6）

16	17	23	4	10
9	15	21	22	3
2	8	14	20	26
25	6	7	13	19
18	24	5	11	12

（7）

10	3	26	19	12
4	22	20	13	11
23	21	14	7	5
17	15	8	6	24
16	9	2	25	18

（8）

10	11	23	17	16
3	22	21	15	9
26	20	14	8	2
19	13	7	6	25
12	11	5	24	18

17．把1~64按顺序排成八阶自然方阵，然后分成四个四阶方阵，每个小四阶方阵中对角线上的数都不动，对角线以外的数在八阶方阵中作中心对称变换，最后得到八阶幻方（如图）。

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

18．将 64 个数从小到大的顺序分成四组，每组 16 个数，其中 1 至 16 一组，17 至 32 一组，33 至 48 一组，49 至 64 一组，环形填入图中。

最后进行平移补空，把左、右两边突出部分中的数，按左移右，右移左的方向，平移八格至8×8的正方形中相应的空格中，这下就可以得到一个八阶幻方（如图）。

57	56	25	24	48	33	16	1
2	26	55	47	29	15	34	58
27	3	46	54	14	22	59	35
36	45	4	13	53	60	21	28
37	44	5	12	52	61	20	29
30	6	43	51	11	19	62	38
7	31	50	42	18	10	39	63
64	49	32	17	41	40	9	8

19．先把19~82按顺序排列成八阶方阵。再分成四个四阶方阵，每个小四阶方阵中对角线上的数都不动，对角线以外的数在八阶自然方阵中作中心对称交换，最后得到八阶幻方（如图）

19	81	80	22	23	77	76	26
74	28	29	71	70	32	33	67
66	36	37	63	62	40	41	59
43	57	56	46	47	53	52	50
51	49	48	54	55	45	44	58
42	60	61	39	38	64	65	35
34	68	69	31	30	72	73	27
75	25	24	78	79	21	20	82

20．先将 64 个数平均分成四组，每组 16 个数，按从小到大的顺序可分成：2~17，18~33，34~49，50~65四组。

将四组数环形填数，再平移补空按左移右，右移左的方向平移至8×3的正方形中相应的空格中，即得出一个八阶幻方（如图）

58	57	26	25	49	34	17	2
3	27	56	48	30	16	35	59
28	4	47	55	15	23	60	36
37	46	5	14	54	61	22	29
38	45	6	13	53	62	21	30
31	7	44	52	12	20	63	39
8	32	51	43	19	11	40	64
65	50	33	18	42	41	10	9

第十八章　三角形的等积变形

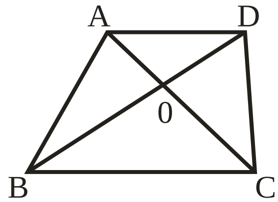
1．用四种不同的方法，把任意一个三角形分成四个面积相等的三角形。

2．用三种不同的方法把任意三角形分成五个面积相等的小三角形。

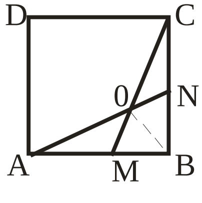
3．用三种不同的方法，将任意一个三角形分成三个小三角形，使它们的面积比为 $1:3:4$。

4．把任意三角形分成三个小三角形，使它们的面积比为$2:3:5$。

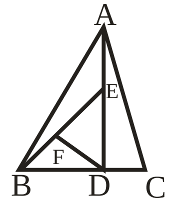
5．证明梯形 ABCD 中，三角形 AOB 的面积与三角形 DOC 的面积相等。



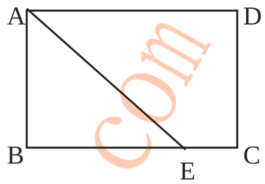
6．ABCD 是边长为 12 厘米的正方形，M、N 分别为 AB 边与 BC 边的中点，AN 与 CM 相交于 O，求四边形 AOCD 的面积是多少？



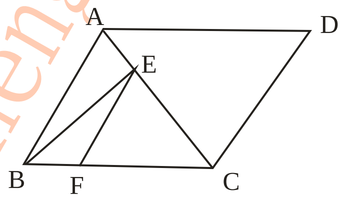
7．D、E、F 分别是 BC、AD、BE 的三等分点，已知$S_{\Delta ABC}=54$平方厘米，求$S_{\Delta DEF}$。



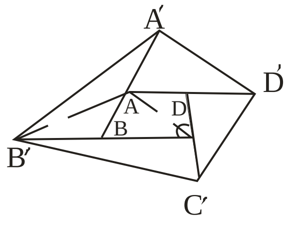
8. 如图，E 是长方形 ABCD 中 BC 上的一点使$S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}S_{梯形\ AECD}$，$BC=12$厘米，求 BE 是多少厘米？



9. 如图，在平行四边形 ABCD 中，E、F 分别是 AC、BC 的三等分点，且$S_{ABCD}=18$平方米厘米，求$S_{\Delta BEF}$

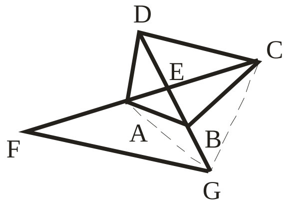


10. 如图，将四边形 ABCD 各边都延长一倍至A'，B'，C'，D'，连接这些点得到一个新四边形$A'B'C'D'$，如果四边形 ABCD 面积是 10，求四边形$A'B'C'D'$的面积

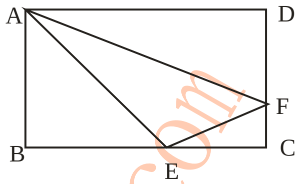


11. 如图，四边形 ABCD 的对角线 AC、BD 交于 E，且$AF=CE$，$BG=DE$，如果

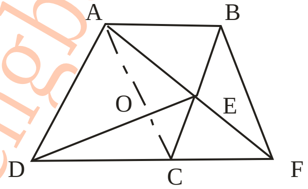
四边形 ABCD 的面积是 5，求ΔEFG的面积。



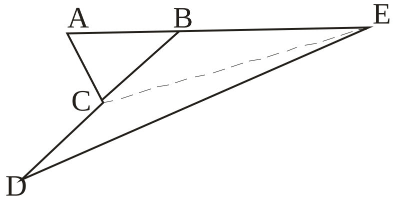
12. ABCD 是一个长方形，$BC = 12$ 厘米，$CD = 9$ 厘米，$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta ADF} = S_{四边形AECF}$，求$\Delta AEF$的面积。



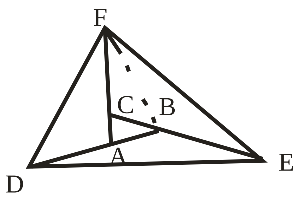
13. ABCD 是平行四边形，直线 AF 与 BC 交于 E。求证：ΔCDE与ΔBEF的面积相等。



14. 如图，ΔABC的面积为 10，延长 AB 到 E，使$BE = 2AB$，延长 BC 到 D，使$CD = BC$，求ΔBED的面积。

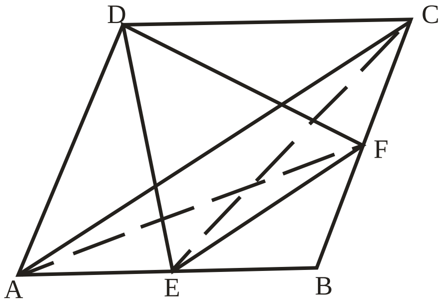


15. 如图，$AB = AD$，$BE = 2BC$，$CF = 3CA$，ΔABC的面积是 5，求ΔDEF的面积。

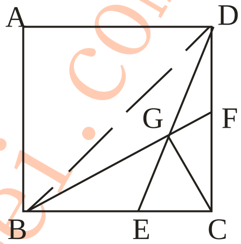


16. ABCD 为平行四边形，EF 平行 AC，如果 ΔADE 的面积为 1 平方厘米，求ΔCDF 的面

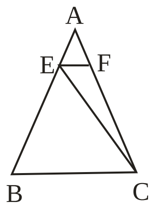
积。



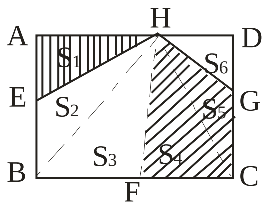
17. 正方形 ABCD 的面积为 10 平方厘米，$S_{\Delta BEG}:S_{\Delta CEG}=2:1$，$S_{\Delta CFG}:S_{\Delta DFG}=1:1$，这四个小三角形的面积之和是多少？



18. ΔABC中，$EF//BC$，$AB=3AE$，求ΔAEF、ΔCEF、ΔBEC的面积的连比。

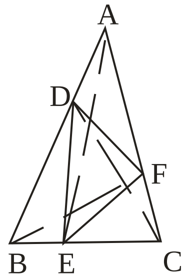


19. 长方形 ABCD 的面积为 10 平方厘米，E、F、G 分别为 AB、BC、CD 的中点，H 为 AD 边上的任意点，求阴影部分的面积。



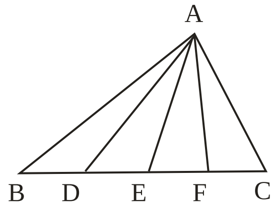
20. ΔABC 的各边上，分别取 AD、BE、CF 各等于 AB、BC、CA 长的三分之一。

如果ΔDEF的面积为 5 平方厘米，那么ΔABC的面积是多少？

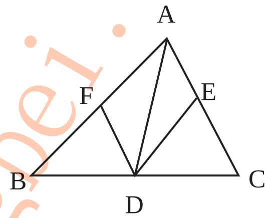


分析解答

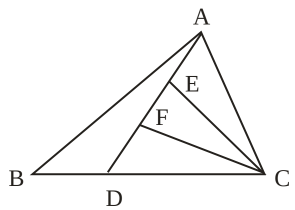
1．方法一：如图：将 BC 边四等分，则ΔABD、ΔADE、ΔAEF、ΔAFC 等积。



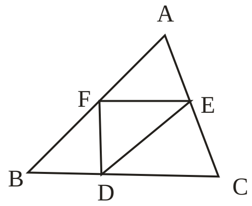
方法二：取三角形三边的中点，如图边接，则有ΔADF、ΔBDF、ΔDCE、ΔADE 等积。



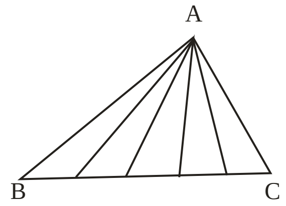
方法三：将 BC 等分，则$BD=\frac{1}{4}BC$，连结 AD，将 AD 三等分，则$AE=EF=FD=\frac{1}{3}AD$，连结 CE、CF，则有ΔABD、ΔCDF、ΔCEF、ΔACE 等积。



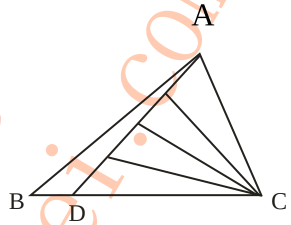
方法四：D、E、F 为三边中点，则有ΔFBD、ΔECD、ΔAFE、ΔDFE等积。



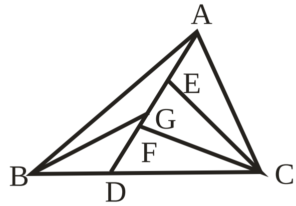
2．方法一：BC 五等分把各分点与三角形顶点 A 连接，所得的 5 个小三角形面积相等。



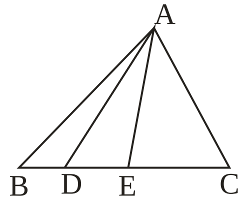
方法二：将 BC 五等分，取 D 点，使$BD=\frac{1}{5}BC$，连接 AD，将 AD4 等分，将分点与 C 连接，所得的五个小三角形的面积相等。



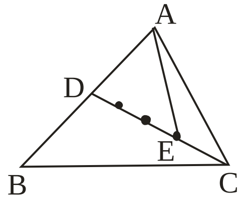
方法三：在 BC 上取上一点 D，使$BD=\frac{2}{5}BC$，连接 AD。再在 AD 上取中点 G，连接 BG。又在 AB 上取两个三等分点 E、F 连接 CE、CF。这样吧ΔABC分成五个小三角形，它们的面积都相等。（本题方法较多，在此只举三例）。



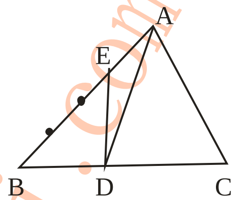
3．方法一：将 BC 八等分，取$1:3:4$的分点 D、E，连结 AD，AE，从而得到三个小三角形面积比为$1:3:4$。



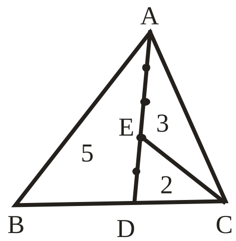
方法二：取AB中点O，再取AD的$\frac{1}{4}$分点E。连接CD、AE，从而得到三个三角形面积比为$1:3:4$。



方法三：取BC中点D，再取AB的$\frac{1}{4}$分点E，连结AD、DE，从而得到三个三角形面积之比为$1:3:4$。（注：本题方法很多，在此只举三种为例。）

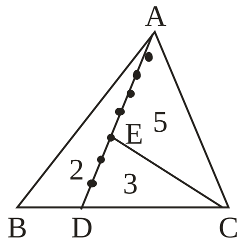


4．解法一：因为$2+3+5=10$所以这三个小三角形的面积分别占大三角形的$\frac{2}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{5}{10}$，即$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{2}$。设三角形是ABC。取BC边中点D，连接AD。又在AD上取一点E，使$AE=\frac{3}{5}AD$，连接EC则ΔCDE，ΔACE，ΔADB的面积比为$2:3:5$。



解法二：ΔABC中，将 BC 边五等分，使得$BD=\frac{1}{5}BC$，连接 AD，将 AD 八等分，使$AE=\frac{5}{8}AD$，连接 CE，则ΔABD，ΔCDE，ΔAEC的面积比为 2：3：5.

（注：本题方法较多，在此只举 2 例）



5．利用三角形 ABC 与三角形 DBC 是等底等高三角形。从而得到面积相等入手即可。

证明：$\because \Delta ABC$与ΔDBC 等底等高

$\therefore S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}$

$\because S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta OBC}$

$S_{\Delta DOC} = S_{\Delta DBC} - S_{\Delta OBC}$

$\therefore S_{\Delta AOB} = S_{\Delta DOC}$

6．连接 OB，$\because AB = BC$，M、N 又分别是 AB、CB 的中点，

$\therefore S_{\Delta BON} = S_{\Delta CON}$，$S_{\Delta AMO} = S_{\Delta BMO}$，$S_{\Delta ABN} = S_{\Delta BCM}$

又$\because S_{\Delta AMO} = S_{\Delta ABN} - S_{MBNO}$

$S_{\Delta CON} = S_{\Delta BCM} - S_{MBNO}$

$\therefore S_{\Delta AMO} = S_{\Delta CON}$

$\therefore S_{\Delta ABN} = 3S_{\Delta AMO}$

$S_{\Delta ABCO} = 4S_{\Delta AMO}$

$\because S_{\Delta ABN} = \times AB \times BN = \times 12 \times (\times 12) = 36$（平方厘米）

$S_{\Delta AMO} = 36 \div 3 = 12$（平方厘米）

$S_{ABCO} = 12 \times 4 = 48$（平方厘米）

$S_{AOCD} = 12 \times 12 - 48 = 96$（平方厘米）

答：四边形 AOCD 面积是 96 平方厘米。

7．由于 D 是 BC 的三等分点。

$\therefore CD = \frac{1}{3}BC \therefore S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \times 54 = 18$（平方厘米）

同理，$S_{\Delta ABD} = \frac{2}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3} \times 54 = 36$（平方厘米）

$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3} \times 36 = 12$（平方厘米）

$\therefore S_{\Delta BDF} = \frac{1}{3}S_{\Delta BDE} = \frac{1}{3}(36 - 12) = \frac{1}{3} \times 24 = 8$（平方厘米）

$S_{\Delta DEF} = \frac{2}{3}S_{\Delta BDE} = \frac{2}{3} \times (36 - 12) = \frac{2}{3} \times 24 = 16$（平方厘米）

答：$S_{\Delta DEF}$ 为 16 平方厘米。

8．$\because$ 使$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}S_{梯形\ AECD}$，就是使$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{3}S_{矩形\ ABCD}$，$\therefore$ BE应是 BC 的$\frac{2}{3}$

$\therefore BE = 12 \times \frac{2}{3} = 8$（厘米）

答：BE 是 8 厘米。

9．$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} \times 18 = 9$（平方厘米）

$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \times 9 = 3$（平方厘米）

$S_{\Delta BCE} = \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$（平方厘米）

$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{3} S_{\Delta BCE} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$（平方厘米）

答：$S_{\Delta BEF}$ 为 2 平方厘米。

10．连接AB'，AC，则$S_{\Delta AA'B'} = S_{\Delta ABB'}$即$S_{\Delta A'BB'} = 2S_{\Delta ABC}$同理，$S_{\Delta D'DC'} = 2S_{\Delta ADC}$

$\therefore S_{\Delta A'BB'} + S_{\Delta C'DD'} = 2S_{四边形ABCD}$

$S_{\Delta AA'D'} + S_{\Delta B'CC'} = 2S_{四边形ABCD}$

$\therefore$ 四边形$A'B'C'D'$的面积 $= 5 \times S_{四边形ABCD} = 50$

答：四边形$A'B'C'D'$的面积是 50

11．连接 AG，CG，$\because AF = EC$，则有$S_{\Delta AGF} = S_{\Delta CGE}$，

又$\because ED = BG$，有$S_{\Delta AED} = S_{\Delta ABG}$且$S_{\Delta CDE} = S_{\Delta BCG}$

又$\because S_{\Delta EFG} = S_{\Delta EAB} + S_{\Delta ABG} + S_{\Delta AFG} = S_{\Delta EAB} + S_{\Delta ADE} + S_{\Delta CGE}$

$= S_{\Delta EAB} + S_{\Delta ADE} + (S_{\Delta CDE} + S_{\Delta CEB}) = S_{四边形ABCD}$

$\therefore S_{\Delta EFG} = 5$

答：ΔEFG的面积是 5。

12．$S_{长方形ABCD} = 9 \times 12 = 108$(平方厘米) $\because S_{\Delta ABE} = S_{\Delta ADF} = S_{四边形AECF}$

$\therefore S_{\Delta ABE} = S_{\Delta ADF} = 108 \div 3 = 36$(平方厘米)。则$\frac{1}{2} \times AB \times BE = 36$，$\frac{1}{2} \times AD \times DF = 36$，$AB = 12$ 厘米，$AD = 9$ 厘米。则有$\frac{1}{2} \times 9 \times BE = 36$，$\frac{1}{2} \times 12 \times DF = 36$。$\therefore BE = 8$(厘米)，$DF = 6$(厘米)，$\therefore CF = CD - DF = 9 - 6 = 3$(厘米)$CE = BC - BE = 12 - 8 = 4$(厘米)

$\therefore S_{\Delta AEF} = 36 - \frac{1}{2} \times FC \times CE = 36 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 30$（平方厘米）

答：三角形 AEF 的面积是 30 平方厘米

13. 利用三角形等底等高，则面积相等的性质即可

证明：$\because AD//CB$，$\therefore S_{\Delta AEC}=S_{\Delta DCE}$，又$\because AB//DF$，$\therefore S_{\Delta AFC}=S_{\Delta BCF}$，而$S_{\Delta AEC}=S_{\Delta AFC}-S_{\Delta CEF}$，

$S_{\Delta BEF}=S_{\Delta BCF}-S_{\Delta CEF}$ $\therefore S_{\Delta AEC}=S_{\Delta BEF}$ $\therefore S_{\Delta CDE}=S_{\Delta BEF}$。

14. 连接 CE

$\because BE=2AB$，是ΔABC与ΔBCE高相等。$\therefore S_{\Delta BEC}=2S_{\Delta ABC}=2\times10=20$

又$\because BC=CD$，且ΔBCE与ΔCDE高相等。$\therefore S_{\Delta CDE}=S_{\Delta BEC}=20$

$$\therefore S_{\Delta BED}=S_{\Delta BEC}+S_{\Delta CDE}=40$$

答：ΔBED的面积是 40。

15. 连接 BF，CD$\because AB=AD$

$\therefore S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}=5$

$\therefore BE=2BC$，$\therefore S_{\Delta BED}=2S_{\Delta CBD}=2\times(5+5)=20$，且$S_{\Delta BFE}=2S_{\Delta BCF}$。

$\because CF=3CA$，$\therefore S_{\Delta FCB}=3S_{\Delta ABC}=15$

则$S_{\Delta BFE}=2S_{\Delta BCF}=30$

$\because AB=AD$，$\therefore S_{\Delta FDA}=S_{\Delta FBA}=15+5=20$，$\therefore S_{\Delta FCD}=S_{\Delta FDA}-S_{\Delta CDA}=20-5=15$

$\therefore S_{\Delta DEF}=S_{\Delta FDC}+S_{\Delta CDA}+S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BDE}+S_{\Delta FCB}+S_{\Delta FBE}$

$=15+5+5+20+15+30=90$

答：ΔDEF 的面积为 90。

16. 连结 AF，CE，$\therefore S_{\Delta ADE}=S_{\Delta ACE}$，$S_{\Delta CDF}=S_{\Delta ACF}$

又$\because$AC 与 EF 平行，$\therefore S_{\Delta ACE}=S_{\Delta ACF}$

$\therefore S_{\Delta ADE}=S_{\Delta CDF}=1$（平方厘米）

答：三角形 CDF 的面积是 1 平方厘米。

17. 连结 BD，$\because S_{\Delta BEG}:S_{\Delta CEG}=2:1$，$\therefore BE=2EC$，

$\therefore S_{\Delta BED}=2S_{\Delta CED}$

$\therefore S_{\Delta BED}-S_{\Delta BEG}=2S_{\Delta CED}-2S_{\Delta GEC}$

即$S_{\Delta DBG}=2S_{\Delta CDG}$

$\because S_{\Delta CFG}:S_{\Delta DFG}=1:1$

$\therefore DF=CF$，$S_{\Delta BGD}=S_{\Delta BCG}$

因此$S_{\Delta CDG}=\frac{1}{5}S_{\Delta BCD}=\frac{1}{5}\times=1(\text{平方厘米})S_{\Delta BCG}=2S_{\Delta GCD}=2(\text{平方厘米})$

$\therefore 1+2=3$（平方厘米）

答：四个小三角形的面积之和是 3 平方厘米。

18. $\because EF//BC$，$AB=3AE$， $\therefore AC=3AF$，$BC=3EF$，即 $EB=2AE$，$CF=2AF$，

$\therefore S_{\Delta CEF}=2S_{\Delta AEF}$，且

$S_{\Delta EBC}=2S_{\Delta EAC}$，即：$S_{\Delta AEF}:S_{\Delta CEF}=1:2$，$S_{\Delta EAC}:S_{\Delta EBC}=1:2$，

$\therefore S_{\Delta AEF}:S_{\Delta CEB}=1:6$

$\therefore S_{\Delta AEF}:S_{\Delta CEF}:S_{\Delta BEC}=1:2:6$。

19. 连接 BH，CH，设$S_1=S_{\Delta AEH}$，$S_2=S_{\Delta BEH}$，$S_3=S_{\Delta BHF}$，$S_4=S_{\Delta CHF}$，$S_5=S_{\Delta CGH}$，$S_6=S_{\Delta HDG}$。

$\because$E 为 AB 中点，$\therefore S_1=S_2$，

又$\because$F 是 BC 中点，$\therefore S_3=S_4$

G 是 DC 中点，$\therefore S_5=S_6$

$\because S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=10$

$\therefore S_1+S_4+S_5=10\div 2=5$

即：$S_{阴影部分}=5$（平方厘米）

答：阴影部分的面积是 5 平方厘米。

20. 连接 AE、CE、BF，$\because AD=\frac{1}{3}AB$，

$\therefore S_{\Delta ADF}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABF}$，$\because CE=\frac{1}{3}AC$，$\therefore S_{\Delta ABF}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}$

$\therefore S_{\Delta ADF}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}S_{\Delta ABC}$

同理，$S_{\Delta DBE}=S_{\Delta ABC}$，

$S_{\Delta CEF}=S_{\Delta ABC}$

$\because S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADF}+S_{\Delta BDE}+S_{\Delta CEF}+S_{\Delta DEF}=S_{\Delta ABC}\times 3+S_{\Delta DEF}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}+S_{\Delta DEF}$

$\therefore S_{\Delta DEF}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$

即$S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta DEF}=5\times 3=15$（平方厘米）

答：ΔABC的面积是 15 平方厘米。

第十九章　简单的统筹规则问题

1．妈妈杀好鱼后，让小明帮助烧鱼。他洗鱼 2 分钟，切鱼 2 分钟，切姜片、葱花 1 分钟，洗锅 2 分钟，将锅烧热 2 分钟，将油烧热 3 分钟，煎烧鱼 5 分钟，各工序共花 317 分钟，请你设计一个顺序，使花费的时间最少。

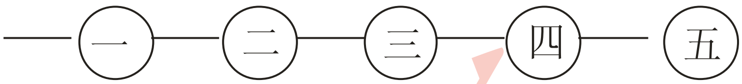
2．佳佳做饭，择菜用 3 分钟，洗菜用 3 分钟，控水用 3 分钟，洗米用 3 分钟，煮饭用 10 分钟，切菜用 4 分钟，炒菜用 6 分钟，若佳佳使用单火眼煤气灶，怎样安排顺序最省时合理？

3．冬天喝果珍。冬冬回家想喝热果珍，可是没有开水，他需要烧开水 15 分钟，洗水壶 1 分钟，洗水杯 1 分钟，打开一瓶新果珍用 2 分钟，他应该怎样安排，才能在最短的时间内沏好热果珍？

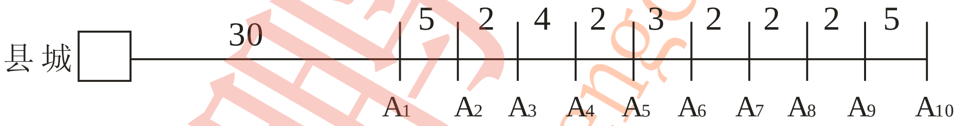
4．假设烙一个馅饼需要 4 分钟（每一面需要 2 分钟）。一个烙饼锅每次正好可以烙两个，烙九十七张馅饼至少需要几分钟？

5．设有十个人各拿一只提桶，同时到水龙头前打水。设水龙头注满第一个人的桶需要 1 分钟，注满第二个人需要 2 分钟，依此类推，注满第几个人的桶就需要几分钟。如果只有一只水龙头，适当安排这十个人的排队顺序，就可以使每个人所费时间的总和尽可能小，问这个总费时至少是多少分钟？

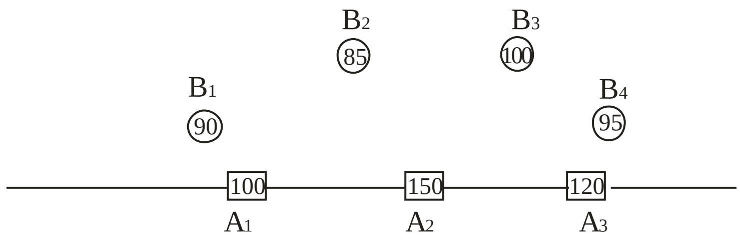
6．在一条公路上，每隔 100 千米有一个仓库，共五个仓库（如图），一号仓库存 10 吨货物，二号仓库存 20 吨货物，五号仓库存 40 吨货物，其余两座仓库空着。现将所有货物集中存放，如果每 1 吨货物运 1 千米，运费为 0.5 元，那么最少要多少元运费？



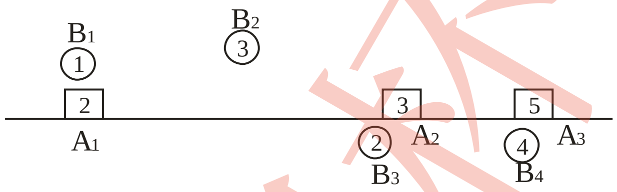
7．有十个村，座落在从县城出发的一条公路上（如图，距离单位是千米），要安排水管，从县城送自来水供给各村，可以用粗细两种水管，粗管足够供应所有各村用水，细管只能供一个村用水，粗管每千米要用 8000 元，细管每千米要用 2000 元，把粗管细管适当搭配，互相连接，可以降低工程的总费用，按你认为费用最节约的方法，费用是多少？



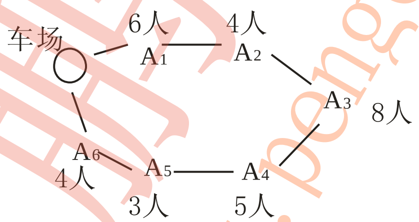
8．如图，A_1，A_2，A_3是铁路线上三个货运站，现在三个站共卸下 370 吨货物，要把它们送到B_1，B_2，B_3，B_4四个仓库去，试作出吨千米数最小的运输流向图。



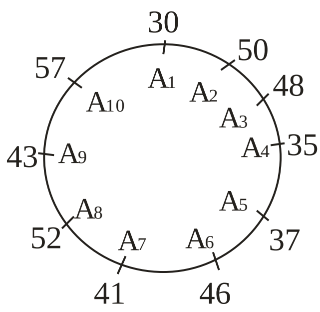
9．如图，A_1，A_2，A_3是三个产粮点，B_1，B_2，B_3，B_4是四个粮食仓库，现要将产粮点的粮食运往仓库储存，怎样安排调运粮食的运输任务能使运输量最小？



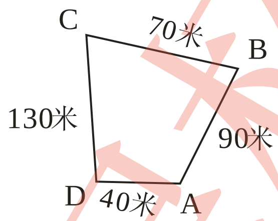
10．某车场每天有 4 辆汽车经过六个点组织循环运输，在每个点所需装货工人如图所示，当然，装货工人可以固定在每个点上等车，也可以坐车到各点，也可以一部分在点上等候，一部分等车，问：怎样安排使装卸工人的总人数最少？最少需多少人？



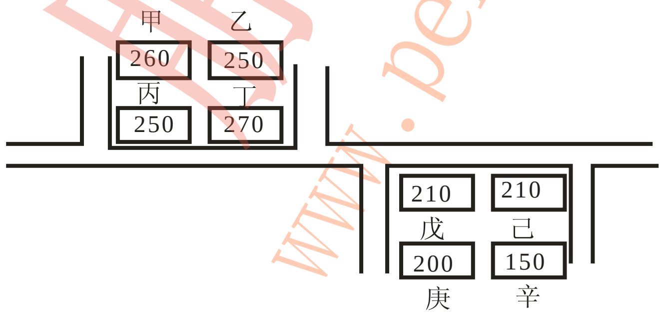
11．某工厂有十个车间分散在一条环行的轨道上，四列货车在铁道上转圈，货车到了某一车间，就要有装卸工进行装卸货物，问：至少要安排多少名工人？（各车间所需装卸工人数如图所示）



12．某工地 A 有 20 辆卡车，要把 60 车渣土从 A 运到B_1把 40 车砖从 C 运到 D。t 地道路图如下图所示），那么如何调运最省汽油？



13．某住宅区有 8 栋楼房，分布如下图，长方形表示楼房，数字表示楼内居住的人口，横竖带形表示住宅区内的道路，现要在住宅区内新建一座商店，商店最佳位置在哪？

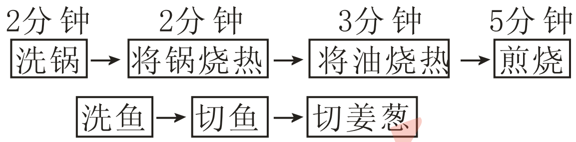


漏几条题

20．将 1000 表示成若干个自然数的和，并使这些数的乘积最大，这些数应该是哪些数？

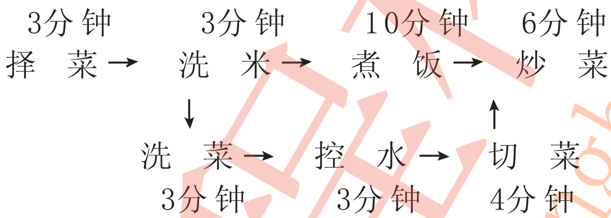
分析解答

1．首先要洗锅，洗鱼，切鱼才能煎烧鱼。因此我们将时间重叠使用，即：



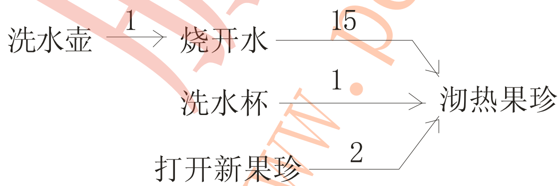
这样花费的时间最少，用 12 分钟。

2．因为是单火眼灶具所以炒菜与煮饭不能同时进行，但在煮饭时，可同时将炒菜前所要做的准备工作同时完成，即：



总共用 22 分钟。

3．开水壶不洗，不能烧开水。因此，洗开水壶是烧开水的先决条件，没有开水，不洗水杯，没有果珍，则不能沏出热果珍，因此，烧开水，洗水杯，拿果珍又是沏好热果珍的先决条件，因此，按下面方法最省时，即：



答：他能在 16 分钟内沏好热果珍。

4．2 张饼要用 4 分钟，3 张饼则需要 6 分钟（∵3 张饼共 6 个面，每面用 2 分钟，而一个 2 分钟内可以烙 2 个面，∴三张饼应用 6 分钟）。

若 94 张饼则共有 188 个面，共需$188 \div 2 = 94$（分钟）。

还差 3 张饼，故再用 6 分钟。

因此，烙九十七张馅饼至少需要$94 + 6 = 100$（分钟）

答：至少用 100 分钟。

5．只有把打水所费时间最少的一次从前往后排。因此，假设只有两个人，另一人在打水时，两人同时等候 1 分钟，第二人打水时，第 2 人等候 2 分钟，所以两人总费时$1\times2+2=4$（分钟）。三人打水则$1+2\times2=5$(分钟)……，十人打水：$1\times10+2\times9+3\times8+4\times7+5\times6+6\times5+7\times4+8\times3+9\times2+10\times1=220$（分钟）。因此至少用 220 分钟。

6．运费的多少取决于运货所行路程的长短及所运货物的重量。因此，要使运费尽可能省，一般就要使路程与重量的乘积尽可能的小。

因此，本题的解是：放在五号仓库，总运费最省，为：

$0.5\times(10\times400+20\times300)=5000$（元）

答：至少要 5000 元运费。

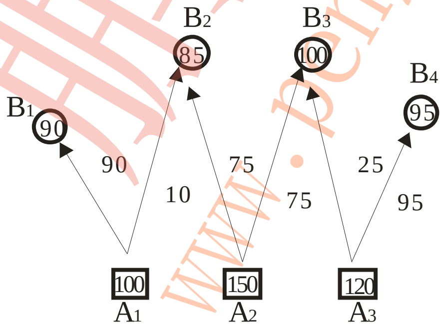
7．从已知中可得出，1 根粗管的价钱相当于 4 根细管的价钱，因此，凡是超过 4 根细管的路段就应改用 1 根粗管。所以从县城到A_7铺粗管，A_7村到A_8村铺 3 根细管，A_8村到A_9村铺 2 根细管，A_9村到A_{10}村铺 1 根细管。总费用为：

$8000\times(30+5+2+4+2+3)+2000\times(2\times4+2\times3+2\times2+5)=414000$（元）

答：最节约的总费用为 414000 元。

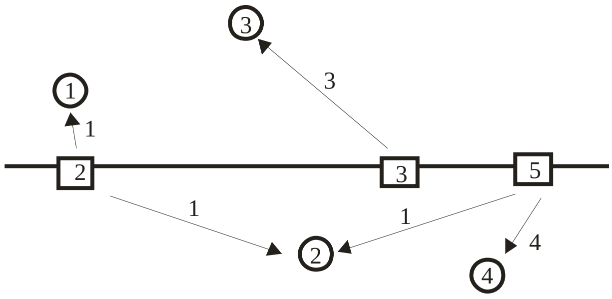
8．各个车站的货物量及各个仓库的容量图中已给出，要使吨千米数最小，即同样重的货物运程越短吨千米数就越小。

因此，吨千米最小的运输流向图为：



9．每产粮点的粮食产量及每个仓库的容量图上已给出，要使运输量最小，则同样的粮食重量运输路程最短。

因此，最佳方案如下图所示：



10．如果从每个固定点上抽出 3 人，6 个点共抽出 18 人。他人的工作只要在每辆车上安排 3 人就可完成。4 辆车共安排了$3\times4=12$(人)。这时就可节约$18-12=6$(人)。每个固定点上的等候工人有：A_1(3 人)，A_2(1 人)，A_3(5 人)，A_4(2 人)，A_5(0 人)，A_6(1 人)。

再从每个固定点抽出 1 人，因为只有 5 个点有人，所以总共抽出$1\times5=5$人，每辆车上安排 1 人，就又节约 1 人。这时，各固定点上的人数为：A_1（2 人），A_2（0 人），A_3（4 人），A_4（1 人），A_5（0 人），A_6（0 人）。

现在安排总人数就是最少的。

$3\times4+1\times4+2+4+1=23$（人）

答：至少安排 23 名装卸工人。

11．各车间所需装卸工人数，有五个车间的人数大于 46 人，有五个车间的人数小于 46 人，如果每辆货车乘坐 46 名工人，则有六个车间不必留人，而有四个车间分别留的人数为：2 人，4 人，6 人，11 人，而现在的总人数为最少，总共为：$46\times4+4+2+6+11=207$（人）

答：至少安排 207 名工人。

12．只要设法减少跑空车的距离，才能省汽油：

如果各派 10 辆车分别运土和砖，那么每运一车渣车要空车跑 90 米，每运一车砖要空车跑 130 米。这样完成任务共跑空车$90\times60+130\times40=10600$（米）。

如果一辆车从 A→B→C→D→A 跑一圈，那么每运一车土和砖共要跑空车$70+40=110$（米）。因此，派 20 辆车，每辆车这样跑两圈就完成运砖任务，然后再派这 20 辆车都从 A 运土到 B 再空车返回 A，完成任务共跑空车$110\times40+90\times20=6200$（米），这种调运最省汽油。

13．此题采用“小靠大”的原则。整个住宅的人口数为：$260+250+250+270+$

$210+210+200+150=1800$（人）

∵甲，乙，庚，辛四楼居民人数都小于整个住宅总人数的一半∴商店不可能在甲、乙、庚、辛四楼的附近。又∵丙、乙楼的人数也都小于整个住宅的总人数的一半，∴商店不可能在丙、乙楼附近。

所以只能在由丁楼到戊楼这段道路，再将丙、乙人口分别集合在丁楼和戊楼上，由此得到：

$$510+520>410+360$$

即丁楼的集中人口比戊楼集中人口多，所以“小靠大”，商店的最佳位置是在丁楼附近的路边。

14. 无残料的剪法则是最优方案。

解：设 4 米长的剪 a 根，7 米长的剪 b 根。

$4a+7b=210$

根据倍数分析法可知：a 是 7 的倍数。若$a_1=0$，则$b_1=30$。

$a_2=7$，则$b_2=26$

$a_3=14$，则$b_3=22$

$a_4=21$，则$b_4=18$

$a_5=28$，则$b_5=14$

$a_6=35$，则$b_6=10$

$a_7=42$，则$b_7=6$

$a_8=49$，则$b_8=2$

因此，有八种剪法都省材料。

15. 要使等候时间总和最少，则必须把时间用得最少的病人排在第一位。

因此，李大夫安排治病次序为小青、小明。最后小东。

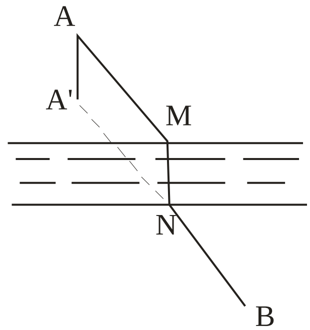
等候时间总和是：

$1\times3+3\times2+5=14$（分钟）

答：安排治病顺序为先小青，再小明，最后小东。总等候时间是 14 分钟。

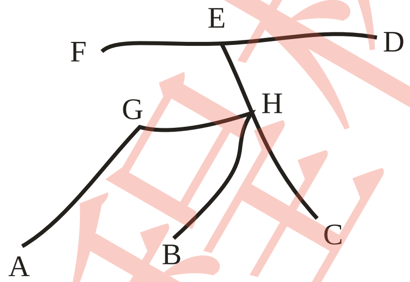
16. 求最短道路，就是求最短折线问题，即折线 AMNB 何时最短？

首先作AA'垂直于河岸，且AA'的长等于河宽（即桥上）。连接$A'B$，$A'B$与临 B 镇的河岸交于 N 点，再作 MN 垂直于河岸，交临 A 镇河岸于 M 点，MN 应为架桥的位置，也就是：$AM+MN+NB$为 A 镇经桥过河到 B 镇的最短路线。



17．要在全乡架设广播线，整个线路应是连通的。所以架设的广播战形成一个树形脉络。∵要求脉络的总长度要尽可能的短（即电线最省），有闭路就会造成浪费。

去掉圈 AGEFA 中最长的线 AF，AGHBA 中最长线 AB，BCHB 中最长线 BC，CDHC 中最长线 CD，DEHD 中最长线 HD，HEGH 中最长线 EG。形成树形脉络图，且脉络的总长度最短，这就是最佳架设线线路。



18．把 8 到 50 的自然数分成若干个 3 和 5 之和，并使 3 尽可能地多。有：

$8 = 3 + 5$

$9 = 3 \times 3$

$10 = 5 \times 2$

$11 = 2 \times 3 + 5$

$12 = 3 \times 4$

$13 = 3 + 5 \times 2$

……

每相邻三个数拆有 3 个 5。$43 = 3 \times 14 + 1$，那么共拆成 5 的个数为 $3 \times 14 + 1 = 43$（个）。

因此，他们买的 5 分画片共 43 张。

19．人员调运时不考虑路程远近因素，就只需避免两个营地之间相互调整。即"避

免对流现象”。

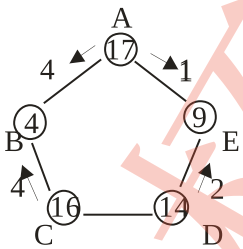
$\because 17+4+16+14+9=60$（人）

$60\div 5=12$（人）

$\therefore$ 每个营地应为 12 人。

因此，需从多于 12 人的营地向不足 12 人的营地调人。

调动示意图如图：从 D 调出 2 人给 E，这样 E 只缺 1 人，再从 A 调 1 人给 E，A 还多 4 人，A 调出 4 人给 B，B 为 8 人，B 还不足 4 人，而 C 正好多 4 人，从 C 调 4 人给 B，B 正好符合要求。



20．把 1000 随意分成若干个自然数的和，并使这些数的积最大，则这些数里不能有 1，因为 1 乘以任何数都不变，而把 1 加到另一个数上去，则乘机会变大。

如果分成的数有 5，$5=2+3$，而$2\times 3>5$，$\therefore$不会有 5。

如果有一个数$a>4$，把它分成 2 和$a-2$，则$2\times(a-2)=2a-4=a+(a-4)$、比 a 大。由于这个原因，大于 4 的数都应该再分成较小的数，这样经逐步调整，折数都是 2 或 3、$(4=2+2=2\times 2)$ $\because 2\times 2\times 2=8$，$3\times 3=9$。$\therefore$有 3 个 2 时，应换成 2 个 3，使乘积增大，所以分成的数中至多有 2 个 2。其余都是 3。

又$\because 1000=3\times 332+2\times 2$

因此，要使分成的数乘积最大，则 1000 必须分成两个 2 和 332 个 3。

第二十章　数学竞赛试题选讲

1．求和为 1976 的正整数之积的最大值。

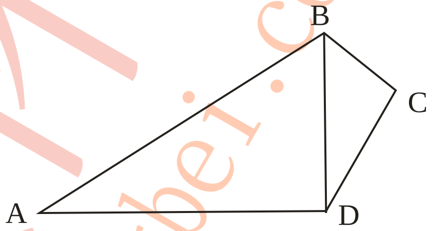
2．一个人步行每小时走 5 千米，如果骑自行车，每 1 千米比步行少用 8 分钟，那么他骑自行车的速度是步行速度的几倍？

3．设$x = 1 \times 1990 + 2 \times 1990 + 3 \times 1990 + \cdots\ldots + 1990 \times 1990$，那么 x 被 9 除所得的余数是多少？

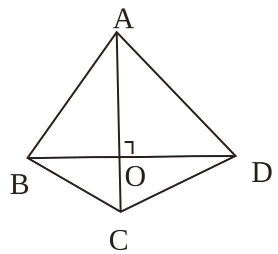
4．自然数$\underbrace{2 \times 2 \times \ldots\ldots \times 2}_{67\text{个}2\text{连乘}} - 1$的个位数字是几？

5. 动物园的饲养员给三群猴子分花生，如果只分给第一群，则每只猴子可得 12 粒；如果只分给第二群，则每只猴子可得 15 粒；如果只分给第三群猴子，则每只猴子可得 20 粒。那么平均分三群猴子，每只猴子可得几粒？

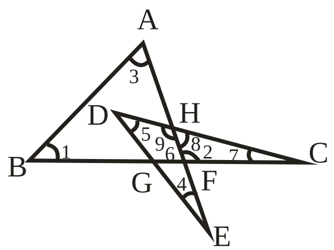
6. 已知四边形 ABCD，$AB = 13$，$BC = 3$，$CD = 4$，$DA = 12$，并且 BD 与 AD 垂直，则四边形 ABCD 的面积是多少？



7. 如图，四边形 ABCD 由四个直角三角形拼凑而成，它们的公共角顶点为 O，已知ΔAOB、ΔBOC、ΔCOD的面积分别是 20，10，16，那么ΔAOD的面积是多少？



8. 求图中$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$的总和是多少？



9．摩托车赛满全程共 281 千米，全路被划分若干阶段，有的阶段是由一段上坡路（3 千米）、一段平路（4 千米）、一段下坡路（2 千米）和一段平路（4 千米）组成；有的阶段是由一段上坡路（3 千米）、一段下坡路（2 千米）和一段平路（4 千米）组成。已知摩托车跑完全程后，共跑了 25 段上坡路，问：全程中包含两种阶段各几段？

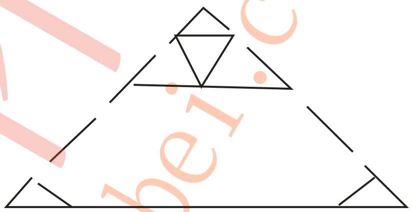
10．铁路旁的一条平行小路上，有一行人与一骑车人同时向南行进，行人速度为 3.6 千米/小时，骑车人速度为 10.8 千米/小时。这时有一列火车从他们背后开过来，火车通过行人用 22 秒钟，通过骑车人用 26 秒钟，这列火车的车身总长是多少千米？

11．一大块金帝牌巧克力可以分成若干大小一样的正方形小块，小明和小强各有一大块金帝牌巧克力，他们同时开始吃第一小块巧克力，小明每隔 20 分钟吃 1 小方块，14 时 40 分吃最后 1 小方块；小强每隔 30 分钟吃 1 小方块，18 时吃最后 1 小方块，那么他们是几时开始吃第 1 小方块的？

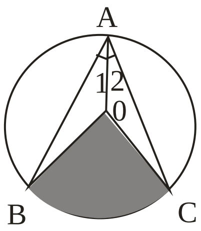
12．甲、乙二人轮流在黑板上写下不超过 10 的自然数，规定禁止在黑板上写已写过的数的约数，最后能写的人为失败者，如果甲第一个写数，试问谁一定获胜？给出一种获胜的方法。

13．能否在 10 行 10 列的方格表的每个空格中分别填上 1，2，3 这三个数之一，而使大正方形的每行、每列及对角线上的各个数字和互不相同？对你的结论加以说明。

14．用三根等长的火柴可以摆成一个等边三角形，用这样的等边三角形拼合成一个大的等边三角形（如图），如果这个大的等边三角形的底为 20 根火柴长，那么一共要用多少根火柴？



15．如图，已知圆心是 O，半径$r = 9$厘米，$\angle 1 = \angle 2 = 15°$，那么阴影面积是多少平方厘米（$\pi \approx 3.14$）



16．甲、乙两个自然数的乘积比甲数的平方小 1988，那么满足这样条件的自然数有几组？

17. 1988 名同学按编号从小到大顺次排成一列，令奇数号位（1 号位，3 号位，……）上的同学离队，余下的同学顺序不变，再令其中站在新编号奇数号位上的同学离队，依次重复上面的要求，那么最后留下的同学在一开始是排在第几号位？

18. 甲、乙、丙、丁四人一共做了 370 个零件，如果把甲做的个数加 10 个，乙做的个数减 20 个，丙做的个数乘以 2，丁做的个数除以 2，四人做的零件就正好相等，那么乙实际做了多少个零件？

19. 有一个 93 人的旅游团，其中男 47 人、女 46 人，住到某一个旅馆里，旅馆里有可住 11 人，7 人，4 人的三种房间，经过服务员的安排，这个旅游团的男女分住不同的房间里，而且每个房间都按原定人数住满了旅游团的人。服务员最少动用了多少个房间？

20. 两个数之和是 616，其中一个数的最后一位数字是 0，如果把 0 去掉，就与另一个数相同，这两个数的差是多少？

分析解答

1．根据题意，把 1976 分成若干个正整数，使这些数的乘积最大。

因此，这些数中不可能有 0，1，也不可能有 5。($\because 5 = 2 + 3$，$2 \times 3 > 5$)。

如果这些数中有正整数$a > 4$，则$a = 2 + (a - 2)$，$\therefore 2 \times (a - 2) = 2a - 4 = a + (a - 4)$，$\therefore$比 a 大。因此，大于 4 的数都应该再分成较小的数。

而如果有 4，则$4 = 2 + 2 = 2 \times 2$，乘积不变，所以 4 完全可以也拆成两个 2。

由于$2 \times 2 \times 2 = 8$，$3 \times 3 = 9$。因此，2 最多不能多于两个。

所以，拆出的数都是 2 和 3。

由于$1976 = 3 \times 658 + 2$。

因此，1976 拆成 658 个 3 和 1 个 2 的和，它们的乘积最大。最大为：

$$3^{658} \times 2$$

答：和为 1976 的正整数之积的最大值是$3^{658} \times 2$

2．骑车和步行 1 千米所用的时间比是$\frac{1}{15} : \frac{1}{5}$。则速度比与时间比成反比。

骑车和步行所用时间比为：

$\frac{1}{60 \div 4} : \frac{1}{5} = 1 : 3$

则骑车和步行速度的比为$3 : 1$。

即骑车速度是步行速度的 3 倍。

3．解法一：$x = (1 + 2 + 3 + \cdots + 1990) \times 1990 = \left[\times（1 + 1990）\times 1990\right] \times 1990 = 995 \times 1991 \times 1990 = 3942279550$

$\because$ x 被 9 除所得的余数等于它的各各数位数字之和被 9 除所得的余数，$\because 3 + 4 + 2 = 9$，$2 + 7 = 9$，根据弃九法，在计算各数字和时可将这样的 9 的倍数去掉。只考虑$5 + 5 = 10$被 9 除所得的余数是 1，所以，x 被 9 除所得的余数是 1。

解法二：

$x = (1 + 2 + 3 + \cdots + 1990) \times 1990$

$= 995 \times 1991 \times 1990$

$\because 995 \equiv 5(\bmod 9)$

$1990 \equiv 1(\bmod 9)$

$1991 \equiv 2(\bmod 9)$

$\therefore x \equiv 995 \times 1990 \times 1991 \equiv 5 \times 1 \times 2 \equiv 10 \equiv 1(\bmod 9)$

即 x 被 9 除余 1。

4. 先从2^n入手，观察：2^n的个位数字随 n 的依次增大的变化规律。从而找出本题的所求结果。$2^n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\text{ 个 2 连乘}}$（n 是自然数）。

当$n = 1$时，2^n个位数字是 2，

当$n = 2$时，2^n个位数字是 4，

当$n = 3$时，2^n个位数字是 8，

当$n = 4$时，2^n个位数字是 6，

当$n = 5$时，2^n个位数字是 2，

当$n = 6$时，2^n个位数字是 4，

当$n = 7$时，2^n个位数字是 8，

当$n = 8$时，2^n个位数字是 6，

……

当$n = 4k + 1$（k 为正整数），2^n个位数字是 2；

当$n = 4k + 2$（k 为正整数），2^n个位数字是 4；

当$n = 4k + 3$（k 为正整数），2^n个位数字是 8；

当$n = 4k$时（k 为正整数），2^n个位数字是 6。

$\because 67 = 4 \times 16 + 3$，

$\therefore 2^{67}$的个位数字是 8。

$\therefore \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{67\text{ 个 2 连乘}} - 1$的个位数字是 7。

5. 根据题意可知，花生总数 n 应是 12,15,20 的公倍数。由于三个自然数的公倍数必定是它们的最小公倍数的倍数，而 12、15、20 的最小公倍数是：$2^2 \times 3 \times 5 = 60$，因此，n 是 60 的倍数。

设 n 是 60 的 m 倍（m 是整数）

即 $n = 60m$

第一群猴子总数则为：$60m \div 12 = 5m$；

第二群猴子总数则为：$60m \div 15 = 4m$。

第三群猴子总数则为：$60m \div 20 = 3m$；

三群猴子的总数为：$5m + 4m + 3m = 12m$。

∴把花生平均分给三群猴子，每只猴子可得：$60m \div 12m = 5$（粒）。

答：每只猴子得 5 粒。

6．此题选用勾股定理解答。

在直角ΔABD中运用勾股定理有$BD^2 = 13^2 - 12^2 = 25$。

11．这实质是追及问题首先确定有多少小方块？

$$\left(18 - 14\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 20$$

这就是说，一大块可以分成 21 小方块。于是可知小强吃最后一小方块与吃第一小方块共相隔$\frac{1}{2} \times 20 = 10$(小时)。所以小强吃第一小方块的时间为：$18 - 10 = 8$(时)。

答：他们是 8 时开始吃第 1 小方块的。

12．甲必须先写 6，这样除去 6 的约数 1,2,3,6，乙只能写 4,5,7,8,9,10 甲心中把（4,5），（7,9），（8,10）分组，乙写任何一组中的某个数，甲写这组中的另一个数。用这种取胜的策略，甲总可以取胜。

13．解法一：假设 10 行、10 列及对角线上各数之和是 22 个互不相同的整数值。

∵每条线上 10 个数字和最大是 30，最小是 10，而从 10 到 30 之间只有 21 个允许的整数值，这与假设矛盾。

∴无论怎么填，也不能满足题目要求。

解法二：若每格均填“1”，十个数字和最小为 10，若每格均填“3”，十个数字和最大为 30。

∵从 10 到 30 之间只有 21 个互不相同的整数值，把 21 个互不相同的值作为 21 个“抽屉”。而 10 行，10 列及两条对角线上各个数字和共有 22 个整数值，这与元素的个数比抽屉个数多 1，据“抽屉原则”可知，一定有且至少有两个数值同属于 1 个“抽屉”，即要使大正方形的每行，每列及对角线上的各个数字和

互不相同是不可能的。

14. 把大的等边三角形分为 20“层”，分别计算火柴的根数：最上一“层”只用了 3 根火柴。

从上向下数第二层用了$3\times 2=6$根火柴。

从上向下数第三层用了$3\times 3=9$根火柴。

……

从上向下数第 20 层用了$3\times 20=60$根火柴。

∴总共要用火柴：

$$3\times(1+2+3+\cdots+20)=630(根)$$

答：共要用 630 根火柴。

15. ∵圆的半径都相等，于是又：$OA=OB$，在等腰三角形 AOB 中，$\angle_1=\angle_3=15°$。

∴ $\angle AOB=180°-15°\times 2=150°$

同理，$\angle AOC=150°$因此，有：

$\angle BOC=360°-(150°+150°)=60°$，这就是说，阴影部分扇形面积是圆面积的六分之一。

即：$\frac{1}{6}\times\pi\times r^2=\frac{1}{6}\times 3.14\times 9^2=42.39$（平方厘米）。

答：阴影面积是 42.39 平方厘米。

16. $甲\times 甲-甲\times 乙=1988$。即：$甲\times(甲-乙)=1988$。

而：$1988=2\times 2\times 7\times 71$

又$甲>甲-乙$。于是，有：

$\begin{cases}甲=2\times 2\times 7\times 71\\ 甲-乙=1\end{cases}$ 即$\begin{cases}甲=1988\\ 乙=1987\end{cases}$

或$\begin{cases}甲=2\times 7\times 71\\ 甲-乙=2,\end{cases}$ 即$\begin{cases}甲=994\\ 乙=992\end{cases}$

或$\begin{cases}甲=7\times 71\\ 甲-乙=4,\end{cases}$ 即$\begin{cases}甲=497\\ 乙=493\end{cases}$

或$\begin{cases}甲 = 2 \times 7 \times 71 \\ 甲 - 乙 = 7,\end{cases}$ 即$\begin{cases}甲 = 284 \\ 乙 = 277\end{cases}$

或$\begin{cases}甲 = 2 \times 71 \\ 甲 - 乙 = 14,\end{cases}$ 即$\begin{cases}甲 = 142 \\ 乙 = 128\end{cases}$

或$\begin{cases}甲 = 71 \\ 甲 - 乙 = 28,\end{cases}$ 即$\begin{cases}甲 = 71 \\ 乙 = 43\end{cases}$

所以，满足条件的自然数有 6 组。

17. 第一次令奇数号位的同学离队后，余下同学的编号是：

2×1，2×2，2×3，2×4，…，2×994

再令余下同学中站在奇数号位的同学离队后，剩下的同学编号是：

4×1，4×2，4×3，4×4，…，4×497

依此类推，第 9 次剩下的同学编号是：$2^9 \times 1$，$2^9 \times 2$，$2^9 \times 3$

第 10 次剩下的同学原来的编号是：

$2^{10} = 1024$。即为所求。

18. 如果甲增加 10 个，则相当丙的 2 倍，乙减少 20 个，则相当丙的 2 倍，丁做的个数相当丙的 4 倍。也就是说，在总和中加上 10 个，再减去 20 个，相当于丙的$2 + 2 + 1 + 4 = 9$倍。

所以可求出丙做的个数为

$(37 + 10 - 20) \div (2 + 2 + 1 + 4) = 40$（个）

则乙做了：$40 \times 2 + 20 = 100$（个）

答：乙实际做了 100 个零件。

19. 为了尽可能少动用房间，服务员必须考虑让男女旅客尽量多住 11 人一间的客房。

男旅客 47 人，若住 4 间 11 人的客房，则余下 3 人无法住满任何一种客房。故不成立，若住 3 间 11 人的客房，余下的$47 - 11 \times 3 = 14$（人）恰好可以住满 7 人的客房两间。

因此，男旅客最少要用$3 + 2 = 5$（间）客房。

同男旅客的分配方法一样，女旅客 46 人，需用 11 人的客房 1 间，7 人的客房 5 间，共 6 间；

所以，男女旅客至少要用$6+5=11$间客房。

答：服务员最少动用 11 间客房。

20. 一个数的最后一位数字是 0，如果把 0 去掉，就是把这个数缩小了 10 倍。当一个数缩小 10 倍后与另一个数相同时，那么原来这个数就是另一个数的 10 倍。甲乙两数之和 616 就相遇乙数的$(10+1)$倍，于是可求乙数为：

$616\div(10+1)=56$

则两数之差为：$56\times(10-1)$

$=56\times9$

$=504$

答：这两个数的差是 504。