目 录

第一章　数的整除问题

1. $\overline{45ab}$这个四位数，同时能被2、3、4、5、9整除，求此四位数。

2. 老师买了72本相同的词典，当时没有记住每本词典的价格，只用铅笔记下了用掉的总钱数，回校后发现两个数字已看不清了，你能帮助补上这两个数字吗？（□25.7□元，□中的数字看不清）

3. 在358后面补上三个数字，组成一个六位数，使它能分别被3、4、5整除，且使这个数值尽可能的小。

4. 下面这二百零一位数11……1□22……2（其中1和2各有100个）能被13整除，那么中间方格内应填什么数？

5. 已知整数$\overline{5a6a7a8a9a}$能被 11 整除，求所有满足这个条件的整数。

6. 在二进制数中，各位数字均是 0 或 1，并且能被 225 整除的最小自然数是什么？

7. 有三个同学，写了三个数分别是 275、666、850，某个同学又写了一个比 884 大的三位数使得这四个数的平均数是一个整数，这个平均数是多少？

8. 有一个 1997 位数 A 能被 9 整除，它的各位数字之和为 a，a 的各位数字之和为 b，b 的各位数之和为 c，求 c 是多少？

9. 55 块糖分给甲、乙、丙三人，甲分到糖的块数是乙的 2 倍，丙最少，但也多于 10 块，三个人各分到糖多少块？

10. 六名同学做加法练习，任写一个六位数，把它的个位数字拿到这个数最左一位数字的左边得到一个新的六位数，然后与原六位数相加，1 号同学的答数是 1338837，2 号同学的答数是 172536，3 号同学答数是 568741，4 号同学的答数是 734697，5 号同学答数是 752290，6 号同学答数是 845267，他们当中谁做对了？为什么？

11. 商店有六箱货物，分别重 18、19、21、22、23、24 千克，两个顾客买了其中五箱。已知一个顾客买的货物重量是另一个顾客的 3 倍，问商店剩下的一箱货物重多少千克？

12. 三位数的百位、十位，个位数字分别是 7、a、b，将它接连重复写 1997 次成为 $\underbrace{\overline{7ab7ab\ldots\ldots7ab}}_{1997\text{个}7ab}$ 如果所成之数能被 91 整除，这个三位数 $\overline{7ab}$ 是多少？

13. 一个三位数减去它的各个数位的数字之和其差还是一个三位数$\overline{51x}$，求 x 是多少？

14. 将自然数 1、2、3……依次写下去组成一个数，123456789101112……，如果写到某个自然数时，所组成的数恰好第一次能被 72 整除，那么这个自然数是多少？

15. 九个连续自然数中最多有四个质数，例如 1~9 中有 2、3、5、7 四个数。请在 200 以内再找出五组这样的质数。

16. 证明：任意一个三位数连着写两次得到一个六位数，这个六位数一定能同时被 7、11、13 整除。

17. 证明：$11^{10}-1$ 能被 100 整除。

18. 若五位数$\overline{abcde}$能被 6 整除，那么，2（a＋b＋c＋d）－e也能被 6 整除。

19. 证明，任意两个自然数的和，差，积中，至少有一个能被 3 整除。

分析解答

1. 因为 $5|\overline{45ab}$，所以 b=0 或 5。又因为 $2|\overline{45ab}$，故 b=0，即原四位数是$\overline{45a0}$只需确定 a。

   因为 $9|\overline{45a0}$，所以 $9|(4+5+a)$，即 9|a。则 a=0 或 9。

   又因为 $4|\overline{45a0}$，所以 a=0。

   所以，满足条件的四位数是 4500。

2. 我们把单位统一到分。设用掉的总钱数 A=$\overline{a257b}$分。因有 72 本相同的词典。所以 72|A

   ∵72=8×9，（8，9）=1

   ∴8|A，9|A

   由 8|A 知，$8|\overline{57b}$，经验证，b=6 即：A=$\overline{a257b}$

   又∵9|A

   ∴$9|(a+2+5+7+6)$，即 $9|(20+a)$

   经验证知：a=7 所以 A=72576

   因此，用掉的总钱数是 72576 分，即 725.76 元。

3. 设补上三个数字后的六位数为$\overline{358abc}$。因为这个六位数分别被 3、4、5 整除，所以它应满足以下三个条件：

   （1） 数字和$(3+5+8+a+b+c)$是 3 的倍数。

   （2） 末两位数组成的两位数$\overline{bc}$是 4 的倍数。

   （3） 末位数字 c 是 0 或 5。

   由于 $4|\overline{bc}$，所以 c 不能使 5 而只能是 0，且 b 只可能是 0、2、4、6、8。

   又因 $3|(3+5+8+a+b+c)$，即 $3|(3+5+8+a+b+0)$

   当 b=0 时，$3|(3+5+8+a+0)$，a 可为 2、5、8。

   当 b=2 时，$3|(3+5+8+a+2)$，a 可为 0、3、6、9。

   当 b=4 时，$3|(3+5+8+a+4)$，a 可为 1、4、7。

   当 b=6 时，$3|(3+5+8+a+6)$，a 可为 2、5、8。

   当 b=8 时，$3|(3+5+8+a+8)$，a 可为 0、3、6、9。

   要使六位数$\overline{358abc}$ 尽可能小，则 a 应取 0，b 应取 2，c 应取 0。

   所以能被 3、4、5 整除的最小六位数是 358020。

4. 根据能被 13 整除数的特征可知 111111（222222）能被 13 整除，而 100=6×16+4，故原来被 13 整除的算式就变为 13|111、1□2、222；即：

13|333−1□2

经试算即可知方格应填 1。

说明：一个三位以上的多位数能否被 13 整除，只需将这个多位数从后往前三位一组进行分段。若奇数段各三位数之和与偶数段各三位数之和的差能被 13 整除，则这个多位整数能被 13 整除。

5. $\because 11|\overline{5a6a7a8a9a}$

∴根据能被 11 整除的数的特征可知：

$11|(5+6+7+8+9)-5a$ 即：$11|(35-5a)$或 $11|(5a-35)$

又因为 $35-5a=5(7-a)$，$5a-35=5(a-7)$，$(5,11)=1$，所以 $11|(7-a)$或 $11|(a-7)$

$\because$ a是数位上的数字。

$\therefore$ a只能取 0~9

当a =7 时，$11|(7-a)$或 $11|(a-7)$

即当a =7 时，$11|(35-5a)$

∴符合题意的整数只有 5767778797。

6. 设所求的数为 A，则 225|A

∵225=9×25，（9,25）= 1

∴25|A，9|A

由 25|A 知，A 的末两位数字必须都是零。

由 9|A 知，A 的各数位上的数字之和是 9 的倍数。而 A 的各位数字都是 0 或 1，所以仅有 9 个 1 时，位数最少，所求的数也最小。

∴所求的最小自然数是$\underbrace{111111111}_{9个1}00$。

7. 因为$275+666+850=1791$，被 4 除于 3，并且比 884 大的三位数中，有 885 被 4 除余 1，所以这个同学写的是 885。

这四个数的平均值是

$$(275+666+850+885)\div 4$$

$$=669$$

答案不唯一

8. 1997 位数中，最大的数是$\underbrace{99\dots9}_{1997个9}$，而它的各位数字之和为$9\times 1997=17973$

于是，$a \le 17973$。其中各位数字和最大的是 16999，它的各位数字和是 $1+6+9+9+9=34$，于是$b \le 34$，而其中各位数字和最大的是 29，即：$c \le 11$

$\because 9|A$，$\therefore 9|a$。$\therefore 9|b$，$9|c$。

因此 c 是 9。

9. 由题目条件，可知甲、乙二人分到糖的块数和是 3 的倍数。设丙分到 x 块糖，则$x > 10$。

当$x = 11$、12时，$55 - x$不能被 3 整除，丙不可能有 11 块或 12 块糖。当$x = 13$时。

$$55 - 13 = 42, 42 \div 3 = 14$$

这时甲分到 28 块糖，乙分到 14 块。

当$x > 13$时，显然不符合题意。

因此，甲、乙、丙三人各分到糖 28 块，14 块，13 块。

10. 设原来六位数的个位数为 x，去掉个位数后的五位数为 y，则原来六位数为$10y + x$，新六位数为$100000x + y$，这两个六位数的和为：

$$\begin{aligned} & 10y + x = 100000x + y \\ & = 100001x + 11y \\ & = 11 \times (9091x + y) \end{aligned}$$

所以得数应是 11 的倍数。

六人的答案中，只有 5 号同学的答数能被 11 整除，所以 5 号同学做对了。

11. 根据题意知，买走的五箱货物的总重量应是 4 的倍数。而六箱货物的总重量是：

$$18 + 19 + 21 + 22 + 23 + 34 = 137(\text{千克})$$

137 被 4 除余 1，那么，剩下的一箱货物的重量也必须被 4 除余 1。

其中，只有 21 被 4 除余 1。

所以，剩下一箱货物的重量是 21 千克。

12. 因为$\overline{7ab7ab} = \overline{7ab} \times 1000 + \overline{7ab}$

$$\begin{aligned} & = \overline{7ab} \times 1001 \\ & = \overline{7ab} \times 11 \times 91 \end{aligned}$$

所以 $91|\overline{7ab7ab}$

又$\because \underbrace{\overline{7ab7ab\ldots\ldots7ab}}_{1997\text{ 个}\overline{7ab}} = \underbrace{\overline{7ab7ab\ldots\ldots7ab}}_{1996\text{ 个}\overline{7ab}} \times 1000 + \overline{7ab}$

所以，要使 $91|\underbrace{\overline{7ab7ab\ldots\ldots7ab}}_{1997\text{ 个}\overline{7ab}}$

只要使 $91|\overline{7ab}$，只有 728 能被 91 整除。

因此，$\overline{7ab}=728$

13. 设$\overline{abc}$为任一三位数（a 为 1 至 9 的整数，b、c 为 0 至 9 的整数），则其各个数位的数字和为$a+b+c$。

$$\overline{abc}-(a+b+c)$$
$$=100a+10b+c-a-b-c$$
$$=99a+9b$$
$$=9\times(11a+b)$$

即：$9|\left(\overline{abc}-(a+b+c)\right)$于是

$9|51x$，得出$x=3$。

14. 被 72 整除，一定能被 4、8、9 整除。（因为被 8 整除，一定能被 4 整除）。

要被 4 整除，末两位只能是 56，12，16，20，24，28，32，36，…

1，2，3，4，5，6 各数字之和是 21，这个数不能被 9 整除，同理可知，1234……1112 也不能被 9 整除。

516、324、132 不能被 8 整除，最后写出的数若是 16，24，32 组成的数不能被 8 整除。

如果写到 20 或 28，把各位数字加起来分别是 102 和 154，也不是 9 的倍数，组成的数不能被 9 整除。

当写到 36 时，末三位数 536 能被 8 整除，各位数字之和是 162，能被 9 整除。因此，写到 36，恰好是第一次被 72 整除。

说明：解这道题用到 4、8、9 的整除特征，利用排除法找到了唯一的答案。

15. 9 个连续自然数中至多有 5 个奇数。在这两位数中，个位为 5 的数能被 5 整除，而且三个连续奇数必有一个能被 3 整除，因此只有当个位为 5 的两位数能被 3 整除时，其余的四个奇数才有可能都是质数。当找到一组这样的两位以上的质数时，另一组与这组对应项之差必定是 30 的倍数。

所以，200 以内题目要求的五组质数是：3，5，7，11；5，7，11，13；11，13，17，19；101，103，107，109；191，193，197，199。

16. 证明：设任意一个三位数位$\overline{abc}$，则六位数

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= \overline{abc}\times 1000+\overline{abc}\\ &= 1001\times\overline{abc}\\ &= 7\times 11\times 13\times\overline{abc}\end{aligned}$$

所以，这个六位数一定能同时被 7、11、13 整除。

17. 证明： $11^{10}-1$

$=11^{10}-1^{10}$

$=(11-1)(11^9+11^8+\cdots+11+1)$

$=10\times(11^9+11^8+\cdots+11+1)$

而$11^9+11^8+\cdots+11+1$共 10 项，每项的个位数都是 1，和的个位数为 0。

所以$11^{10}-1$能被 100 整除。

18. 要证的 $6|2(a+b+c+d)-e$是五位数的数字 a,b,c,d,e 的和差式子与 6 的关系。与数字和有关的是被 3 整除的数，将$2(a+b+c+d)-e$改为$2(a+b+c+d+e)-3e$。只需证 $3|(a+b+c+d)$及 $2|e$ 即可。

证明：由 $6|\overline{abcde}$，有 $3|abcde$ 及 $2|abcde$

$\therefore 3|(a+b+c+d+e)$且 e 为偶数。

$2(a+b+c+d)-e$

$=2(a+b+c+d+e)-3e$

由 $3|(a+b+c+d+e)$，有 $6|2(a+b+c+d+e)$

由 $2|e$，有 $6|3e$

$\therefore 6|2(a+b+c+d+e)-3e$

即 $6|2(a+b+c+d)-e$

19. 若两个数中至少有一个数被 3 整除，则它们的积必被 3 整除。

若两个数都不能被 3 整除，我们又可以分成两种情况：

当两个数被 3 除余数相同时，它们的差一定能被 3 整除。

当两个数被 3 除余数不相同时，则必定一个被 3 除余 1，另一个被 3 除余 2，它们的和又被 3 整除。

于是问题可证。

第二章 质数与合数

1. 在下面的算式里，四个小纸片各盖住一个数字，被盖住的四个数字之和是多少？

$$\begin{array}{r} \square\ \square \\ \times\ \square\ \square \\ \hline 1\,0\,0\,1 \end{array}$$

2. 两个质数和是 50，求这两个质数的乘积的最大值是多少？

3. 四个连续的奇数，它们的积为 19305，这四个奇数中最小的一个是多少？

4. 44448888 个方块排成一个长方阵，每一横行的方块数比每一竖列的方块数多 2，这个长方阵每一横行有多少个方块？

5. 求 1112111 的约数共有多少个？

6. 有 90 个约数的最小自然数是几？

7. 学校组织军烈属的慰问活动，决定由一、二、三、四、五年级各出一名代表，这五名同学的年龄一个比一个大一岁，他们的年龄乘积是 55440，这五个同学的年龄分别是几岁？

8. 有三个自然数 a、b、c。已知$a \times b = 30$，$b \times c = 35$，$a \times c = 42$，求$a \times b \times c$是多少？

9. 三个质数的倒数之和是$\frac{1383}{4565}$，则这三个质数之和是多少？

10. 一个整数 a 与 2376 的乘积是一个完全平方数，求 a 的最小值和这个平方数。

11. 有一个自然数，它有 4 个不同的质因数，而有 32 个约数。其中一个质因数是两位数，它的数字之和是 11，并要求这个质数尽可能大，问这个自然数最小是多少？

12. 有 1、2、3、4、5、6、7、8、9 九张牌，甲、乙、丙各拿三张。甲说：“我的三张牌的积是 48。”乙说：“我的三张牌的和是 16。”丙说：“我的三张牌的积是 63。”问他们各拿哪三张牌？

13. 把 35 拆成若干个不同质数之和，如果要使这些质数的积最大，问这几个质数分别是多少？

14. 在三张牌上分别写上三个最小的连续的奇质数，如果随意从其中取出至少一张组成一个数，其中有几个是质数？将它们写出来。

15. 写出十个连续自然数，个个都是合数。

16. 2000 年的哪几天，年数、月数和日数的乘积恰好等于三个连续的 5 的倍数的乘积。

17. 已知$p \cdot q + 1 = x$，其中$p \cdot q$为质数，且均小于 1000，x 是奇数，求 x 的最大值。

18. 把 26、33、34、35、63、85、91、143 分成若干组，要求每一组中，任意两个数的最大公约数是 1，那么至少要分成多少组？

19. 船夫用几只船分三次把 90 名同学渡过河去，已知每只船载的人数都相等，并且至少载 2 人，问每次应有多少只船？每只船载多少人？

20. 有一个$2n + 1$位整数（n 是整数，n≥1）$\underbrace{22\ldots2}_{n个2}3\underbrace{11\ldots1}_{n个1}$是质数还是合数。

分析解答

1. 因为$1001=7\times11\times13=(7\times11)\times13=11\times(7\times13)$所以两个两位数是$7\times11$和 13 或 11 和$7\times13$，即 77 和 13，或 11 和 91，那么被盖住的四个数字之和是$7+7+1+3=18$ 或 $1+1+9+1=12$

   所求的数字之和是 18 或 12。

2. 把 50 表示为两个质数的和，共有四种形式：

   $50=3+47=7+43=13+37=19+31$

   $\because 19\times31=589>13\times37=481>7\times43=301>3\times47=141$

   $\therefore$所求的最大值是 589。

   答：这两个质数的最大乘积是 589。

3. $\because 19305=3^3\times5\times11\times13$

   $=3^2\times11\times13\times(3\times5)$

   $=9\times11\times13\times15$

   所以这四个奇数中最小的一个是 9。

4. $\because$每一横行的方块数比每一竖列的方块数多 2。$\therefore$横行数与竖列数应是两个相邻的偶数（或奇数）。

   将 44448888 分解成两个相邻的数的乘积，只能是相邻的两个偶数$\because$ 偶数$\times$ 偶数 $=$ 偶数。偶数$\times$奇数 $=$ 偶数(与题意不符)。

   若是相邻的两个奇数，则奇数$\times$奇数 $=$ 奇数与 44448888 这个偶数相矛盾。

   $\therefore 44448888=6666\times6668$

   这个长方阵每一横行有 6668 个方块。

5. 一般地，一个自然数 N 可能唯一地表示成为一些质因数的乘积：

$$N=P_1^{a1}P_2^{a2}\ldots\ldots P_k^{ak}$$

   其中P_i（i=1,2，…k）是不相同的质数，$a_i\geq1$（i=1,2，…k），那么 N 的约数的个数公式：

$$(a_1+1)\times(a_2+1)\times\ldots\times(a_k+1)$$

$$\therefore 1112111=7\times11^2\times13\times101$$

   1112111 的约数的个数是：

$$(1+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=24.$$

∴1112111 有 24 个约数。

6. 设所求的数为 A，则 A 有 90 个因数，则$90=2\times3\times3\times5$，所以 A 必可表示成

$A=pq^2r^2s^4$ （根据约数个数的公式），其中 p，q，r，s 为互不相同的质数。

要使 A 最小，p，q，r，s 应尽可能地取小。取$s=2$，$r=3$，$q=5$，$p=7$即可那么 $A=7\times5^2\times3^2\times2^4=25200$

即 25200 就是有 90 个约数的最小自然数。

7. 由于 554400 是五个同学年龄的乘积，也就是说，每个同学的年龄都是 5544 的约数，如果把每个人的年龄分解质因数，则所有质因数的积应等于 55440。

把 55440 分解质因数：

$55440=2^4\times3^2\times5\times7\times11$

则$55440=7\times2^3\times3^2\times(2\times5)\times11$

$=7\times8\times9\times10\times11$

所以这五个同学的年龄分别是 7 岁，8 岁，9 岁，10 岁，11 岁。

8. $\because 30=2\times3\times5$，$35=5\times7$，$42=2\times3\times7$

$\therefore (a\times b)\times(b\times c)\times(a\times c)$

$=(2\times3\times5)\times(5\times7)\times(2\times3\times7)$

$=2^2\times3^2\times5^2\times7^2$

$\therefore a^2\times b^2\times c^2=2^2\times3^2\times5^2\times7^2$

$\therefore (a\times b\times c)^2=(2\times3\times5\times7)^2$

$\therefore a\times b\times c=210$

9. 由题目的条件三个质数的倒数和为$\frac{1383}{4565}$，则三个质数的乘积为 4565，而 $4565=5\times11\times83$，其中 5，11，83 都是质数，经检验$\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{83}=\frac{1383}{4565}$

所以，这三个质数之和是：$5+11+83=99$

10. $\because$ a与 2376 的乘积是一个完全平方数。∴乘积分解质因数后，各质因数的指数一定全是偶数。

$\because 2376\times a=2^3\times3^3\times11\times a$

又$\because 2376=2^3\times3^3\times11$的质因数分解中各质因数的指数都是奇数。

$\therefore$ a必含质因数 2、3、11，因此 a 最小为$2\times3\times11=66$

$\therefore 2376 \times a = 2376 \times 2 \times 3 \times 11 = 2376 \times 66 = 156816$

答：a 的最小值为 66，这个完全平方数是 156816。

11. 因为已知一个质因数是两位数，不妨设为 ab，则$a + b = 11$，所以 ab 只有可能等于 29，47，83，又要求这个两位数尽可能大，故只能是 83。

又因为这个自然数尽可能小，它还有 4 个不同的质因数，故另外三十质因数可取 2，3，5。

设所求的自然数为 N，$N = 2^r 3^p 5^q 3^t$。

因为$(r + 1) \times (p + 1) \times (q + 1) \times (t + 1) = 32$，要使 N 最小，即只要指数 r、p、q、t 尽可能小，但不能小于 1。

所以$r = 3$，$p = 1$，$q = 1$，$t = 1$

所求的最小的$N = 2^3 \times 3 \times 5 \times 83 = 9960$

答：这个自然数最小是 9960。

12. 因为 9 张牌各不相同，因此，三人手中的三张牌也是不同的，于是甲、丙二人手中三张牌的积均是由三个各不相同的数相乘得到的。

把 48 和 63 分别分解质因数：

$48 = 2^4 \times 3$，$63 = 3^2 \times 7$

因 63 的约数较少，所以先来求丙手中的牌。容易看出，丙手中拿的是 1、7、9 三张。这时甲手中是 2、3、8 或 2、4、6。

若甲手中拿的是 2、3、8 三张，则乙手中拿的是 4、5、6。这时$4 + 5 + 6 = 15$与题意不符。因此甲手中的三张牌是 2、4、6。这时乙手中是 3、5、8，符合题意。

所以，甲拿的牌是 2、4、6，乙手中拿的是 3、5、8，丙拿的是 1、7、9。

13. 首先假设可以分成五个质数之和（分成 6 个以上质数之和不可能）：35 是奇数，因此五个质数中不能有 2（否则和是偶数），取最小连续五个奇质数 3、5、7、11、13 的和是 39 超过 35，所以分成五个是不可能的。

假设 35 可以分成四个质数之和，35 是奇数，因此四个数中一定有一个是偶质数 2，即其余三个的和是 33，显然可以找出其余三个分别是：3，7，23；3，11，19；3，13，17；5，11，17；三数乘积最大的是：$5 \times 11 \times 17 = 935$。

假设 35 可分成三个质数和，只可能是：3，13，19；5，7，23；5，11，19；5，13，17；7，11，17；乘积均小于$5 \times 11 \times 17 = 935$。35 若分为两个乘数之和不可能。

所以将 35 写成四个质数：2，5，11，17 的和。

14. 三个连续的最小的奇质数是指 3，5，7。“至少取出一张”的含义是：取一张组成一位数，取两张组成两位数，取三张组成三位数。

下面分三种情况讨论：

（1）若取出了三张：这三个数字的和$3+5+7=15$是 3 的倍数，所以任意取出的三位数都不是质数。

（2）若取出了两张：所有可能的两位数有 35，37，53，57，73，75 六种，其中质数是 37，53，73。

（3）只取出一张时：3，5，7 均为质数。

合乎要求的质数时 3，5，7，37，53，73。

15. 设$k=11\times10\times9\times8\times\ldots\ldots\times2\times1=39916800$， 则$k+2$，$k+3$，$k+4\ldots k+11$为连续的 10 个合数。

因为$39916800+2$能被 2 整除；

$39916800+3$能被 3 整除；

……$39916800+10$能被 10 整除；

$39916800+11$能被 11 整除；

即 39916802，39916803……39916811 这连续 10 个自然数都是合数。

16. 因为$2000=2^4\times5^3$，它是有三个 5 的乘积的倍数，只需使另外三个数中要含有 4 个因数 2，因此，根据题目要求，三个数中必须含有 40 或 80。即：

$$30\times35\times40=21\times2000$$

$$35\times40\times45=63\times1000$$

$$40\times45\times50=45\times2000$$

显然，$35\times40\times45$不符题意，其余两个均符合，从而 2000 年 3 月 7 日或 7 月 3 日，2000 年 3 月 15 日。5 月 9 日，9 月 5 日，适合题目要求。

同理，在 $70\times75\times80$，$75\times80\times85$，$80\times85\times90$ 中，只有$70\times75\times80=210\times2000$可以找出相应的日期是 10 月 21 日，其余两个都不行。

所以，2000 年的 3 月 7 日，3 月 15 日，5 月 9 日，7 月 3 日，9 月 5 日，10 月 21 日这六天符合题意。

17. 由已知条件可知：$p\cdot q=x-1$是偶数。又因为 p、q 为质数，所以 p、q 中必有一个偶质数 2.不妨设$p=2$。为了使 x 尽可能大，只须取 q 为最大的三位质

数 997。这时 x 达到最大值：$2\times997+1=1995$。

18. 只需把有相同质因数的分数分开就行：

$26=2\times13\quad 33=3\times11\quad 34=2\times17$

$35=7\times5\quad 63=3\times3\times7\quad 85=5\times17$

$91=13\times7\quad 143=11\times13$

同一个质因数，最多在三个数中出现，所以至少要分成三组，分组如下：

第一组：26，33，35；

第二组：91，34；

第三组：143，63，85；

所以，至少要分 3 组。

19. 因为每只船载的人数相等，且 3 次就把 90 人全渡过河去。所以每次渡过河的总人数相等，均为$90\div3=30$（人），又每次渡过河的总人数 30 应为每只船上载的人数与船数的积，也就是说，每只船上载的人数与每次载过河的船数都是 30 的约数。

把 30 分解质因数：$30=2\times3\times5$因为每只船载的人数都相等，且至少载 2 人，所以每次渡河的船数与每只船上所载的人数应有以下几种情况：

（1）用 2 只船，每只船载 15 人。

（2）用 3 只船，每只船载 10 人。

（3）用 5 只船，每只船载 6 人。

（4）用 6 只船，每只船载 5 人。

（5）用 10 只船，每只船载 3 人。

（6）用 15 只船，每只船载 2 人。

20. 把这个数分解一下，把这个数中间的“3”拆开。

$$\underbrace{22\ldots23}_{n个2}\ \underbrace{11\ldots1}_{n个1}=\underbrace{22\ldots22}_{n+1个2}\times\underbrace{100\ldots0}_{n个0}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1个1}$$

$$=\underbrace{11\ldots1}_{n+1位个1}\times（2\times\underbrace{100\ldots0}_{n个0}+1）$$

$$=\underbrace{11\ldots1}_{n+1个1}\times\underbrace{200\ldots0}_{(n-1)个0}1$$

所以$\underbrace{22\ldots23}_{n位}\ \underbrace{11\ldots1}_{n位}$是合数。

第三章　最大公约数和最小公倍数

1. 两个整数的最小公倍数是 280，最大公约数是 8，且小数不能整除大数，这两个数分别是多少？

2. 有 336 支铅笔，252 块橡皮，210 个文具盒，用这些文具，最多可以分成多少份同样的礼物？在每份礼物中，铅笔、橡皮、文具盒各有多少？

3. 迎接香港回归，学校排练团体操。要求队伍分别变成 14 行、16 行、18 行、20 行、22 行，都能成为矩形。问最少需要多少人参加团体操的排练？

4. 郊游活动中，同学们野外聚餐，平均每 2 人饮用一瓶 A 饮料，每 3 人饮用一瓶 B 饮料，每 4 人饮用一瓶 C 饮料，三种饮料共用 52 瓶，问参加聚餐的有多少人？

5. 现在五千多个乒乓球。2 个装一袋，装到最后剩 1 个，3 个装一袋，最后还是剩一个，按 4、5……10 个装一袋，最后还是剩一个，问到底有多少个乒乓球？

6. 大雪后的一天，小飞和爸爸共同步测一个圆形花圃的周长，他两的起点和走的方向完全相同，小飞每步长 48 厘米，爸爸每步长 72 厘米，由于两人脚印有重合，所以各走完一圈后雪地上只留下 40 个脚印，求花圃的周长？

7. 两数的最大公约数为 3，最小公倍数是 231，求这两个数的和是多少？

8. 兔子和松鼠进行跳跃比赛。松鼠每次跳 $4\frac{1}{2}$ 米，兔子每次跳 $2\frac{3}{4}$ 米，它们每秒钟都只跳一次，比赛途中，从起点开始每隔 $12\frac{3}{8}$ 米设有一个陷井，当它们之中有一个掉进陷井时，另一个跳多少米？

9. 现有 252 个红球，396 个篮球，180 个黄球，把它们分装在 n 个袋子里，要求每个袋中都有红、黄、蓝三种颜色的球，而且各袋中的红球数相同，篮球数相同，黄球数也相同，问 n 的最大值是多少？

10. 学校组织学生参加航模比赛，共有 1000 多人参加，其中四年级占$\frac{1}{5}$，五年级占$\frac{3}{4}$，六年级占$\frac{2}{3}$。比赛结果，四年级有$\frac{1}{18}$的学生获奖，五年级有$\frac{1}{21}$的学生获奖，六年级有$\frac{1}{12}$的学生获奖，那么参赛学生有多少人？

11. 有三种不同的药水，A 种 $1\frac{1}{4}$ 千克，B 种 $2\frac{5}{8}$ 千克，C 种 $4\frac{2}{3}$ 千克，分别装入小瓶都无剩余，并且每瓶容量相等，这样的装法，最少要用多少瓶子？

12. 现有四个自然数。它们的和是 1111，如果要求这四个数的最大公约数尽可能大，那么这四个数的最大公约数最大可能是多少？

13. 一条公路由 A 经 B 到 C。已知 A、B 相距 300 米，BC 相距 215 米。现在路边植树，要求相邻两树间的距离相等，并在 B 点及 AB、BC 的中点上都要植一棵，那么两树间距离最多有多少米？

14. 88 个小朋友围成一圈，从某个小朋友开始进行 1~20 报数。如果报数一圈一圈地循环进行下去，问至少有多少个小朋友报过数字 1？有没有人同时报过 5 和 10？

15. 十个连续的三位数中最大的一个不超过 130，这十个数的和是 121 的倍数，求这十个数的和。

16. 幼儿园阿姨给三个班的小朋友分花生米，如果只分给小班，则每个小朋友可得 12 粒；如果只分给中班，则每个小朋友可得 15 粒；如果只分给大班，则每个小朋友可得 20 粒，那么平均分给三个班，每个小朋友可得多少粒花生米？

17. 甲乙丙三个人赛跑，甲每分钟跑 240 米，乙每分钟跑 200 米，丙每分钟跑 140 米，如果三人同时同向，从同地出发，沿周长是 600 米的圆形跑道奔跑，经过多少分钟之后，三人又可相聚？

18. 已知两个自然数差为 2，它们的最大公约数与最小公倍数之和为 42，求这个自然数。

19. 已知 a 与 b 的最大公约数是 10，a 与 c，b 与 c 的最小公倍数都是 90，问：满足此条件的自然数 a、b、c 有多少组？

20. 对于实数 a，将等差数列中所有大于 a 的项都减去 a，若还大于 a，则再减去 a……，这样得到各项都不大于 a 的数列称为以 a 为界的等差数列，例如等差数列 1、5、9、13、17、21……，其以 10 为界的等差数列为 1、5、9、3、7、1……，图<1>的第一、二、三排分别以 10、20 和 30 为界的等差数列，问：

（1）到第几项时，三排的数再次都是 1？

（2）到第几项时，一、二、三排的三个数第一次出现 1、11、11？

1	3	5	7	9	1	3	5	7	9	1	3	5	……
1	4	7	10	13	16	19	2	5	8	11	14	17	……
1	6	11	16	21	26	1	6	11	16	21	26	1	6……

图<1>

分析解答

1. 因为$280 = 2^3 \times 5 \times 7$，所以，最小公倍数是 280，最大公约数是 8 的两整数可以是 8 与 280，也可以是$8 \times 5 = 40$ 与 $8 \times 7 = 56$。由题目要求“小数不能整除大数”，所以这两个数是 40 与 56。
2. 因为$(336,252,210) = 42$，所以，这样的文具最多可以分成 42 份礼物，并且在每份礼物中，

   铅笔有：$336 \div 42 = 8$（支）

   橡皮有：$252 \div 42 = 6$（块）

   文具盒有：$210 \div 42 = 5$（个）
3. 由于队伍在变成 14 行、16 行、18 行、20 行、22 行时要成为矩形，因此人数必须是行数的倍数，求最少的人数实际上就是求 14、16、18、20、22 的最小公倍数。

   〔14，16，18，20，22〕$= 55440$

   所以最少需要 55440 人参加团体操的排练。
4. 由题意可知，参加聚餐人数应是 12 的倍数。

   又因为 12 人饮用 6 瓶$(12 \div 2 = 6$（瓶）$)$A 饮料，4 瓶$(12 \div 3 = 4$（瓶）$)$B 饮料，3 瓶$(12 \div 4 = 3$（瓶）$)$C 饮料。共饮用 13 瓶$(6 + 4 + 3 = 13$ 瓶$)$饮料。

   聚餐共用饮料 52 瓶，是 13 瓶的 4 倍。$($即 $52 \div 13 = 4)$

   所以聚餐的人数也是 12 人的 4 倍，即共有 48 人。$(12 \times 4 = 48$ 人$)$
5. 根据题意，这堆乒乓球按 2 个、3 个、…、9 个、10 个装一袋总是多一个。也就是说只要从这堆乒乓球中取出一个，再按上述方法装袋，就应正好装完。这说明拿出一个乒乓球后，乒乓球的总数是 2、3、4、…、10 的倍数，因此所求的乒乓球总数是 2、3、4、…、10 的公倍数加 1。

   因为〔2，3，4，…，9，10〕=2520，所以原有的乒乓球总数为$2520 \times 2 + 1 = 5041$个。
6. 要想求出花圃的周长，只要求出小飞或爸爸一圈留下多少个脚印就行了，由于小飞和爸爸测时起点和方向完全相同，且两人脚印有重合，这说明，他俩从起点出发到第一次脚印重合时所走过的路程是相同的，这个路程是小飞和爸

爸步长的倍数。即：〔72,48〕=144（厘米），从起点到第一次脚印重合时，小飞的脚印有：$144 \div 48 = 3$（个）。爸爸的脚印有：$144 \div 72 = 2$（个）因为他们有一个脚印是重合的，所以在 144 厘米长的这段路程内共有脚印：$2 + 3 - 1 = 4$（个）

又因为$40 \div 4 = 10$

所以花圃的周长为$144 \times 10 = 1440$厘米。

7. 设这两个数为 a，b 那么$(a，b) = 3$，〔a，b〕=231

故$a \times b = (a，b) \times$〔a，b〕$= 3 \times 231 = 3^2 \times 7 \times 11$

由此可知当①a=3，$b = 3 \times 7 \times 11 = 231$

或②$a = 3 \times 7 = 21$，$b = 3 \times 11 = 33$

所以这两个数的和是：$3 + 231 = 234$ 或 $21 + 33 = 54$。

8. 当松鼠跳了若干次时，若恰好跳到距起点的距离为 $12\frac{3}{8}$ 的倍数，则它就会掉进陷井。要求出它何时掉进陷井，就要求出 $4\frac{1}{2}$ 与 $12\frac{3}{8}$；$2\frac{3}{4}$ 与 $12\frac{3}{8}$ 的最小公倍数。

将 $4\frac{1}{2}$ 与 $12\frac{3}{8}$ 通分：$4\frac{1}{2} = \frac{36}{8}$　$12\frac{3}{8} = \frac{99}{8}$ 求两分数分子的最小公倍数〔36，99〕=396

两分数的“最小公倍数”规定为：化成同分母后，以分子的最小公倍数作为分子，相同分母作分母。

所以，〔$4\frac{1}{2}$，$12\frac{3}{8}$〕$= \frac{396}{8} = \frac{99}{2}$

$\frac{99}{2} \div 4\frac{1}{2} = 11$（次）

松鼠跳 11 次掉进陷井。

再来看看兔子。$2\frac{3}{4} = \frac{22}{8}$　$12\frac{3}{8} = \frac{99}{8}$　〔99，22〕=198

〔$2\frac{3}{4}$，$12\frac{3}{8}$〕$= \frac{198}{8}$

$\frac{198}{8} \div 2\frac{3}{4} = 9$（次）

所以兔子比松鼠先掉进陷井。它掉进陷井时，松鼠跳了 $4\frac{1}{2} \times 9 = 40\frac{1}{2}$（米）

9. n 的最大值就是 252,396,180 的最大公约数。因为

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

所以，$(252，396，180) = 2^2 \times 3^2 = 36$。即 n 的最大值是 36。

10. 四年级获奖人数占参赛学生总数的：$\frac{1}{5} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{90}$

五年级获奖人数占参赛学生总数的：$\frac{3}{4} \times \frac{1}{21} = \frac{1}{28}$

六年级获奖人数占参赛学生总数的：$\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$

所以参赛学生总数，应是 90，28，18 的倍数。［90，28，18］=1260。

因此参赛学生总数是 1260 的倍数，由已知参赛学生共有 1000 多人，可知参赛人数就是 1260 人。

11. 由已知，A 种药水有$\frac{5}{4}$千克。B 种药水有$\frac{21}{8}$千克，C 种药水$\frac{14}{3}$千克。

设每瓶有$\frac{a}{b}$千克，则$\frac{5}{4} \div \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \times \frac{b}{a}$必是整数，同理$\frac{21}{8} \times \frac{b}{a}$，$\frac{14}{3} \times \frac{b}{a}$均为整数，所以 a 是 5，21，14，的公约数，因此 a=1，b 至少是 4，8，3 的最小公倍数，所以 b 最小是 24，每瓶最多装$\frac{1}{24}$千克，最少要用瓶子：

$(\frac{5}{4} + \frac{21}{8} + \frac{14}{3}) \div \frac{1}{24} = 205$（个）

12. 因为四个数的和是 1111，所以它们的公约数也一定是 1111 的约数。

又因为$1111 = 101 \times 11$，所以 1111 的约数只能是 1，11，101，1111。

显然 1111 不符合题意，$11 = 1 + 2 + 3 + 5$不符合题意，只有 101 是可能的。

求得四个数为：101，202，303，505，这四个数的最大公约数是 101。

所以，符合题目条件的四个数的最大公约数是 101。

13. 由于 AB 和 BC 的中心要种一棵树，所以要将 150 米和 $107\frac{1}{2}$ 米均分成几段，使每段长度相等，这就要求 150 与 $107\frac{1}{2}$ 的最大公约数。

将 150 与 $107\frac{1}{2}$ 通分

$$150=\frac{300}{2}\qquad 107\frac{1}{2}=\frac{215}{2}$$

$$\because (300,215)=5$$

所以两数的最大公约数为$\frac{5}{2}$，最多相隔 $2\frac{1}{2}$ 米种一棵树。

14. 88 和 20 的最大公约数是 4，故每个数字都有$88\div4=22$人报过。因此，报过 1 的人有 22 人。

同时，每个人报过的数字间均相差 4 的倍数，那么报过 5 的人只报过 5，9，13，17，四个数字，即报过 5 的人不可能报 10。

15. 十个连续自然数的和必是 5 的倍数。根据题意，这个和必是$121\times5=605$的倍数。

又因为这十个数的和大于 1000，小于 1300，其间是 605 的倍数的只有$605\times2=1210$。

所以，这十个自然数的总和是 1210。

16. 设花生米总数为 a，依题意知，a 分别是 12,15,20 的倍数，从而 a 是 12，15，20 的公倍数。而〔12，15，20〕$=2^2\times3\times5=60$，因此，a 是 60 的倍数，即$a=60b$（b 是自然数）

小班小朋友的人数是$60b\div12=5b$

中班小朋友的人数是$60b\div15=4b$

大班小朋友的人数是$60b\div20=3b$

三个班小朋友的总数是：

$5b+4b+3b=12b$

所以，把花生米平均分给三个班的小朋友，每个小朋友可得：

$60b\div12b=5$（粒）

17. 设 x 分钟之后三人又可以相聚。根据题意可知，甲乙相聚时他们的路程之差恰好是 600 米的倍数。即$(240-200)x=600a$（a 是自然数）

类似地有：$(240-140)x=600b$（b 是自然数）

$(200-140)x=600c$（c 是自然数）

化简得：$x=15a$，

$x=6b$，

$x=10c$，

从而可知，x 必是 15、6、10 的公倍数，取$x=[15,6,10]=30$

即 30 分钟后，三个人又可以相聚。

18. 设一个自然数为 a，则另一个自然数为$a+2$，又因为$(a，a+2)=1$或 2，则

（1）当$(a，a+2)=1$时，$[a，(a+2)]=a(a+2)$由条件$(a，a+2)+[a，(a+2)]=42$

即　$1+a(a+2)=42$

$a(a+2)=41$

因$41=1\times41$，故 41 不可能表示为二个差为 2 的自然数的积。

（2）当 $(a，a+2)=2$时，$[a，(a+2)]=\frac{a(a+2)}{2}$

故　$2+\frac{a(a+2)}{2}=42$

得　$a(a+2)=80=2^4\times5$

将2^4，5进行搭配可知$a=8$，$a+2=10$。

所求的二个自然数为 8，10。

19. 根据题意知，a、b 均能被 10 整除，其中必有一个为 10，另一个为 10、30 或 90，有 5 种可能

（1）$a=10$，$b=10$；

（2）$a=10$，$b=30$；

（3）$a=10$，$b=90$；

（4）$a=30$，$b=10$；

（5）$a=90$，$b=10$；

对于 a、b 的这 5 组取值，c 可以取 9、18、45 或 90，因此 a、b、c 的不同取值共有$5\times4=20$（组）

20. （1）第一、二、三排分别以 5 个数、20 个数、6 个数为一个周期呈周期变化，那么每经过$[5,20,6]=60$个数，即到第 61 个数，也就是 61 项时，三排数都是 1。

（2）一、二两排的第 11 项是 1 和 11，而这两排数字每隔 20 项重复一次，即第 11、31、51、71……等项都是 1 和 11。第三排第 3 项是 11，以后每隔 6 项重复一次，由此可求出第 51 项三排的三个数第一次出现 1、11、11。

第四章　奇数与偶数

1. $1+2\times3+4\times5+6\times7+\cdots\cdots+100\times101$的和是奇数还是偶数？

2. 自然数列中前 200 个数的和是 20100，前 100 个奇数的和是多少？前 100 个偶数的和是多少？

3. 数列 1、1、2、3、5、8、13、21……的第 500 个数是奇数还是偶数？

4. 1997 个球，任意分成若干堆，则球的个数为奇数的堆数是奇数还是偶数？

5. 把 1~99 个自然数的顺序打乱后重新排列并把新排列的每个数依次加上 1、2、3……99，问最后得到的 99 个数之积是奇数还是偶数？

6. 有 7 只茶杯，杯口全部朝上，小晶每次翻转其中的 6 只，那么，他能翻的若干次后，使 7 只茶杯的口全部向下？

7. 甲盒中放着 90 个白球和 91 个黑球，乙盒中放着 91 个白球。张萌每次任意从甲盒中摸出两个球。如果两个球同色，他就从乙盒中拿出一个白球放入甲盒，如果两个球异色，他就把黑球放回甲盒。那么他拿多少次后，甲盒中只剩下一个球后这个球是什么颜色？

8. 毕业前夕，同学们互赠礼物，每人只要接到对方礼物就一定要回赠，那么送了奇数份礼物的人数是奇数还是偶数？为什么？

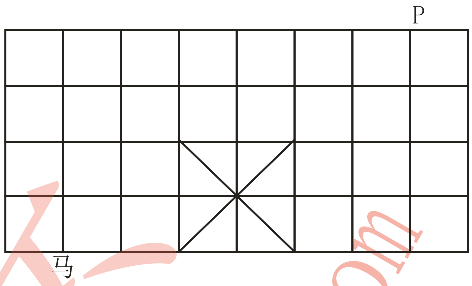
9. 已知a、b、c中有一个是9，一个是10，一个是11，求证$a-5$，$b-6$，$c-7$的乘积一定是偶数。

10. 学校组织学生参加“庆香港回归知识竞赛”。共有试题 40 道，评分标准是：答对一题给 3 分答错一题倒扣一分，某题不答给一分。请说明该校所有参赛学生得分总和一定是偶数。

11.某学校五年级三班共有 49 名同学，教室座位恰好排成 7 行，每行 7 个座位，把每一个座位的前、后、左、右的座位叫做原座位的邻位。问：让这 49 个同学都离开原座位坐到原座位的邻位，是否可行？

12. 某文化宫共有 1997 个座位，上、下午各有一场演出，甲乙两校各有 1997 名同学去看演出（或是上午场，或是下午场）请说明文化宫里一定有这样的座位，上、下午在这座位上坐的是两个不同学校的学生。

13. 下面是中国象棋盘的一部分，这张棋盘上只有一只马。按规定，马走日字。问这只马能否经过 99 步走到棋盘上的 P 点？



14. 由 1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21 十一个数组成甲数组，由 2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22 十一个数组成乙组数。分别由甲组数与乙组数中各取一数相加，共可得到不同和的个数是多少？

15. 将 3998 张卡片分成两组，每组 1999 张，在每组的 1999 张上分别写上 1、2、3…，1998，1999，每次从两组中分别任意抽取两张，共得到 1999 对卡片，计算每对卡片上两个数的和，则这 1999 个和的积是奇数还是偶数？

16. 六年级 260 名同学准备选一名代表在庆祝教师节大会上给老师献花。选举的方法是：让 260 名同学排成一排，由第一名开始报数，报奇数的同学落选退出队列，报偶数的同学站在原位置不动，然后再从头报数。如此继续下去最

后剩下的一名当选，小丽非常想去，她在第一次排队时应该站在队列的什么位置上才能被选中？

17. 求证：不存在这样的整数 a、b、c、d，使得下面 4 个式子同时成立。

$a \times b \times c \times d + a = 1993$

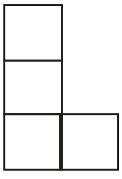
$a \times b \times c \times d + b = 1995$

$a \times b \times c \times d + c = 1997$

$a \times b \times c \times d + d = 1999$

18. 把 13 张梅花和 13 张方块按一黑一红搭组，问能否找到这样的组，使这 13 组中，每两个数的差组成的乘积恰好等于 1997？

19. 下图是由 4 个小正方格组成的“L”形硬纸片，用若干个这种纸片无重地拼成一个$4 \times n$的长方形，试证明：n 一定是偶数。



分析解答

1. 从第 2 个加数起，每个加数为两数之积，且其中有一个因数为偶数，所以从第 2 项起的每个加数为偶数，从第 2 项起的总和为偶数。又第一个加数为奇数，所以整个式子的最后结果是奇数。(奇数+偶数=奇数)
2. 因为奇数与其后继偶数相差为 1，所以前 100 个偶数之和比前 100 个奇数之和多 100。又由已知，前 100 个偶数之和与前 100 个奇数之和共为 20100，由和差问题公式可得：

   大数，即前 100 个偶数之和为$(20100+100)\div 2=10100$ 小数，即前 100 个奇数之和为$(20100-100)\div 2=10000$
3. 通过观察发现此数列的规律是：从第 3 个数起，每个数都是它前边 2 个数的和。

   数列的奇偶规律为：

   奇，奇，偶，奇，奇，偶，……即从第 1 项起，先出现两个奇数，再出现 1 个偶数，如此下去。

   因为$500\div 3=166\cdots 2$，所以第 500 个数是奇数。
4. 如果有偶数堆个数为奇数，则这些堆的球数之和为偶数，与个数为偶数的球的个数相加，和为偶数，这和 1997 是奇数相矛盾，所以球的个数是奇数的堆数为奇数。
5. 因为$1\sim 99$中共有奇数 50 个，偶数 49 个。按最不利情况分组，每个偶数加上一个奇数，每个奇数加上一个偶数，这样共有 98 对（奇+偶）但最后一对一定是（奇+奇）。因为奇+奇=偶，而在乘积式中，有一个因数是偶数，它们的积必是偶数。

   所以最后结果仍是偶数。
6. 只有将一只茶杯翻动奇数次，才能使它的杯口由向上变为向下。要使 7 只茶杯的杯口都向下，那么每只杯子都要翻动奇数次。7 个奇数的和为奇数。所以翻动的总只数为奇数时才能使 7 只茶杯的杯口都向下，而小晶每次翻动 6 只，不管翻多少次，翻动的总只数都是偶数。

   所以无论她翻动多少次，都不能使 7 只杯子的杯口全部向下。
7. 不论李萌从甲盒中拿出两个什么样的球，他总会放一个球回甲盒。所以他每拿一次，甲盒中的球就减少一个。他拿$90+91-1=180$次后，甲盒里只剩一个

球。

如果他拿出的是两个黑球，那么甲盒中的黑球就减少两个。否则甲盒中的黑球不变。就是说，李萌每次从甲盒中拿出的黑球是偶数。由于 91 是奇数，奇数—偶数=奇数，所以甲盒中剩下的黑球应是奇数，不大于 1 的奇数只有 1。

所以，甲盒里剩下的一个球应该是黑球。

8. 由于是两人互送礼物，给每人分别标记送出礼物一次。那么礼物的总份数应能被 2 整除，所以礼物的总份数应是偶数。

送礼物的人可以分为两种：

一种是送出了偶数份礼物的人：他们送出礼物的份数和为偶数。

另一种是送出了奇数份礼物的人：他们送出礼物的份数和=所有人的送出礼物的总份数−所有送出了偶数份礼物的人送出礼物的总份数。即偶数−偶数 = 偶数。

他们的总人数必须是偶数，才能使他们送出的礼物总数为偶数。

所以，送出奇数份礼物的人数一定是偶数。

9. 证明：∵ a、b、c 中有两个奇数，一个偶数。

∴ a、c 中至少有一个是奇数。

∴ $a-5$，$c-7$中至少有一个是偶数。

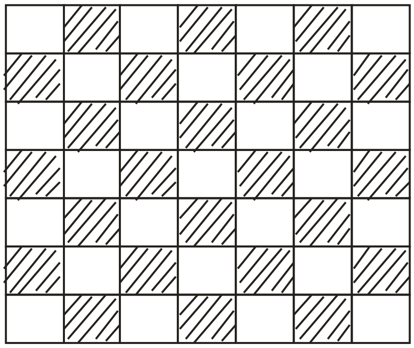
又∵ 偶数 × 奇数 = 偶数，

∴ $(a-5)\times(b-6)\times(c-7)$是偶数。

10. 对每个学生来说，40 道题都答对共得 120 分，是个偶数。如果答错一道，相当于从 120 分中扣 4 分。不论答错多少道，扣分的总数应是 4 的倍数，即扣偶数分。从 120 里减去偶数，差仍是偶数。同样，如果有某题不答，应从 120 里减去$(3-1)$分。不论有多少道题没答，扣分的总数是 2 的倍数，也是偶数。所以从 120 里减去偶数，差仍是偶数。

因此，每个学生得分数是偶数，那么所有参赛学生得分总和也一定是偶数。

11. 我们可借助于下图，利用黑白染色帮助分析。



我们把每一个黑、白格看作是一个座位。从图可知，在黑格“座位”上的同学要换到邻座，必须坐到白格上；在白格“座位”上的同学要换到邻座，又必须全坐到黑格“座位上”。因此，要使每人换为邻座位，必须黑白格数相等。

从上图可知：黑色“座位”有 24 个，白色“座位”有 25 个，因此，不可能使每个座位的人换为邻座位。

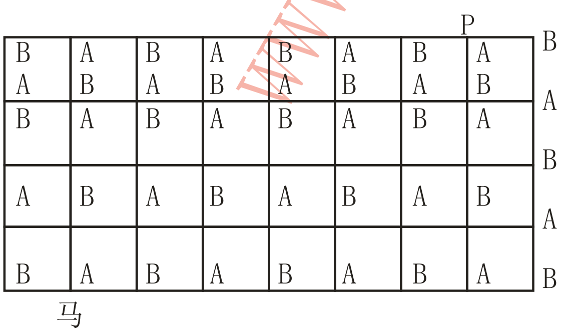
12. 不考虑特殊情况，显然电影院每场均是满座。

现假设，每个座位在上、下午都是由同一学校的学生坐。

设某校有 K 个学生听上午场，则下午也只能有 K 个该校学生去听。这样该校听报告的学生数应为$2\times K$个，为偶数，与 1997 矛盾。

因此假设错误，也就是，电影院中一定有某个（或一些）座位，上下午的是不同学校的学生。

13. 给每一个交点标上 A 或 B，我们假设目前马所处的位置为 A，与它相邻的 3 个点标号为 B，与标有 B 的点相邻的点都标上 A，如此下去，直到把这部分棋盘上所有点都标上字母为止。



如果马在 A 点上，它共有 8 个移动方向（限于边界，可能会少几个），但不管它向哪个方向跳动，都只能跳到 B 点上；同样，当马在 B 点上时，它也有 8 个移动方向，且只能跳到 A 点上。这样，从马目前所处的位置起，依次所处位置为：

$A \to B \to A \to B \to A \to B \to \cdots\cdots$

也就是说，经过奇数步移动，马应到达 B 点，经过偶数步移动，马应到达 A 点。现在 P 点在字母 A 处，因此经过 99 步无论如何马是不会到达 P 点的。

14. 甲组数都是奇数，乙组数都是偶数，所以甲组数与乙组数中各取一数相加，和一定是奇数。且最小的是$3 = 1 + 2$，最大的是$43 = 21 + 22$，所以由甲组数与乙组数中各取一数相加，不同和的个数就等于从 3 到 43 的奇数的个数，即$(43 - 3) \div 2 + 1 = 21$

15. 我们把抽取的 1999 对卡片按照第一组中卡片所标数字依次从小到大的顺序排成一行。则每对卡片上两数之和为$n_1 + 1$，$n_2 + 2$，$\cdots\cdots$，$n_{1998} + 1998$，$n_{1999} + 1999$，其中n_1，n_2，$\cdots\cdots$，n_{1998}，n_{1999}分别表示第二组卡片上的数，为 1 至 1999 中的某一个，且互不相同。

假设上述 1999 个和的积为奇数，则这 1999 个和都是奇数。

将上述 1999 个和相加并整理得：

$$(n_1 + n_2 + \cdots n_{1999}) + (1 + 2 + \cdots + 1999)$$
$$= 2(1 + 2 + \cdots + 1999)$$

是一个偶数，1999 个奇数相加得到一个偶数。奇数≠偶数。所以所得积应为偶数。

16. 因为第一次报数，留下的是 2 的倍数号；第二次报数留下的是2^2的倍数号…；一般地，第 n 次报数，留下的是2^n的倍数号。在 260 以内，$2^8 = 256$是含有因子 2 最多的数。

所以第一次排队时，她应该站在队列的 256 名的位置上才能被选中。

17. 证明：将 4 个式子进行变形，得到以下 4 个式子：

$a \times (b \times c \times d + 1) = 1993 \cdots ①$

$b \times (a \times c \times d + 1) = 1995 \cdots ②$

$c \times (a \times b \times d + 1) = 1997 \cdots ③$

$d \times (a \times b \times c + 1) = 1999 \cdots ④$

由①式知 a 与$(b\times c\times d+1)$都是奇数，才能得到奇数 1993，同理可知 b 和$(a\times c\times d+1)$，c 和$(a\times b\times d+1)$，d 和$(a\times b\times c+1)$也都是奇数，但这是自相矛盾的。如果 a、b、c、d 都是奇数，则$b\times c\times d$，$a\times c\times d$，$a\times b\times d$，$a\times b\times c$都是奇数，从而$b\times c\times d+1$；$a\times c\times d+1$；$a\times b\times d+1$；$a\times b\times c+1$；都是偶数。

所以，不存在 4 个数 a、b、c、d 使得原三个式子同时成立。

18. 不可能。

我们把梅花 13 张分别记为n_1，n_2，$\cdots n_{13}$。把方板 13 张记为m_1，m_2，m_3，$\cdots$，m_{13}将n_1与m_1、n_2与m_2、n_3与m_3……搭组。由于$(n_1+n_2+n_3+\cdots+n_{13})-(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{13})=0$，若每对$n_p-m_p$（p =1，2，…13）都是奇数，则 13 个奇数之和仍为奇数，所以这 13 组中至少有一组是偶数，那么它们乘积$(n_1-m_1)\times(n_2-m_2)\times\ldots(n_{13}-m_{13})$也应是偶数，而 1997 是奇数，奇数≠偶数，所以不可能。

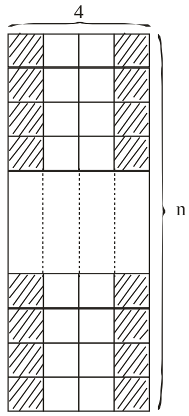
19. 证明：对$4\times n$长方形的各列分别染上黑色和白色（如图）

任一 L 形纸片所占的方格只有两类：第一类占 3 个黑格 1 个白格。第二类占 1 个黑格和 3 个白格。

设第一类有 P 个，第二类有 q 个，因为涂有两种颜色的方格数相等，所以：

$3q+P=3P+q\Rightarrow 2P=2q$

即：$P=q$



也就是说第一类和第二类数目相等。因此各种颜色的方格都是 4 的倍数，总数为 8 的倍数。所以 n 为偶数。

第五章　行程问题

1. 甲乙二人同时从 A 地出发到 B 地。甲到 B 地后立即按原路返回，在距 B 地 32 千米处与乙相遇。已知甲每小时行 20 千米，乙每小时行 12 千米。求 A、B 两地相距多少千米？

2. 每天早晨李刚准时离家上学，张大爷也是定时出门散步，并且每天都能在同一时刻在途中相遇。有一天，李刚提前出门，结果比平时早 7 分钟与张大爷相遇。已知李刚每分钟走 70 米，张大爷每分钟走 40 米，问这一天李刚比平时早出门几分钟？

3. 李勇乘车从甲地到乙地旅行。已知他从甲地出发 8 小时行了全程的$\frac{4}{7}$，问还需几小时到达乙地？

4. 一辆马车每小时行 804 米，赶车人为了保持马的体力，每行 50 分钟就停下来休息 10 分钟，这样行驶从甲地到乙地共 70 千米，需几小时到达？

5. 小刚和小明进行 100 米短跑比赛（假定二人的速度始终不变）。当小刚跑了 90 米时，小明距终点还有 25 米，问小刚到达终点时，小明距终点还有多少米？

6. 有一条长 400 米的环形跑道，甲乙二人同时同地出发，反向而行，1 分钟后第一次相遇，若二人同时同地出发，同向而行，则 10 分钟后第一次相遇，若甲比乙快，求甲乙二人的速度。

7. 一环形跑道周长 240 米。甲与乙同向，丙与他背向，都从同一地点出发。每秒钟甲跑 8 米，乙跑 5 米，丙跑 7 米。出发后三人第一次相遇时，丙跑了几圈？

8. 甲乙二人分别从 A、B 两地同时相向出发，往返于 A、B 之间。第一次相遇在距 A 地 20 千米处，第二次相遇在距 A 地 40 千米处，求 A、B 两地距离。

9. 甲、乙二人分别从 A、B 两地同时出发，在 A、B 之间往返跑步。甲每秒跑 3 米，乙每秒跑 7 秒，如果他们第四次迎面相遇点与第五次迎面相遇点之间相距 150 米，求 A、B 间相距多少米？

10. 两名男女运动员在长 110 米间斜坡上练习跑步。两人同时从坡顶 A 出发，在 A、B 之间不停地往返奔跑（B 为坡底）。如果男运动员上坡速度是每秒 3 米，下坡速度是每秒 5 米；女运动员上坡速度是每秒 2 米，下坡速度是每秒 3 米，问两人第二次迎面相遇的地点离坡顶 A 多少米？

11. 路旁一条平行小路上，有一行人与一骑车人同时向南行进。行人速度为每小时 3.6 千米，骑车人速度为每小时 10.8 千米，这时有一列火车从他们后方开过来，火车通过行人用 22 秒，通过骑车人用 26 秒，问这列火车的车身总长是多少米？

12. 甲乙两港相距 360 千米，一轮船往返两港需 35 小时，逆流航行比顺流航行多花 5 小时。现有一机帆船，静水中速度是每小时 12 千米，问这机帆船往返两港要多少小时？

13. 一条河流过 A、B、C 三镇。A、B 两镇之间有汽船往来，汽船在静水中的速度为每小时 11 千米。B、C 两镇之间有木船摆渡，木船在静水中速度是每小时 3.5 千米。已知 A、C 两镇水路相距 50 千米，水流速度为每小时 1.5 千米，某人从 A 镇上船顺流而下到 B 镇，吃午饭用去 1 小时，接着乘木船顺流而下到 C 镇，共用 8 小时，求 A、B 两镇的水路距离。

14. 李华从学校出发，以每小时 4 千米的速度步行到 20.4 千米外的冬令营报到。半小时后，营地老师闻讯前往迎接，每小时比李华多走 1.2 千米。又过了 1.5 小时，张明从学校骑车去营地报到，结果三人在途中某地相遇。问骑车人每小时行多少千米？

15. 路旁有一条小路，一列长 110 米的火车以每小时 30 千米的速度向北缓缓驶去，14 点 10 分追上向北行走的一位工人，15 秒后离开这个工人。14 点 16 分迎面遇到一个向南走的学生，12 秒后离开这个学生，问工人与学生在何时相遇？

16. 现在是 3 点，什么时刻时针与分针第一次重合？

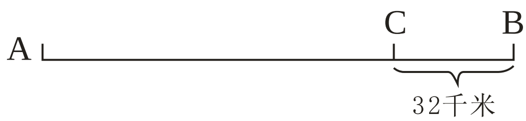
17. 在 10 点与 11 点之间，钟面上时针与分针在什么时刻垂直？

18. 小明在 7 点与 8 点之间解了一道题。开始时分针与时针成一条直线，解完题时两针正好重合。小明解题用了多少时间？

19. 甲乙丙三人行路，甲每分钟走 60 米，乙每分钟走 50 米，丙每分钟走 40 米。甲从 A 地，乙和丙从 B 地同时出发，相向而行，甲和乙相遇后，过了 15 分钟又与丙相遇，求 A、B 两地间距离。

分析解答

1. 已知甲每小时比乙多走$20-12=8$（千米）；从出发到相遇，甲比乙多走$32\times2=64$（千米）。如下图，



其中 C 是相遇地点。从出发到相遇共用了

$64\div8=8$（小时）。

$20\times8-32=128$。

答：A、B 两地相距 128 千米。

2. 设平时相遇地点为 A，而这一天在 B 点相遇，如下图：

A、B 相距$(70+40)\times7=770$米。李刚需用 7 分钟走这一段路，所需时间为：

$770\div70=11$（分钟）

答：李刚比平时早出门 11 分钟。

3. 由于路程行了全程的$\frac{4}{7}$，则时间也用了全程所需时间的$\frac{4}{7}$，李勇行全程所需时间为：

$8\div\frac{4}{7}=14$（小时）。

$14-8=6$（小时）。

答：还需 6 小时可到达乙地。

4. 马车 50 分钟行程为每段 $8.4\times\frac{5}{6}=7$（千米）行进 10 段。又每段之后休息 10 分钟（最后一段不计休息时间），总共用时

$(\frac{5}{6}+\frac{1}{6})\times9+\frac{5}{6}=9\frac{5}{6}$（小时）。

答：共需 $9\frac{5}{6}$ 小时才能从甲地到乙地。

5. 当小刚跑了 90 米时，小明跑了$100-25=75$（米）。由此得小明的速度是小

刚速度的 $75\div90=\frac{5}{6}$ 。因此当小刚到达终点时，小明跑了

$100\times\frac{5}{6}=83\frac{1}{3}$ （千米）

小明距终点还有

$100-83\frac{1}{3}=16\frac{2}{3}$ （米）

答：当小刚到达终点时，小明距终点还有 $16\frac{2}{3}$ 米。

6. 甲、乙二人 1 分钟共跑 400 米，即二人速度和为 400 米/分。甲 10 分钟比乙多跑 400 米，$400\div10=40$，甲 1 分钟比乙多跑 40 米，甲、乙二人速度之差为 40 米/分，已知甲比乙快。

甲速：$\frac{400+40}{2}=220$（米/分）

乙速：$\frac{400-40}{2}=180$（米/分）

答：甲的速度是 220 米/分，乙的速度是 180 米/分。

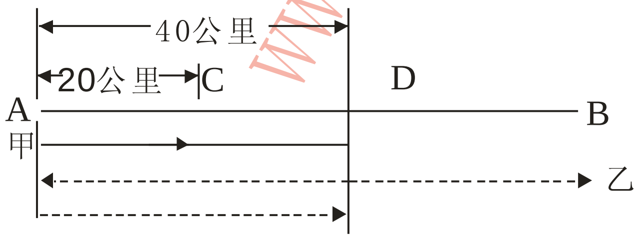
7. 甲、乙第一次相遇是出发后$240\div(8-5)=80$（秒），以后每隔 80 秒相遇一次；甲、丙第一次相遇是出发后$240\div(8+7)=16$（秒），以后每隔 16 秒相遇一次；乙丙第一次相遇是出发后$240\div(5+7)=20$（秒），以后每隔 20 秒相遇一次。又$[80,16,20]=80$，故甲、乙、丙三人第一次相遇是出发后 80 秒，这时丙跑了

$(7\times80)\div240=2\frac{1}{3}$ （圈）

答：出发后三人第一次相遇时丙跑了 $2\frac{1}{3}$ 圈。

8. 有两种可能。

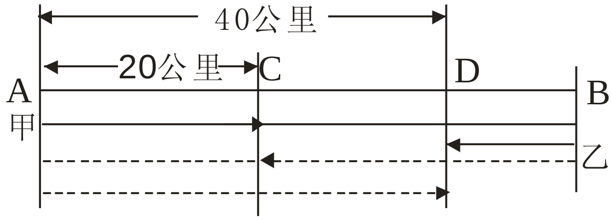
（1）第一次相遇后，乙到 A 地，又返回追上甲，此时甲还未到 B 地。



设第一次相遇在 C 处，甲走 20 公里，乙走 S 公里。第二次相遇在 D 处，甲又走 20 公里，乙又走$20+40=60$（公里）。故$S=60$公里。A、B 两地相

距$20+60=80$（公里）。

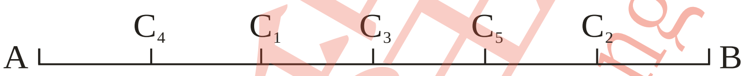
（2）第一次相遇后乙到 A 地，甲到 B 地，二人返回第二次相遇。



设第一次相遇在 C 处，甲走 20 公里，乙走 S 公里，A、B 两地相距$(20+S)$公里。（如图）

第二次相遇时，乙又走 60 公里，二人又合走两个 A、B 间的距离，故从第一次相遇到第二次相遇乙走了 2S 公里，$2S=60$，$S=30$公里。A、B 两地相距$20+30=50$（公里）。

9. 设甲、乙两人第 i 次迎面相遇点为$C_i\left(i=1，2，3，4，5\right)$。由于甲、乙速度之比为$3:7$，令$AB=1$，则$AC_1:C_1B=3:7$，故$AC_1=\frac{3}{10}$。如下图：



同理可得：

$C_1C_2=\frac{3}{10}\times 2$，故$BC_2=\frac{1}{10}$；

$C_2B+BC_3=\frac{3}{5}$，故$BC_3=\frac{1}{2}$；

$C_3A+AC_4=\frac{3}{5}$，故$AC_4=\frac{1}{10}$；$C_4C_5=\frac{3}{5}$。

所以$AB=150\div\frac{3}{5}=250$（米）。

答：A、B 相距 250 米。

10. 为方便起见设$AB=a$米，根据题意分别计算男、女运动员跑步方向变化时与出发点 A 的距离，列表如下：

时刻	男第一次到达B	二人第一次相遇	女第一次到达B	男第一次返回A	二人第二次相遇
男运动员与 A 的距离	a	$\frac{4}{5}a$	$\frac{3}{5}a$	0	$\frac{3}{7}a$
女运动员与 A 的距离	$\frac{3}{5}a$	$\frac{4}{5}a$	a	$\frac{3}{5}a$	$\frac{3}{7}a$

从表中可以得知，二人第二次相遇地点与 A 的距离是

$\frac{3}{7}$ a=$\frac{3}{7}$ ×110=$\frac{330}{7}$ =47$\frac{1}{7}$ （米）。

答：二人第二次迎面相遇的地点距 A 点 47$\frac{1}{7}$ 米。

11. 已知行人速度为 1 米/秒，骑车人速度为 3 米/秒。设火车速度为 x 米/秒，依题意列方程：

$(x-1)\times 22=(x-3)\times 26$

$4x=56$，$x=14$

$(14-1)\times 22=286$

答：火车总长 286 米。

说明：这类追及问题的解题关键是以行人（或骑车人）为参照物。即假设行人相对静止，而火车是以$(x-1)$米/秒的速度行驶，22 秒行驶的路程即是火车的车身长度。

12. 先讨论轮船的情况。

逆流航行时间：$(35+5)\div 2=20$（小时），

顺流航行时间：$(35-5)\times 2=15$（小时），

逆水速度：$360\div 20=18$（千米/小时）

顺水速度：$360\div 15=24$（千米/小时)

水流速度：$(24-18)\div 2=3$（千米/小时）。

再看机帆船航行情况。

顺流速度：$12+3=15$（千米/小时），

逆流速度：$12-3=9$（千米/小时）。

往返所用时间：

$360\div 15+360\div 9=24+40=64$（小时）。

答：机帆船往返两港需 64 小时。

13. 汽船顺流速度为

$11+1.5=12.5$（千米/小时），

木船顺流速度为

$3.5+1.5=5$（千米/小时）。

某人在船上行驶时间为$8-1=7$（小时）。假设此人从 A 到 C 均乘汽船，行程为$12.5\times 7=87.5$（千米），比实际路程多$87.5-50=37.5$（千米）。

汽船与木船速度差为：

$12.5-5=7.5$（千米/小时）。

故乘木船所用时间为$37.5\div 7.5=5$（小时）。乘木船所行路程为

$5\times 5=25$（千米），由此可知，A、B 间水路路程为

$50-25=25$（千米）。

答：A、B 两镇水路路程为 25 千米。

14. 设老师出发 x 小时后三人相遇。则李华步行了$(x+\frac{1}{2})$小时，共走了 $4(x+\frac{1}{2})$千米；老师每小时行$4+1.2=5.2$（千米），共走了 5.2x 千米。依题意有

$4(x+\frac{1}{2})+5.2x=20.4$。

解得$x=2$。

即老师出发后 2 小时三人相遇。这时张明骑车用了$2-1.5=0.5$（小时）。

$4\times 2\frac{1}{2}\div 0.5=20$。

答：骑车人每小时行 20 千米。

15. 工人行走的速度为

$30-0.11\div\frac{15}{3600}=3.6$（千米/小时），

学生行走的速度为

$0.11\div\frac{12}{3600}$ -30=3（千米/小时），

从 14 点 16 分到工人与学生相遇所需时间为

$(30-3.6)\times\frac{6}{60}\div(3.6+3)$

$=0.4(\text{小时})=24$（分）。

答：工人与学生在 14 点 40 分相遇。

16. 把钟面的一周分为 60 格。当分针走 60 格时，时针走 5 格。时针的速度是分针的 $5\div60=\frac{1}{12}$。3 点时分针指 12，时针指 3，分针在时针后$5\times3=15$（格）。每分钟分针比时针多走$(1-\frac{5}{60})$格。要使分针与时针重合，即要使分针比时针多走 15 格，需要 $15\div(1-\frac{1}{12})=16\frac{4}{11}$（分钟）。

答：所求的时刻为 3 点 $16\frac{4}{11}$ 分。

17. 分两种情况讨论。

（1）在顺时针方向上时针与分针成$270°$角。

这时分针落后时针$60\times(270\div360)=45$（格）。而在 10 点整时分针落后时针$5\times10=50$（格）。因此，从 10 点整到此时的垂直，分针要比时针多走$50-45=5$（格）。而每分钟分针比时针多走$(1-\frac{1}{12})$格。

$5\div(1-\frac{1}{12})=5\frac{5}{11}$ (分钟)。

（2）在顺时针方向上时针与分针成$90°$角。

这时分针落后时针$60\times(90\div360)=15$（格）。而在 10 点整时分针落后时针$5\times10=50$（格），因此，从 10 点整到此时的垂直，分针要比时针多走$50-15=35$（格）。$35\div(1-\frac{1}{12})=38\frac{2}{11}$（分钟）。

答：所求时刻为 10 点 $5\frac{5}{11}$ 分或 10 点 $38\frac{2}{11}$ 分。

18. 分两步做。

（1）小明开始解题的时刻：

此时分针与时针的夹角为$180°$，分针落后时针$60\times(180\div360)=30$（格）。而 7 点整时分针落后时针$5\times7=35$（格）。因此，从 7 点整到此时成一直线，分针要比时针多走$35-30=5$（格）。$5\div(1-\frac{1}{12})=5\frac{5}{11}$ (分钟)。即小

明开始解题的时间是 7 点 $5\frac{5}{11}$ 分。

（2）小明解题结束的时刻：

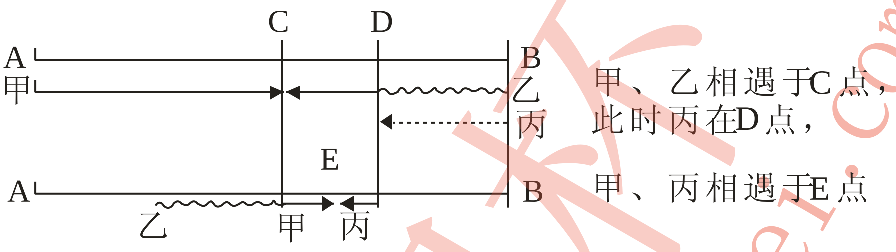
从 7 点整到这一时刻分针要比时针多走$5\times7=35$（格）。

$35\div(1-\frac{1}{12})=38\frac{2}{11}$ （分钟）。即小明解题结束时是 7 点 $38\frac{2}{11}$ 分钟。

7 点 $38\frac{2}{11}$ 分-7 点 $5\frac{5}{11}$ =（分钟）。

答：小明解题用了 $32\frac{8}{11}$ 分钟。

19. 画图如下：



（1）甲和丙 15 分钟共走的路程即 C、D 间距离为$(40+60)\times15=1500$（米）。

（2）乙和丙的速度差$50-40=10$（米/分）。

（3）甲和乙从出发到相遇所用时间为$1500\div10=150$（分钟）。

（4）A、B 两地距离

$(50+60)\times150=16500(米)=16.5$（千米）。

答 A、B 两地相距 16.5 千米。

第六章　列方程解应用题

1. 某小学六年级选出女生的$\frac{1}{11}$和 22 名男生参加迎春杯数学竞赛，剩下的女生人数是剩下男生人数的 2 倍，又知女生比男生多 2 人，这个小学六年级共有多少人？

2. 教室里有若干名学生，走了 10 个女生后，男生人数是女生人数的 2 倍，又走了 9 个男生后，女生是男生人数的 5 倍，最初有多少名女生？

3. 用一根绳子围成一个正方形，又用这根绳子围成一个圆，结果圆的半径比正方形的边长少$2(\pi-2)$米，求这根绳子的长。

4. 两个缸内共有 48 桶水，甲缸给乙缸加水一倍，然后乙缸又给甲缸加甲缸剩余水的一倍，则两缸的水量相等，求两个水缸原来各有多少桶水？

5. 甲乙二人分别从 A、B 两地同时相向而行，乙的速度是甲的$\frac{2}{3}$，二人相遇后继续前进。甲到 B 地，乙到 A 地后立即返回。已知二人第二次相遇的地点距第一次相遇的地点是 20 千米，求 A、B 两地相距多少千米？

6. 村里种了新甜瓜，男女老少品尝它。小伙每人吃一个；姑娘两人分一瓜，老人一瓜三人吃，四个小孩吃一瓜。男女老少四个组，一共吃了五十瓜，各组人数都相等，每组几人品尝瓜？

7. 小明在 360 米长的环形跑道上跑了一圈，已知他前一半时间每秒跑 5 米，后一半时间每秒跑 4 米，求他后一半路程用了多少时间？

8. 早晨 6 点多钟有两辆汽车先后离开学校向同一目的地开去，两辆汽车的速度都是每小时 60 千米，已知在 6 点 32 分的时候，第一辆车离开学校的距离是第二辆车的三倍。到 6 点 39 分的时候，第一辆汽车离开学校的距离是第二辆汽车的二倍，求第一辆汽车是 6 点几分离开学校的？

9. 某列火车通过 250 米长的隧道用 25 秒，通过 210 米长的隧道用 23 秒，该列车与另一列长 320 米，时速 64.8 千米的列车错车需几秒？

10. 快、中、慢三辆车同时同地出发，沿同一公路去追赶前面一骑车人。这三辆车分别用 6 分钟、10 分钟、12 分钟追上骑车人。已知快慢车的时速分别为 24 千米和 19 千米，求中速车的速度？

11. 现在是 10 点到 11 点之间的某一时刻。已知在此刻之后 6 分钟分针的位置与此刻之前 3 分钟时针的位置反向成一直线，求现在的时刻。

12. 一条船往返于甲、乙两港之间。已知船在静水中的速度为每小时 8 千米，平时逆行与顺行所用时间比为2：1。一天因下暴雨，水流速度为原来的 2 倍，这条船往返共用 9 小时，甲乙两港相距多少千米。

13. 王芳做暑假作业，如果每天做 4 道题，则按计划时间计算还有 48 道题未做；如果每天做 6 道题，则按计划做完后还有时间多做 8 道题，暑假作业共有多少道题？计划做几天？

14. 某工厂金工车间有 77 个工人。每个工人平均每天可以加工甲种零件 5 个，或乙种零件 4 个，或丙种零件 3 个。已知 3 个甲种零件 1 个乙种零件和 9 个丙种零件恰好配成一套。问，应安排生产甲、乙、丙三种零件各多少人？才能使生产的三种零件恰好配套？

15. 四堆鸡蛋共 46 个。如果第一堆增加一个，第二堆减少 2 个，第三堆增加一倍，第四堆减少一半，那么四堆鸡蛋的个数就相等，求这四堆鸡蛋原来各多少个？

16. 一笔奖金分为一、二、三等奖，每个一等奖奖金是每个二等奖奖金的 2 倍，每个二等奖的奖金是每个三等奖奖金的 2 倍。如果评选一等奖 1 人，二等奖 2 人，三等奖 3 人，那么一等奖奖金是 120 元；如果评选 1 等奖 1 人，二等奖 3 人，三等奖 5 人，那么一等奖奖金是多少元？

17. 在一次数学考试中，甲乙成绩和是 184 分，乙丙成绩和是 187 分，丙丁的成绩和是 188 分，甲比丁多 1 分，问甲、乙、丙、丁各得多少分？

18. 体育场入场卷 30 元一张，若降价后观众增加一半，收入增加$\frac{1}{4}$。每张入场卷降价多少元？

19. 小明从家到学校，前一半路程步行，后一半路程乘车；他从学校回家时，前$\frac{1}{3}$时间乘车，后$\frac{2}{3}$时间步行。这样去学校的时间比回家所用时间多 2 小时。已知小明步行每小时行 5 千米，乘车每小时行 15 千米，那么小明家到学校的路程是多少千米？

20. 参加迎春杯数学竞赛人数共有 2000 多人，其中光明区占$\frac{1}{3}$，中心区占$\frac{2}{7}$，朝阳区占$\frac{1}{5}$，剩余的全是远郊区的学生。比赛结果，光明区有$\frac{1}{24}$的学生得奖，中心区有$\frac{1}{16}$的学生得奖，朝阳区有$\frac{1}{18}$的学生得奖，全部获奖者的$\frac{1}{7}$是远郊区的学生，问参赛学生有多少人？获奖学生有多少人？

分析解答

1. 设该小学六年级有女生 x 人，则男生有$(x-2)$人，依题意有；

$$\frac{10}{11}x=2(x-2-22),$$

$$10x=22x-528,$$

$$x=44,$$

$$\therefore x-2=42,44+42=86。$$

答：该校六年级共有 86 人。

2. 设教室里最初有 x 名女生，则男生有$2(x-10)$名，根据题意得：

$$x-10=5[2(x-10)-9],$$

$$x-10=10(x-10)-45,$$

$$x-10=10x-100-45,$$

$$9x=135,$$

$$x=15。$$

答：最初有 15 名女生。

3. 本题间接设未知数比较方便。设圆的半径为 x 米，则正方形的边长为$[x+2(\pi-2)]$米，这样圆的周长为$2\pi x$米，正方形的周长为$4[x+2(\pi-2)]$米，依题意得：

$$2\pi x=4[x+2(\pi-2)],$$

$$\pi x=2x+4(\pi-2),$$

$$\pi x-2x=4(\pi-2),$$

$$(\pi-2)x=4(\pi-2),$$

$$x=4。$$

$$2\pi x=2\pi\times4=8\pi。$$

或$4\times[4+2(\pi-2)]=4\times[4+2\pi-4]=8\pi$。

$$8\pi=8\times3.14=25.12$$

答：这根绳子的长约为 25.12 米。

4. 设原来甲缸有 x 桶水，乙缸有$(48-x)$桶水。甲缸给乙缸加水一倍，则甲缸有水$[x-(48-x)]$桶，乙缸有水$2(48-x)$桶。乙缸又给甲缸加水一倍，则甲缸有水$2[x-(48-x)]$桶，乙缸有水$\{2(48-x)-[x-(48-x)]\}$桶，根据题意得：

$$2[x-(48-x)]=2(48-x)-[x-(48-x)],$$
$$2x-2(48-x)=2(48-x)-x+(48-x),$$
$$3x=5(48-x),$$
$$3x=5\times 48-5x,$$
$$8x=5\times 48,$$
$$x=30,\quad \therefore 48-x=48-30=18。$$

答：甲缸原有水 30 桶，乙缸原有水 18 桶。

5. 如图，设甲、乙第一次相遇的地点为 C，第二次相遇的地点为 D，且设$AB=x$（千米）。

由于乙的速度是甲的速度的$\frac{2}{3}$，所以$\frac{AC}{BC}=\frac{3}{2}=\frac{BC+BD}{AC+AD}=\frac{2BC+20}{2AC-20}$，又

$AC=\frac{3}{5}x$，$BC=\frac{2}{5}x$，由$2\times(2BC+20)=3\times(2AC-20)$得：

$$2\times\left(\frac{4}{5}x+20\right)=3\times\left(\frac{6}{5}x-20\right),$$
$$8x+200=18x-300,$$
$$x=50。$$

答：A、B 两地相距 50 千米。

6. 设每组有 x 人品尝瓜，依题意有：

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=50$$
$$\frac{25}{12}x=50,\quad x=24。$$

答：每组有 24 人品尝瓜。

7. 李明前一半时间跑步的速度大于后一半时间跑步的速度，因此前一半时间跑步的路程大于半圈 180 米，即在前半圈跑步的速度都是每秒 5 米，可求出前半圈所用的时间，只要求出跑一圈所用的时间，问题就迎刃而解了。

设跑一圈用 x 秒，根据题意得

$$5\times\frac{x}{2}+4\times\frac{x}{2}=360$$
$$5x+4x=720$$
$$9x=720$$
$$x=80$$

前一半路程用$180 \div 5 = 36$（秒）

$\therefore$后一半路程用$80 - 36 = 44$（秒）

答：小明跑后一半路程用了 44 秒。

8. 两辆汽车的速度都是 60 千米/小时=1 千米/分。设在 6 点 32 分时第二辆汽车离开学校的距离为 x 千米，则第一辆汽车离开学校的距离为 3x 千米，到 6 点 39 分时两辆车都行了 7 分钟，行程都是 7 千米，距学校的距离第二辆车为$(x+7)$千米，第一辆车为$(3x+7)$千米，根据题意得：

$$2(x+7) = 3x+7，$$

$$2x+14 = 3x+7，$$

$$x = 7。$$

$$\therefore 3x = 3 \times 7 = 21。$$

因此，在 6 点 32 分时，第一辆车已行驶了 21 分钟，$32 - 21 = 11$

答：第一辆汽车是早晨 6 点 11 分离开学校的。

9. （1）求第一列车的长度和速度。设第一列车的长度为 x 米，则通过 250 米长的隧道行驶$(x+250)$米，通过 210 米长的隧道行驶$(x+210)$米，其速度可分别表示为$\frac{x+250}{25}$ (米/秒)，$\frac{x+210}{23}$（米/秒）因此得到

$$\frac{x+250}{25} = \frac{x+210}{23}$$

$$25x + 25 \times 210 = 23x + 250 \times 23$$

$$25x + 250 \times 21 = 23x + 250 \times 23$$

$$2x = 250 \times 2$$

$$x = 250$$

$$\frac{x+250}{25} = \frac{250+250}{25} = 20$$

即第一列车长 250 米，速度为每秒 20 米。

（2）第二列车长 320 米，速度

64.8 千米/小时$= 18$米/秒

错车时行驶$250 + 320 = 570$（米），错车速度$20 + 18 = 36$（米/秒），错车时间为

$570 \div 38 = 15$

答：两列车错车而过需 15 秒。

10. （1）求骑车人的速度。

快车速度 24 千米/小时=400 米/分，

慢车速度 19 千米/小时=$\frac{950}{3}$ 米/分

设骑车人速度为 x 米/分

$$\frac{950}{3}\times 12-400\times 6=(12-6)x$$

$$6x=1400$$

$$x=\frac{700}{3}$$

即骑车人速度为$\frac{700}{3}$ 米/分。

（2）求中速车速度

设中速车速度为 y 米/分，则

$$10y-6\times 400=(10-6)\times\frac{700}{3}$$

$$10y=2400+\frac{2800}{3}，y=240+\frac{280}{3}=\frac{1000}{3}$$

$$\frac{1000}{3}\times 60=20000（米/小时）=20（千米/小时）$$

答：中速车的速度为 20 千米/小时。

11. 把钟面的一周分为 60 格，分针每分钟走 1 格，时针每分钟走$\frac{1}{12}$ 格。设现在的时刻是 10 点 x 分，时针比 10 点的位置前进了$\frac{1}{12}$ x 格。6 分钟后，分针又前进了 6 格，3 分钟前时针在现在的位置之前$\frac{3}{12}$ 格。由题意，6 分钟后的分针与 3 分钟前的时针成一直线，即两针之间的相隔 30 格，由此列出方程：

$$50+(\frac{x}{12}-\frac{3}{12})-(x+6)=30，$$

解此方程得$x=15$。

答：现在的时间是 10 点 15 分。

12. 分两步做

（1）求平时水流速度。

设平时水流速度为 x 公里/小时，则逆行速度为$(8-x)$公里/小时，顺行速度为$(8+x)$公里/小时，根据题意得：

$$(8+x):(8-x)=2:1，$$

$$8+x=2(8-x)，$$

$$8+x=16-2x，$$

$$3x = 8,$$

$$x = \frac{8}{3}。$$

即平时水流速度为$\frac{8}{3}$公里/小时，下暴雨时的水流速度为$2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$（公里/小时）

（2）求甲、乙两港间距离。

设甲、乙两港间距离为 y 公里，下暴雨那天顺行速度为$(8+\frac{16}{3})$公里/小时，逆行速度为$(8-\frac{16}{3})$公里/小时，往返共用 9 小时，因此得：

$$\frac{y}{8+\frac{16}{3}} + \frac{y}{8-\frac{16}{3}} = 9,$$

$$\frac{3y}{40} + \frac{3y}{8} = 9,$$

$$3y + 15y = 9 \times 40,$$

$$18y = 18 \times 20,$$

$$y = 20。$$

答：甲、乙两港相距 20 公里。

13. （一）：设计划做 x 天，则有暑假作业$(4x + 48)$道题或$(6x - 8)$道题，由此列方程：

$$4x + 48 = 6x - 8,$$

$$解得 \quad x = 28。$$

$$4x + 48 = 4 \times 28 + 48 = 160，或$$

$$6x - 8 = 6 \times 28 - 8 = 160。$$

（二）：设暑假作业有 x 题，则按计划$\frac{x-48}{4}$天或$\frac{x+8}{6}$天完成，由此列方程：

$$\frac{x-48}{4} = \frac{x+8}{6},$$

$$解得 \quad x = 160。$$

$$\frac{x-48}{4} = \frac{160-48}{4} = 28或\frac{x+8}{6} = \frac{160+8}{6} = 28。$$

答：暑假作业有 160 道题，计划做 28 天。

14. 设加工乙种零件 x 个，则需加工甲种零件 3x 个，丙种零件 9x 个才能配套。根据题意，加工乙种零件需安排$\frac{x}{4}$人，加工甲种零件需安排$\frac{3x}{5}$人，加工丙种零件需安排$\frac{9x}{3}$人，因此有：

$$\frac{3}{5}x+\frac{x}{4}+\frac{9x}{3}=77$$

$$12x+5x+60x=1540,$$

$$77x=1540,$$

$$x=20。$$

$$\therefore\frac{3x}{5}=\frac{3}{5}\times20=12,$$

$$\frac{x}{4}=\frac{1}{4}\times20=5,$$

$$\frac{9x}{3}=3\times20=60$$

答：应安排 12 人加工甲种零件；5 人加工乙种零件，60 人加工丙种零件。

15. 间接设未知数。设各堆鸡蛋增减后均为 x 个，则第一堆鸡蛋原来有$(x-1)$个，第二堆鸡蛋原来有$(x+2)$个，第三堆鸡蛋原来有$\frac{x}{2}$个，第四堆鸡蛋原来有 2x 个，根据题意得：

$$(x-1)+(x+2)+\frac{1}{2}x+2x=46,$$

$$2x-2+2x+4+x+4x=92,$$

$$9x=90,$$

$$x=10。$$

$$\therefore x-1=9,\ x+2=12,\ \frac{1}{2}x=5,\ 2x=20$$

答：原来第一堆鸡蛋有 9 个，第二堆鸡蛋有 12 个，第三堆鸡蛋有 5 个，第四堆鸡蛋有 20 个。

16. 按第一个方案，一等奖的奖金 120 元，二等奖的奖金 60 元，三等奖的奖金 30 元，则奖金总数为120 元$+2\times60$ 元$+3\times30$ 元$=330$ 元。设第二个方案的一等奖奖金为 x 元，则二等奖奖金为$\frac{1}{2}$ x 元，三等奖奖金为$\frac{1}{4}$ x 元，根据题意得

$$x+3\times\frac{1}{2}x+5\times\frac{1}{4}x=330$$

$$4x+6x+5x=1320$$

$$x=88$$

答：一等奖的奖金是 88 元。

17. 设丁得 x 分，则甲得（$x+1$）分，乙得$184-(x+1)=$（$183-x$）分，丙得$187-(183-x)=187-183+x=$（$4+x$）分，根据题意得：

$$(4+x)+x=188$$
$$2x=184$$
$$x=92$$
$$\therefore x+1=93，183-x=91，4+x=96$$

答：甲得 93 分，乙得 91 分，丙得 96 分，丁得 92 分。

18. 分两种情况：

（1）设降价前有观众 a 人，每张入场卷降价 x 元，依题意有：

$$\frac{1}{2}a\times(30-x)=\frac{1}{4}\times30a，$$
$$30-x=15，$$
$$x=15。$$

（2）若开始售票时就降价，降价后观众比预订数 a 增加一半，则有：

$$\frac{3}{2}a\times(30-x)=\frac{5}{4}\times30a$$
$$90-3x=75，$$
$$x=5。$$

答：每张入场卷降价 15 元或 5 元。

19. 设小明家到学校的路程为 s 千米，小明从学校回家所用时间为 t 小时，依题意有：

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}s}{5}+\dfrac{\frac{1}{2}s}{15}=t+2\Rightarrow 15t+30=2s，\\ \dfrac{1}{3}t\times15+\dfrac{2}{3}t\times5=s\Rightarrow 25t=3s。\end{cases}$$

$$即\begin{cases}75t=10s-150\\ 75t=9s\end{cases}\Rightarrow 10s-150=9s，$$
$$\therefore s=150。$$

答：小明家到学校的路程是 150 千米。

20. 设参赛学生有 x 名，获奖学生 y 名。依题意得：

$$(\frac{1}{3}\times\frac{1}{24})x+(\frac{2}{7}\times\frac{1}{16})x+(\frac{1}{5}\times\frac{1}{18})x=(1-\frac{1}{7})y，$$

化简得：$\frac{1}{72}x+\frac{1}{56}x+\frac{1}{90}x=\frac{6}{7}y$，（1）即$x=20y$。由方程（1）可知，x 是 72、56、90 的公倍数，又

$$[72,56,90]=2520，$$

并且 $2000<x<3000$，

因此　$x = 2520$

从而 $y=\frac{1}{20}x=126$。

答：参赛学生有 2520 名，获奖学生 126 名。

第七章　周期问题

1. 节日之夜，广场上挂了一排彩灯，共 1997 盏。采灯排列的规则是：从头起每八盏为一组顺序排列。每组的八盏灯依次为三盏红灯，二盏黄灯，三盏绿灯。那么，最后一盏灯是什么颜色？

2. 把$\frac{1}{7}$化成小数，那么小数点后面第 100 位上的数字是几？

3. 按照右表所排列的规律，1997 排在第几行，第几列？

一	二	三	四
1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
⋮	⋮	⋮	⋮

4. 把全体偶数，2、4、6、8……依次排成五列如表，那么，2000 出现在第几列？

一	二	三	四	五
	2	4	6	8
16	14	12	10	
	18	20	22	24
32	30	28	26	

……………………………………

5. 求1993^{1993}的个位数字？

6. $\underbrace{55\ldots\ldots5}_{1997\text{ 个 }5}$除以 13 得的余数是多少？

7. 有一个人在草坪上散步，从 O 点出发，面向正东向前走 3 米；然后向左转$120°$，再向前走 3 米；接着再向左转$120°$，仍向前走 3 米，不断重复进行。当这个人走过 2000 米后，他距出发点 O 的距离是多少米？

8. 有一个十一位数，已知它的首位数字为 9，末位数字为 8，且每三个相邻数字之和是 24，问下图中打“？”处的数字是几？这个数是多少？

9				?						8

9. 右表中第一行的文字和第二行的字母都呈现各自的周期性那么，第 100 列中的文字和字母分别是什么？

我	们	爱	数	学	我	们	爱	数	学	我	……
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	

10. 已知 1996 年元旦是星期一，问 2000 年的元旦是星期几？

11. 两个运动员在长为 30 米的游泳池里来回游泳。甲的速度每秒游 1 米，乙的速度每秒游 0.6 米，他们同时分别从游泳池的两端出发，来回共游 15 分钟，如果转身时间可忽略不计，那么在这段时间内共相遇多少次？

12. 如果把自然数依次排成下表，问 1997 应在第几列？

一	二	三	四	五	六	七	八
1	2	3	4	5	6	7	8
15	14	13	12	11	10	9	
	16	17	18	19	20	21	22
29	28	27	26	25	24	23	
	30	31	32	33	34	35	36
…	…	…	…	…	…	…	…

13. 四个小动物换座位。一开始，小鼠坐在 1 号位置，小猴坐在 2 号位置，小兔坐在 3 号位置，小猫坐在 4 号位置。以后它们不断地交换位置，第一次上下两排交换，第二次在第一次交换后再左右两排交换，第三次再上下两排交换，第四次再左右两排交换，这样不断交换下去，那么，第 99 次交换位置后小兔坐在几号位置上？

鼠	猴
兔	猫

14. 有甲、乙两个水杯，起初甲杯装 1 千克水，乙杯是空的。第一次将甲杯里的水的$\frac{1}{2}$倒入乙杯里，第二次又将乙杯里的水的$\frac{1}{3}$倒入甲杯里，第三次又将甲杯里水的$\frac{1}{4}$倒入乙杯里，第 4 次又将乙杯里水的$\frac{1}{5}$倒回甲杯里，照这样来回倒下去，那么，到了 1997 次后，甲杯里的水还剩多少千克？

15. 有一根长 100 厘米的木棍上，自左至右每隔 6 厘米染一个红点，同时自右至左每隔 5 厘米也染一个红点，然后沿红点将木棍逐段锯开，那么，长度是 1 厘米的短木棍有多少根？

16. 如下图，把 1 至 8 个号码摆成一个圆圈，现在有一个小球，第一天从 1 号顺时针前进 329 个位置，第二天再逆时针前进 485 个位置，第三天又顺时针前进 329 个位置，第四天再逆时针前进 485 个位置，如此不断重复进行，那么，至少经过几天，小球又回到原来的 1 号位？

1
8　　2
7　　　3
6　　4
5

17. 将分母为 15 的所有最简假分数由小到大依次排列，问第 99 个假分数的分子是多少？

18. 紧接着 1989 后面写一串数字，写下的每一个数字都是它前面两个数字的乘积的个位数。例如$8\times9=72$，在 9 后面写 2，$9\times2=18$，在 2 后写 8，……，得到一串数字 19892868……。那么，这串数字从 1 开始往右数，第 1997 个数字是几？这 1997 个数字和是多少？

19. 把 70 个数排成一行，除了两头的两个数以外，每个数的 3 倍都恰好等于它两边两个数的和，这一行数最左边的几个数是：0、1、3、8、21……。那么，最右边的一个数被 6 除的余数是多少？

20. 观察一下斐波那契数列：1、1、2、3、5、8、13、21、34……，其规律是，从第 3 个数起，每个数都是前两个数的和，求

（1）这个数列的第 1997 个数的个位数字。

（2）这个数列中第 1997 个数除以 5 的余数。

（3）这个数列中前 1997 个数的和除以 5 的余数。

分析解答

1. 彩灯的排列规则是八盏灯为一组，每组按同样的方式重复着出现。由于，$1997 \div 8 = 249 \cdots 5$，说明经过 249 次重复后还余 5 盏灯。这 5 盏灯应是：红、红、红、黄、黄。因此，第 1997 盏灯，即最后一盏应是黄色的。

   事物在运动变化的过程中，某些特征循环往复出现，这种现象通常叫作周期现象。在日常生活中，有不少周期现象，如：一年四季，春夏秋冬周而复始，四季的变化就是一种周期现象。我们把连续两次出现所经过的时间叫周期，因此四季变化的周期为一年。对周期问题的研究，无论在经济建设还是科学研究中都有十分重要的意义。

2. 把$\frac{1}{7}$化成小数时，

$$\frac{1}{7} \approx 0.142857142857\cdots$$

   小数点后面 142857 这六个数字，依次不断重复出现，简写为：

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

   称作循环小数，循环节省 6 个数字。

   由于$100 \div 6 = 16 \cdots 4$。所以，小数点后面第 100 位上的数字应是 8。

   在研究和求解周期问题时，我们应注意一下两点：

   1.仔细观察，找出规律。

   2.把问题的要求与周期规律相联系，以求得问题的解决。

3. 按照表中的规律，8 个数字为一变化周期。由于

$$1997 \div 8 = 249 \cdots 5$$

   因此，1997 应排在第四列。

   又因每行四个数，由于

$$1997 \div 4 = 499 \cdots 1$$

   因此，1997 应排在第 500 行。

   所以，1997 应排在第 500 行第 4 列。

4. 有表可知从 2 开始每连续 8 个偶数为一周期，2000 是第 1000 个偶数，由于

$1000 \div 8 = 125$，所以，2000 是第 125 个周期的最后一个数。由此可知，2000 应在第一列。

5. 由于1993^n的个位数字与3^n的个位数字相同，我们由下表

乘方	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	…
个位数字	3	9	7	1	3	9	7	…

发现，3^n(n 为自然数)的个位数字呈周期现象，周期为 4。而

$$1993 \div 4 = 498 \cdots 1$$

因此，3^{1993}的个位数字是 3。由于1993^{1993}与3^{1993}的个位数字相同，所以，1993^{1993}的个位数字也为 3。

注意，这里所说周期为 4，是指周期“长”为 4 个数字或符号。

6. 我们逐个试验，得

$5 \div 13 = 0 \cdots 5$

$55 \div 13 = 4 \cdots 3$

$555 \div 13 = 42 \cdots 9$

$5555 \div 13 = 427 \cdots 4$

$55555 \div 13 = 4273 \cdots 6$

$555555 \div 13 = 42735$

我们发现，由 6 个 5 组成的数 555555 被 13 整除。因此，余数按 5，3，9，4，6，0 为一组依次重复出现，呈周期现象，周期为 6。由于

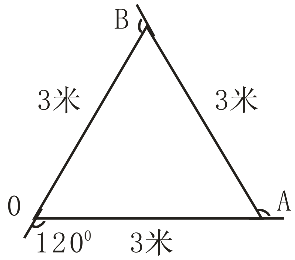
$$1997 \div 6 = 332 \cdots 5$$

因此，$\underbrace{55\ldots5}_{1997个5}$除以 13 所得余数应为 6。

7. 根据题意可画出此人散步的路径图如图。O 为出发点，向东走 3 米到达 A，向左转$120°$向前走 3 米到达 B。再向左转$120°$向前走 3 米就回到了起点 O。所以，每走 9 米都恰好回到出发点。由此可知，9 米是个周期。由于

$$2000 \div 9 = 222 \cdots 2$$

因此，他走了 2000 米后，应在出发点正东 2 米处。



8. 由于这个十一位数每三个相邻的数字之和都是 24，如从左向第二、三、四位上的数字分别设为x_1，x_2，x_3。那么，

$$9 + x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

于是

$$x_3 = 9$$

这样就找到一条规律：从左向右每隔二位出现一个 9。

同理，从右向左，每隔二位出现一个 8。

根据以上两条规律，十位数字应为 9，“？”处应是 8。

又根据相邻三位数字和为 24，所以百位数字应为 7。且自左至右按 9,8,7 三数为周期循环出现。因此，这个十一位数是 98798798798。

9. 先看上行，均以“我们爱数学”重复出现，所以周期为 5，由于$100 \div 5 = 20$。故第 100 个汉字是“学”；再看下行，均以“A、B、C、D、E、F、G”重复出现，所以周期为 7。由于$100 \div 7 = 14 \cdots 2$，故第 100 个字母是 B。

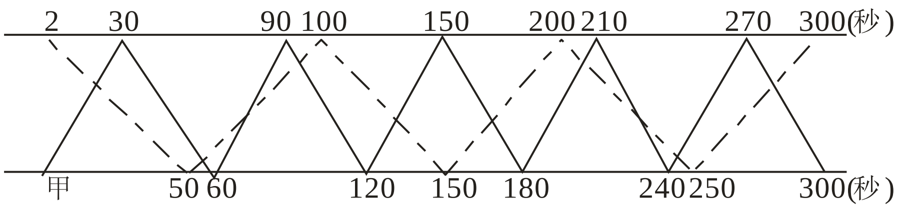
10. 因为，1996 年是闰年，1997，1998，1999 为平年，而每星期为 7 天，即周期为 7 天。所以，有

$$(365 \times 3 + 366) \div 7 = 208 \cdots 5$$

而$1 + 5 = 6$，因此 2000 年元旦是星期六。

11. 这是一个多次相遇问题，就运动方向而言，既有相向又有相背；既有相遇，又有追及。情况似乎复杂，其实采用图解法，解法十分简明。

由题意可知，甲游一个往返（回到出发地）需$(30 \times 2) \div 1 = 60$（秒），乙游一个往返需$(30 \times 2) \div 0.6 = 100$（秒）。而$[60,100] = 300$（秒），于是经过 5 分钟（300 秒），甲游了 5 个往返，乙游了 3 个往返，甲、乙同时回到各自的起点，即 5 分钟一周期。由题意画出下图，其中实线表示甲，虚线表示乙。实线与虚线的交点表示甲乙相遇的地点，从图中可以



看出，在 300 秒（5 分钟）内甲、乙两人共有十次相遇。

甲、乙两人共游了 15 分钟，正好是 3 个周期，所以共有 30 次相遇。

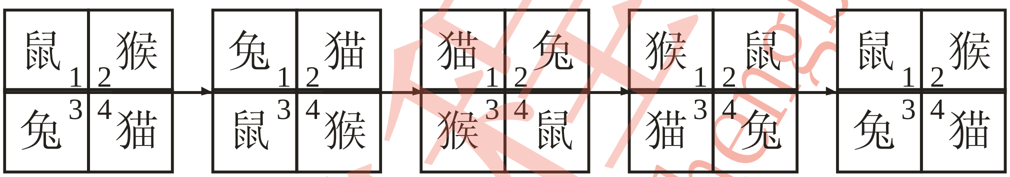
12. 观察数表可知，从第三行开始出现周期现象，每个周期占两行，只有 14 个数，每个周期的第 1 行中的 7 个数，由第二列开始自左至右，依次排列第八列；第二行自右至左，由第七列始依次排列第一列。

由于，$1997-15=1982$，

$$1982 \div 14 = 141 \cdots 8$$

所以 1997 应在第七列。

13. 根据题中的交换方法，得下列交换位置图。



开始图　第一次交换后　第二次交换后　第三次交换后　第四次交换后

不难发现，交换四次后又恢复到开始的位置。所以，小动物位置的变化也是周期现象，周期为 4。

由于$99 \div 4 = 24 \cdots 3$

所以，交换 99 次后小动物坐位的情况应与第三次交换后的情况一样，小兔坐在 4 号位置上。

14. 根据题意，第一次将甲杯的水的$\frac{1}{2}$倒入乙杯后，两杯的水量相等，都是 500 克。第二次将乙杯里的水的$\frac{1}{3}$倒回甲杯后，甲杯的水量为$500+500\times\frac{1}{3}=500\left(1+\frac{1}{3}\right)$，第三次将甲杯中现有水的$\frac{1}{4}$倒回乙杯后，甲杯剩余的水量是

$$500\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=500\text{（克）。}$$

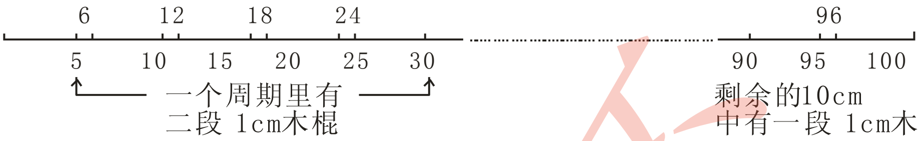
与第一次倒后的剩余水量相等。继续倒下去，出现了周期循环，且周期为 2。

由于　　$1997 \div 2 = 998\cdots1$

所以，在倒了 1997 次后，甲杯里剩余的水量与第一次倒后甲杯里剩余的水量相等，应为 500 克。

15. 因为 100 能被 5 整除，所以自右至左每隔 5cm 染一红点，等同于自左至右每隔 5cm 染一个红点。这样我们可把两种染色方法看作从同一端点染起。

由于 6 与 5 的最小公倍数是 30，即在 30cm 处，两种方法同时染上红色，这样染色的情况呈周期性，且周期长为 30cm。如图，在一个周期里锯开后长



为 1cm 的短木棍有 2 段。在剩余的 10cm 木棍中，有 1cm 木棍 1 段。因此，长度为 1cm 的短木棍共$2 \times 3 + 1 = 7$根。

16. 根据题意，小球顺时针、逆时针又顺时针、逆时针两天为一个周期循环变换前进方向。每一周期中，小球实际是按逆时针前进了$485 - 329 = 156$（个）位置，又$156 \div 8 = 19 \ldots 4$，可知小球逆行 19 圈后又逆行前进 4 个位置。固一圈共 8 位置，需两个周期后回到原来的位置，而一个周期为两天。所以，至少要用 4 天小球又回到原来的 1 号位置。

17. 首先我们将分母为 15 的最简假分数由小到大依次排列如下：

$$\frac{16}{15}, \frac{17}{15}, \frac{19}{15}, \frac{22}{15}, \frac{23}{15}, \frac{26}{15}, \frac{28}{15}, \frac{29}{15},$$
$$\frac{31}{15}, \frac{32}{15}, \frac{34}{15}, \frac{37}{15}, \frac{38}{15}, \frac{41}{15}, \frac{43}{15}, \frac{44}{15},$$
$$\frac{46}{15}, \frac{47}{15}, \cdots$$

这样似乎找不出规律。但如果化成带分数，重新排列如下：

$$1\frac{1}{15}, 1\frac{2}{15}, 1\frac{4}{15}, 1\frac{7}{15}, 1\frac{8}{15}, 1\frac{11}{15}, 1\frac{13}{15}, 1\frac{14}{15},$$
$$2\frac{1}{15}, 2\frac{2}{15}, 2\frac{4}{15}, 2\frac{7}{15}, 2\frac{8}{15}, 2\frac{11}{15}, 2\frac{13}{15}, 2\frac{14}{15},$$
$$3\frac{1}{15}, 3\frac{2}{15}, \cdots$$

便可发现规律，带分数的整数部分按自然数由小到大依次排列，分数部分每 8 个重复出现一次，即周期为 8，且每个周期中 8 个带分数的整数部分相同。

由于　$99 \div 8 = 12 \cdots 3$

所以，第 99 个分数应在第 13 个周期中的第 3 个位置上，它的整数部分应 $12 + 1 = 13$，分数部分应为$\frac{4}{15}$。即第 99 个分数为 $13\frac{4}{15}$，它的分子为

$$13 \times 15 + 4 = 199。$$

18. 我们不妨将这串数向后面多写一些来：

$$19892868842868842\cdots$$

由此可知，去掉前四个数 1989 后，“286884”这 6 个数字不断重复出现，为一周期。

由于$(1997 - 4) \div 6 = 332 \cdots 1$

可知，1997 个数字中去掉前四个数后，还包括 332 个周期“286884”再另加一个数。因此，第 1997 个数字应是 2。

这 1997 个数字和为

$(1 + 9 + 8 + 9) + (2 + 8 + 6 + 8 + 8 + 4) \times 332 + 2$

$= 27 + 11952 + 2 = 11981$。

19. 根据条件：除两头的两个数以外，每个数的 3 倍恰好等于它两边的两个数的和，即从第三个数起，每一个数恰好等于它左边的数的三倍减它左边的第二个数。所以接下去的几个数是：

$$21 \times 3 - 8 = 55，$$

$$55 \times 3 - 21 = 144，$$

$$144 \times 3 - 55 = 377，$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

这一排数是 0，1，3，8，21，55，144，377，…，通过仔细观察，可发现有以下规律：

（1）第一个是偶数，后面接着 2 个是奇数。接下来又是一个偶数，后面二个是奇数，不断循环出现。

由于$70 \div 3 = 23 \cdots 1$，所以第 70 个数是偶数。

（2）这一行数被 3 整的余数为：

原数	0	1	3	8	21	55	144	377	…
余数	0	1	0	2	0	1	0	2	…

由此可知，余数按 0，1，0，2 这 4 个数为一周期，不断重复出现。

由于$70 \div 4 = 17 \cdots 2$，因此第 70 个数与第 2 个数的余数相同，被 3 除余 1。

综合（1）、（2）可知，第 70 个数是一个偶数，它被 3 除余 1。而一个偶数被 3 除余 1，则它被 6 除的余数为 4。所以，第 70 个数被 6 除的余数是 4。

20. （1）根据斐波那契数列的规律，从第 3 个数起，其个位数字与前两个数个位数的和的个位数字相同。我不妨把此数列各数相应的个位数字依次列出：

1，1，2，3，5，8，3，1，4，5，9，4，3，7，0，
7，7，4，1，5，6，1，7，8，5，3，8，1，9，0，
9，9，8，7，5，2，7，9，6，5，1，6，7，3，0，
3，3，6，9，5，4，9，3，2，5，7，2，9，1，0，
1，1，2，3，…

由此可看出，当写到第 61 个数时，开始呈现周期性，它的周期是 60。

由于$1997 \div 60 = 33 \cdots 17$，所以第 1997 个数的个位数字，与周期中第 17 个数的个位数相同，应是 7。

（2）因为在（1）中已求出第 1997 个数的个位数是 7，因此，这个数除以 5 的余数为 2。

另外，我们还可将这数列中每个数除以 5 的余数依次列出：

1，1，2，3，0，3，3，1，4，0，
4，4，3，2，0，2，2，4，1，0，
1，1，2，…

由此可看出，第 21 个数起呈周期性，所以周期为 20。

由于 $1997 \div 20 = 99 \cdots 17$

所以，第 1997 个数除以 5 的余数为第 17 个余数，应为 2。

（3）只需将这 1997 个数除以 5 的余数相加后除以 5 再看余数就行了。

$(0 \times 4 + 1 \times 4 + 2 \times 4 + 3 \times 4 + 4 \times 4) \times 99 +$ （$1 + 1 + 2 + 3 + 0 + 3 + 3 + 1 + 4 + 0 + 4 + 4 + 3 + 2 + 0 + 2 + 2$）

$= (1 + 2 + 3 + 4) \times 4 \times 99 + 35$

$= 3995$

由于 3995 是 5 的倍数，所以这 1997 个数的和除以 5 的余数为 0。

第八章　抽屉原则

1. 光明小学一年级招收了 400 名新生，而年龄最大的与最小的相差不到一周岁，那么，这些新生中一定有两个人是同年，同年，同月，同日出生的，你知道为什么吗？

2. 从五年级（1）班中任意挑选 13 名学生，那么在这 13 名学生中至少有两个人属相相同。

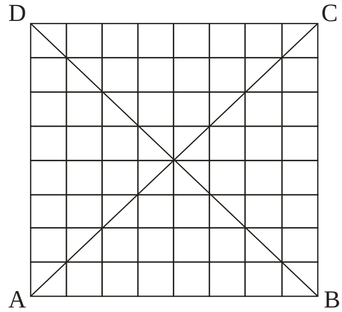
3. 五年级（1）班有 40 名学生，班里有个小书架，同学们可以任意借阅，试问小书架上至少要有多少本书，才能保证至少有一个同学能借到两本或两本以上的书？

4. 一副扑克牌（去掉两张王牌）每人随意抽取两张牌，那么至少有多少人才能保证他们当中一定有两个所抽取的两张牌的花色是相同的？

5. 黑色、白色、黄色的筷子各 8 根，混杂地放在一起。黑暗中想从这些筷子中取出颜色不同的两双筷子（每双筷子两根的颜色应一样）问至少取多少根才能保证达到要求？

6. 从起点开始，每隔 1 米种一棵树，如果把三块“爱护树木”的小木牌分别挂在三棵树上那么不管怎么挂，至少有两根挂牌的树，它们之间的距离是偶数（以米为单位）这是为什么？

7. 能否在 8 行 8 列的方格表（如图）的每一个空格中分别填上 1、2、3 这三个数字中的任意一个，使得各行、各列，对角线 AC、AD 的各个数字和互不相同，并对你的结论加以说明。



8. 某次集会，有 n 位代表参加，彼此认识的握手问候。试证，无论什么情况，在

这几位代表中至少有两个人握手的次数一样多。

9. 五（1）班有 40 名学生，班里有个小书架有 201 本图书，同学们可以随意借阅，并全部借给了学生，那么一定有一人至少借了 6 本图书，这是为什么？

10. 一个口袋里放有红色、黄色和绿色三种颜色的玻璃球若干个，现从中任取出一些球，问至少要取出多少个球，才能保证其中有五个球的颜色是相同的？

11. 一副扑克牌，共 54 张（其中 2 张王牌）问至少从中抽出多少张牌才能保证对于任意的抽法有

（1）至少有 4 张牌花色相同；

（2）四种花色的牌都有；

（3）至少有 4 张牌是红桃。

12. 在 1、4、7、10……100 中任取 20 个不同的数组成一组，证明这样的任意一组数中必有不同的两对数其和都是 104。

13. 夏令营组织 1987 名营员去游览故宫，景山公园，北海公园。规定每人必须去一处，最多去两处游览。那么，至少有几个人游览的地方完全相同。

14. 把 1、2、3……10 这十个自然数按任意顺序排成一圈，求证在这一圈数中一定有相邻的三个数之和大于 17。

15. 从1~20这 20 个自然数中，任取 11 个，必有两个数，其中一个数是另一个数的倍数。

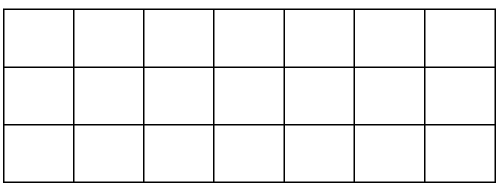
16. 一些孩子在沙滩上玩耍，他们把石子堆成许多堆，其中有一个孩子发现，从石子堆中任意选出五堆，其中总有两堆石子数之差是 4 的倍数，你说这个结论对吗？为什么？

17. 已知在边长为 1 的等边三角形内（包括边界），任意点了五个点，求证至少有两上点之间的距离不大于$\frac{1}{2}$ 。

18. 如果在边长为 1 的正方形中，任意放九个点，则至少有三个点，其所成的三角形面积不超过$\frac{1}{8}$ 。

19. 证明在任何六个人的聚会上，总有三个人互相认识，或者总有三个人互相不认识。

20. 如右图，有一3×7的方格网，对每一个方格任意染成红色或黄色，证明不论如何染色，一定能找到一个由小方格组成的长方形，它的四个角上的小方格具有相同的颜色。



分析解答

1. 也许有同学会说，新生入学登记的卡片上有每个同学的出生年、月、日，只要把全部新生的卡片查一下就知道了。如果我们规定不能查这些卡片，那么该怎么办呢？其实完全没有必要看这些登记卡，只要运用抽屉原则就可以解决。

　　抽屉原则 1 如果把多于 n 个的“苹果”按任一确定的方式分放到 n 个“抽屉”中去。那么，一定有一个“抽屉”中至少有两个“苹果”。

　　现在，只要把一年中的三百六十五天（闰年为三百六十六天）中的每一天看作一个“抽屉”，把四百名新生的每一个人的生日看作一个“苹果”，由于“苹果”数目多于“抽屉”数目，根据抽屉原则，一定有一个“抽屉”里至少有两个“苹果”。也就是说，至少有两个同学的生日相同。再根据同学们的年龄相差不到一周岁，所以这两个同学一定是同年、同月、同日出生的。

2. 属相一共有 12 种，我们把 12 种属相看作 12 个“抽屉”，而把 13 名学生当作 13 个“苹果”，当“苹果”放入“抽屉”后，根据抽屉原则，有一个“抽屉”里至少放了两个“苹果”，也就是说至少有两个人属相相同。

　　应该注意的是。运用抽屉原则解题，一定要恰当地选好“抽屉”和“苹果”。

3. 把 40 名学生当作 40 个“抽屉”，而把书当作“苹果”，根据抽屉原则，“苹果”数目要比“抽屉”数目大，才能保证至少有一个“抽屉”里有两个或两个以上的“苹果”。因此，小书架上至少应有 41 本书

4.四种花色的牌中任取两张，若牌的花色相同有 4 钟取法，牌的花色不同则有 6 种取法，将这 10 钟取法当作“抽屉”，每个人当作“苹果”，根据抽屉原则，至少有一个抽屉放两个“苹果”，则 10 个抽屉需要 11 个“苹果”，也就是至少要 11 个人。

5.因为要两双筷子颜色不一样，考虑最坏的情况，一种颜色的筷子取完，这时此种颜色的筷子已取 8 根，剩下的两种颜色的筷子再取 3 根就能再有另一种颜色

的筷子一双，因此要取 11 根筷子才能达到要求。

6.三棵树到起点的距离分别是a_1,a_2,a_3，由题意知，这三个数均为整数，则不是奇数就是偶数，其中必有两个数奇偶性相同。则到起点的距离奇偶性相同的两棵树之间的距离是偶数。

7.不能。每行每列每条对角线都有八个格子，则最小的和是$1\times 8=8$，最大的和是$3\times 8=24$，8～24（包括 8 和 24）共有 17 个整数，而 8 行 8 列加上两条对角线一共有 18 个和，所以必有两个和是一样的。

8.n 个代表握手次数最多为 n-1 次

如果有一个代表握握手次为$n-1$次，即他与其他各位都握过手。因此，握手的最少次数应为 1；如果有一个代表握手次数确为 0，那么握手的最多次数应为$n-2$。无论哪一种情况，握手次数都只有$n-1$种。把每一种次数看作一个“抽屉”，现在只有$n-1$个“抽屉”了，再把 n 个代表看作 n 个“苹果”。根据抽屉原则，至少有两个人属同一“抽屉”，这两个人握手次数一样多。

9. 抽屉原则可有各种变化形式，其中较常用的是

抽屉原则 2，如果把多于$m\times n$个“苹果”按任一确定的方式分放到 n 个“抽屉”中去，那么一定有一个“抽屉”中至少有$m+1$个“苹果”。

这里，我们可把 40 名学生当作 40 个“抽屉”，图书当作“苹果”，由于图书数为 201，而$201=5\times 40+1$，根据抽屉原则 2，一定有一个“抽屉”里至少放了$5+1=6$个“苹果”。也就是说，一定有一个学生至少借了 6 本图书。

10. 把红色、黄色、绿色三种颜色看作三个“抽屉”，把取出的球看作“苹果”。要保证有五个球的颜色相同，也就是要保证有一个“抽屉”里有五个“苹果”。根据抽屉原则 2，取出的球应多于4×3个。即至少应取出 13 个球，才能保证其中有五个球的颜色相同。

11. （1）为了保证 4 张牌花色相同，我们应从最坏的情况去分析，假定先抽出两张王牌。把四种花色看作 4 个“抽屉”，把一张扑克牌看作一个“苹果”，根据抽屉原则 2，要想有 4 张属于同一花色，至少抽出$3\times 4+1=13$张牌。综合上述分析，至少抽出$13+2=15$张牌，才能保证其中有 4 张花色相同。

（2）因为每种花色有 13 张牌，若考虑最不利的情况，即抽出了 2 张王牌及三种花色的所有牌共计$13\times 3+2=41$张牌。这时，只需再抽取一次，即共抽出 42 张牌，就保证四种花色的牌都有了。

（3）最不利的情况是先抽出了 2 张王牌及方块、黑桃、梅花三种花色所有

的牌，共计 41 张，只剩下红桃牌，这时只需再抽出 4 张，就保证有 4 张红桃了。即至少抽出 45 张牌，才能保证其中至少有 4 张红桃。

12. 在运用抽屉原则解题时，有时“抽屉”和“苹果”往往不能一下找出来，需要根据题中的条件运用一些方法构造出“抽屉”来。这时，构造“抽屉”就成了运用抽屉原则解题的关键。

这里，将所给的 34 个数分成如下 18 个不相交的数组：

{4,100}，{7,97}，…，{49,55}，{1}，{52}把每一数组看作一个“抽屉”。当任意取出 20 个整数时，若取到 1 和 52，则剩下的 18 个数一定取在前 16 个“抽屉”。考虑到前 16 个“抽屉”中每个“抽屉”只包含两个数，因此至少有 4 个数取自某两个“抽屉”。若 1 和 52 没有全被取出，则有多于 18 个数取自前 16 个“抽屉”，同样至少有 4 个数取自某两个“抽屉”，前面 16 个“抽屉”中任一“抽屉”的两数之和为 104。

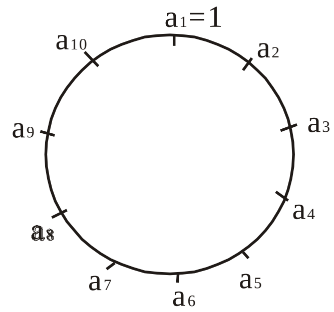
13. 首先应弄清楚一共有多少种不同的游览情况，并把它们表示出来。为此，设某人浏览某处记作“1”，没去某处记作“0”，并用序数$\{a, b, c\}$表示某人游览的情况。$a = 1$表示去了故宫，$a = 0$表示没去故宫；$b = 1$表示去了景山，$b = 0$表示没去景山；$c = 1$表示去了北海，$c = 0$表示没去北海。例如，{1,0,1}表示某人游览了故宫和北海公园，而没去景山公园。由于每人必须去一处，且最多只能去两处，所以游览的不同情况共有以下六种：

{1,1,0}，{1,0,1}，{0,1,1}，

{1,0,0}，{0,1,0}，{0,0,1}。这样，我们可以把六种情况看作 6 个“抽屉”，由于$1987 = 331 \times 6 + 1$，根据抽屉原则 2，至少有 332 人浏览的地方相同。

注意：这里规定了“每人必须去一处，最多去两处游览”。如果没有这种限制，那么有多少种不同的游览情况？至少有几个人游览的地方完全相同？留给读者当作练习。

14. 也许有人认为，用这个摆试的办法，就能得出这一结论。但是，你知道吗？用这十个自然数在一个圆圈上以不同顺序摆放共有几十万种摆法，这说明采用这种方法是不可取的。这一问题运用抽屉原则来解决？



无论以怎样的顺序吧 1，2，…，10 这十个自然数摆成一圈，总能找到 1 所在的位置（如图），然后按顺时针方向，把其它数依次表示为a_2，a_3，…，a_{10}。对于任意一种摆放顺序，

都把以上九个数分成以下三组：

$(a_2，a_3，a_4)$，$(a_5，a_6，a_7)$，（$a_8，a_9，a_{10}$）。把这三组数看作 3 个“抽屉”，又根据加法的交换律，结合律，可以得到下面的等式：

$$(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+(a_8+a_9+a_{10})$$
$$=2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$$

而$54=17\times3+3$。根据抽屉原则 2，一定有一个抽屉中三数之和大于 17，它们恰好是位置相邻的三个数。

15. 根据题目的要求，应考虑按照在同一“抽屉”中，任意两数都具有倍数关系的原则来构建“抽屉”，把这 20 个数分成以下十组：

{1,2,4,8,16}，{3,6,12}，{5,10,20}，

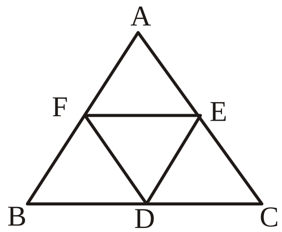
{7,14}，{9,18}，{11}，{13}，{15}，{17}，{19}。

从这 10 个数组的 20 个数中任取 11 个数，根据抽屉原则，至少有两个数取自同一“抽屉”。由于，凡在同一“抽屉”中的两个数都具有倍数关系，所以这两个数中，其中一个数一定是另一个数的倍数。

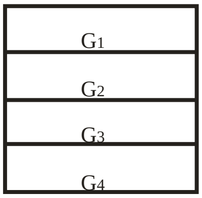
16. 我们把五堆石子数看作任意五个自然数，它们被 4 除，其余数不外乎是 0，1，2，3，四种可能。如果把每一种余数看作一个“抽屉”，那么余数相同的两个数就在同一“抽屉”里。根据抽屉原则，五个自然数被 4 除后必有两数的余数是相同的，显然这两数之差是 4 的倍数。因此，上面的结论是正确的。

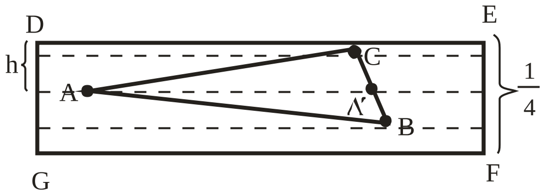
用模 n 的剩余类构造“抽屉”的方法，也是一种常用的方法。

17. 如图，等边三角形 ABC 三边中点为 D、E、F，这样 DE、EF、FD，把边长为 1 的等边三角形分割成四个边长为$\frac{1}{2}$的等边三角形。如果规定线段 DE，EF，FD 上的点是属于ΔDEF的，那么ΔABC内的所有点被划分为四个不相交的区域。把每个区域看作一个“抽屉”，在ΔABC内任意画五个点，根据抽屉原则，必有两个点在同一“抽屉”中，也就是一定有一个边长为$\frac{1}{2}$的等边三角形，其中包含两个点。显然，它们的距离不超过$\frac{1}{2}$。



18. 如图，将边长为 1 的正方形等分成四个面积都为$\frac{1}{4}$的矩形G_1，G_2，G_3，G_4，在正方形内任意放入九个点，由于$9>2\times4$，根据抽屉原则 2，一定有一个矩形内含至少含三个点。只要证明以这三个点为顶点的三角形面积不大于小矩形面积的一半就行了。下面来证明这一结论。



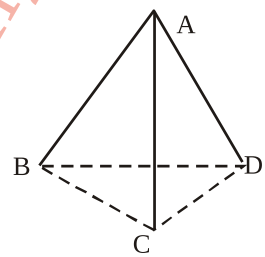


设一个小矩形内有三个点 A、B、C，如果这三个点在一直线上，结论显然是对的。如果 A、B、C 三点不在一直线上，如图过 A、B、C 三点分别作矩形长边的平行线。设过 A 的平行线交 BC 与A'，A 到 DE 的距离为 $h(0\le h\le \frac{1}{4})$，A 到 FG 的距离为$\frac{1}{4}-h$，于是ΔABC的面积

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AA'C}+S_{AA'B}$$
$$\le \frac{1}{2}\times 1\times h+\frac{1}{2}\times 1\times (\frac{1}{4}-h)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}。$$

本题构造“抽屉”的方法不是唯一的。请你再找出一种构造“抽屉”的方法来。但要注意：如果用两条对角线把正方形分成四个全等的小三角形是不可行的。可见，恰当地构造“抽屉”，是应用抽屉原则解题的关键。

19. 为了表示六个人之间的相互认识或不认识的关系，我们用空间的六个点代表六个人。如果某两个相互认识，那么连结表示这两个人的点的线段染成红色；如果两人不认识，那么相应的线段就染成蓝色。这样，六个人的聚会问题，就可以换一种说法：空间有六个点 A、B、C、D、E、F，其中没有三点共线，如果把每两点间的连线染上红色或蓝色，不管如何染法，总有一个三边是同一颜色的三角形。现考察从某一点 A 出发的五条线段，由于它们不是染红色就是染蓝色。把每种颜色看作一个“抽屉”，根据抽屉原则，其中至少有三条线段染了相同的颜色，不妨设为红色（图中实线所示）。假定 A 点沿此三条红线段与 B、C、D 连结，并且虚线表示连结 B、C、D 的三条线段。如果有一条虚线染的是红色，那么它与两条线段（红色）组成了一个全红的三角形；如果三条虚线全是蓝色的，那么ΔBCD就是一个全蓝的三角形。这样问题就得到了证明。

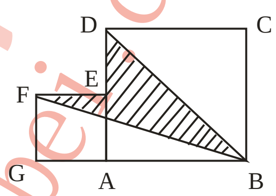


20. 先看第一行的 7 个小方格，因为只染两种颜色，根据抽屉原则，必有一种颜色染了至少 4 个小方格，不妨设，第一行有 4 个红方格。再看第二行，在第

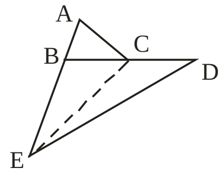
一行的 4 个红方格下面的 4 个小方格中，如果有两个红色的，那么结论已经成立。否则，必有 3 个黄方格。接着看第三行，在第二行 3 个黄方格下面的 3 个小方格中，至少有 2 个方格染同一种颜色。若染的是红色，就与第一行组成符合条件的长方形；若染黄色就与第二行组成符合条件的长方形。

第九章 面积计算

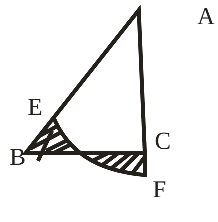
1. 图是由正方形 ABCD 和 AEFG 组成$AB = 8$厘米，$AE = 4$厘米，求阴影部分面积。



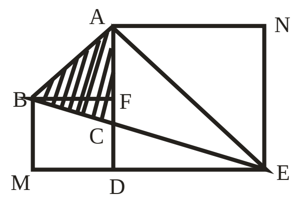
2. 已知ΔABC的面积为 1，$BE = 2AB$，$BC = CD$,求ΔBDE的面积。



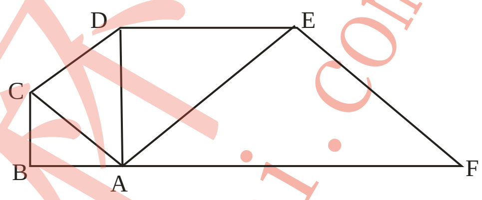
3. 如右图。已知在ΔABC中，$\angle C = 90°$，$AC = BC = 10$厘米，以 A 为圆心，EF 为圆弧组成的扇形使阴影部分甲与阴影部分乙的面积相等。求扇形所在的圆的面积。



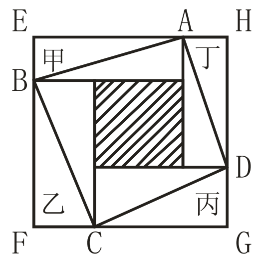
4. 如右图，BFDM 和 ADEN 都是正方形，已知ΔCDE的面积是 6 平方厘米，求ΔABC的面积。



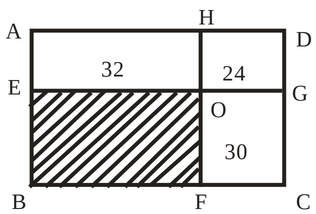
5. 如右图，已知ΔABC，ΔACD，ΔADE，ΔAEF都是等腰直角三角形，且$AB = 2$，求多边形 ABCDEF 的面积。



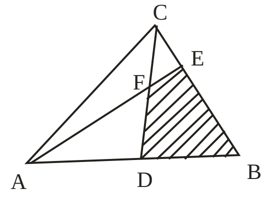
6. 如右下图用甲乙丙丁四个长方形拼成正方形 EFGH，中间阴影为正方形。已知甲乙丙丁四个长方形的面积和是 32 平方厘米，四边形 ABCD 的面积是 20 平方厘米，求甲乙丙丁四个长方形周长的和。



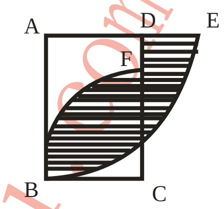
7. 如右下图，一个长方形被分成四个小长方形，其中三个长方形的面积分别是 24、30、32，求阴影部分的面积。



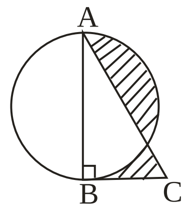
8. 已知ΔABC的面积是 1 平方厘米，且$BE = 2EC$，F 是 CD 的中点，求阴影部分面积。



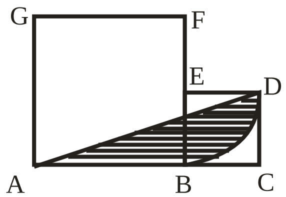
9. 已知，在矩形 ABCD 中，$AB = 6$ 厘米，$BC = 4$ 厘米，扇形 ABE 的半径，$AE = 6$ 厘米，扇形 CBF 的半径$CB = 4$ 厘米，求图中阴影部分面积。



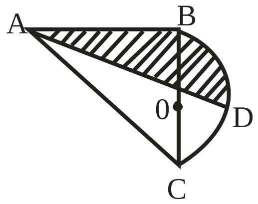
10. 在ΔABC中；$\angle B = 90°$，$AB = 20$ 厘米，以 AB 为直径画圆。如果阴影（Ⅰ）的面积比阴影（Ⅱ）的面积大 7 平方厘米，求 BC 的长度。



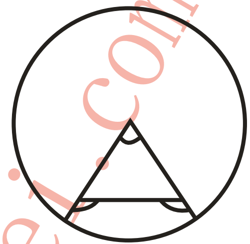
11. 如图，已知正方形 ABFG 的边长为 10 厘米，正方形 BCDE 的面积为 6 平方厘米。以 E 为圆心，ED 为半径在正方形 BCDE 内画弧并连结 AD，求阴影部分的面积。



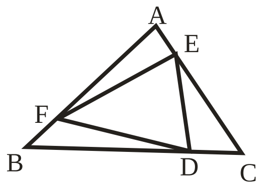
12. 已知，在ΔABC中 $AB = BC = 10$，$\angle B = 90°$，以 BC 为直径画半圆，D 是半圆上的中点，求图中阴影部分的面积。



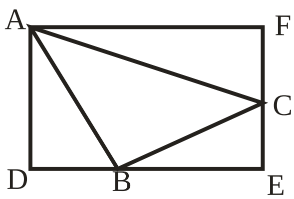
13. 草原上有一等边三角形建筑物，边长 4 米，一只羊被拴在建筑物的一个角上。（如图），已知所系绳长为 5 米，问这只羊能吃到草的总面积最多是多少？



14. 如图，已知$AE = \frac{1}{5}AC$，$CD = \frac{1}{4}BC$，$BF = \frac{1}{6}AB$，求ΔDEF与ΔABC的面积的比。

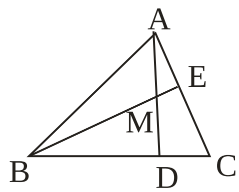


15. 已知长方形 ADEF 的面积是 16，ΔADB的面积是 3，ΔACF的面积是 4，求ΔABC的面积。

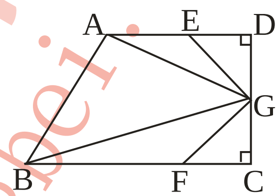


16. 已知：在ΔABC中$AE = EC$，$S_{\Delta ABD}:S_{\Delta ACD} = 7:3$，$S_{\Delta ABM} = 70$平方厘米，求

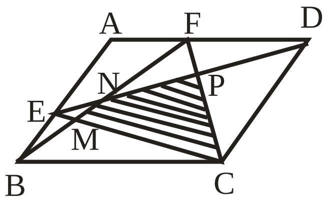
四边形，CDME 的面积。



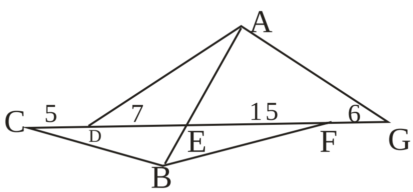
17. 已知四边形 ABCD 是直角梯形，上底$AD = 8$厘米，下底$BC = 10$厘米，直角腰$CD = 6$厘米，E 是 AD 的中点，F 是 BC 上的点，$BF = \frac{2}{3}BC$，G 为 DC 上的点，ΔDEG的面积与ΔCFG的面积相等，求ΔABG的面积。



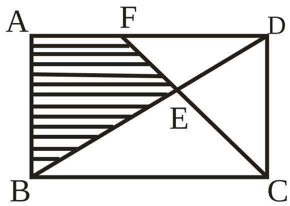
18. 已知：在▱ABCD 中，E、F 分别为 AB 和 AD 上的点，且ΔMBE的面积为 13，ΔPFD的面积为 35，四边形 AENF 的面积为 49，求阴影部分的面积。



19. 如图，已知$CD = 5$，$DE = 7$，$EF = 15$，$FG = 6$。直线 AB 将图形分成两部分，左边面积是 53，右半部分面积是 110，求ΔADG的面积。



20. 已知：在矩形 ABCD 中，ΔEFD的面积为 4，ΔECD的面积为 6，求阴影部分的面积。



分析解答

1. 阴影部分的面积等于两个正方形面积的和减去空白部分两个直角三角形的面积。

$$S_{ABCD}+S_{AEFG}=8^2+4^2=64+16=80\text{（平方厘米）}$$

$$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32\text{（平方厘米）}$$

$$S_{\Delta BFG}=\frac{1}{2}\times 4(4+8)=24\text{（平方厘米）}$$

$$S_{阴影}=80-32-24=24\text{（平方厘米）}$$

2. 如图 2，连结 CE，在ΔABC和ΔEBC中，$BE=2AB$，且它们在 BE 边和 AB 边上的高相同，由$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ah$ 知$S_{\Delta EBC}=2S_{\Delta ABC}=2$。

在ΔBCE 和ΔDCE 中，$BC=CD$，且它们在 BC 边和 CD 边上的高相同，因此有

$S_{\Delta BCE}=S_{\Delta DCE}=2$。

所以$S_{\Delta BDE}=S_{\Delta BCE}+S_{\Delta DCE}=4$。

3. 由$S_{甲}=S_{乙}$，知$S_{扇形}=S_{ABC}$。

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 10\times 10=50\text{（平方厘米）}$$

$$S_{扇形}=50\text{（平方厘米）}$$

已知 $AB=AC$，$\angle C=90°$得$\angle A=\angle B=45°$，$360°\div 45°=8$， 即

$S_{扇形}=\frac{1}{8}S_{圆}$，$S_{圆}=8S_{扇形}$。

所以，扇形所在圆的面积是

$50\times8=400$（平方厘米）。

4. 设正方形 BMDF 的边长为 a 厘米，正方形 ADEN 的边长为 b 厘米，则三角形 BEM 的面积为

$S_{\Delta BEM}=\frac{1}{2}\times ME\times BM=\frac{1}{2}$（a + b）$\times a$

梯形 ABMD 的面积为

$S_{梯形\Delta ABMD}=\frac{1}{2}\times(BM+AD)\times MD=\frac{1}{2}$（a + b）$\times a$

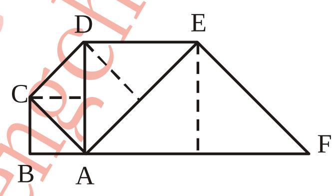
所以$S_{\Delta BEM}=S_{梯形\ ABMD}$

又$S_{\Delta CDE}=S_{\Delta BEM}-S_{梯形\ CDMB}$

$S_{\Delta ABC}=S_{梯形\ ABMD}-S_{梯形\ CDMB}$

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CDE}=6$（平方厘米）。

5. 因为ΔABC，ΔACD，ΔADE，ΔAEF都是等腰直角三角形，且$AB=2$。如图加辅助线，则$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，并且有



$S_{\Delta ACD}=2S_{\Delta ABC}=2\times2=4$，

$S_{\Delta ADE}=2S_{\Delta ACD}=2\times4=8$，

$S_{\Delta AFE}=2S_{\Delta ADE}=2\times8=16$。

所以多边形 ABCDEF 的面积为：

$S=2+4+8+16=30$。

6. 由$S_{EFGH}=S_{ABCD}+\frac{1}{2}$（$S_{甲}+S_{乙}+S_{丙}+S_{丁}$）

$=20+\frac{1}{2}\times32$

$=36$（平方厘米）

得正方形 EFGH 的边长为 6 厘米，其周长$L_{EFGH}=4\times6=24$（厘米）。

又$L_{EFGH}=\frac{1}{2}$（$L_{甲}+L_{乙}+L_{丙}+L_{丁}$）

$\therefore L_{甲}+L_{乙}+L_{丙}+L_{丁}=2L_{EFGH}=48$（厘米）。

答：甲、乙、丙、丁四个长方形周长的总和是 48 厘米。

7. 因为阴影部分也是一个长方形，所以只要求出它的长乘宽就行了。

设$EO = a$，$FO = b$，$GO = c$，$HO = d$，则

$a \times d = 32$，$b \times c = 30$，$c \times d = 24$。

$\therefore (a \times d) \times (b \times c) = 32 \times 30$。

而$(a \times d) \times (b \times c) = (a \times b) \times (c \times d)$

$= (a \times b) \times 24$

$\therefore a \times b = 32 \times 30 \div 24 = 40$

答：阴影部分的面积是 40。

8. $\because S_{\Delta ABE} = \frac{2}{3}$(平方厘米)，$S_{\Delta ACE} = \frac{1}{3}$(平方厘米)，且$S_{\Delta ACF} = S_{\Delta ADF}$，$S\Delta BCF = S_{\Delta BDF}$

$\therefore S_{\Delta ACF} + S_{\Delta BCF} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$（平方厘米）

$\therefore S_{\Delta BEF} = (S_{\Delta ACF} + S_{\Delta BCF}) - S_{\Delta ACE}$）

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$（平方厘米）

又$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$（平方厘米）

$\therefore S_{\Delta BDF} = S_{\Delta BCF} = S_{BEF} + S_{\Delta CEF}$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$（平方厘米）。

故$S_{阴影} = S_{\Delta BDF} + S_{\Delta BEF}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$（平方厘米）。

9. $S_{阴影} = S_{扇形\ ABE} + S_{扇形\ CBF} - S_{矩形\ ABCD} = \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 - 6 \times 4$

$= \frac{1}{4} \times \pi \times (36 + 16) - 24$

$= 13\pi - 24 = 13 \times 3.14 - 24 = 16.82$（平方厘米）。

10. 已知阴影（Ⅰ）的面积比阴影（Ⅱ）的面积大 7 平方厘米，就是半圆的面积比ΔABC的面积大 7 平方厘米。半圆的直径是已知的。

$S_{半圆} = \frac{1}{2}\pi \times 10^2 = 50\pi$，

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times 20\times BC=10\times BC。$$

$10\times BC=50\pi-7$，$BC=\frac{50\pi-7}{10}$

$BC=\frac{50\times 3.14-7}{10}=\frac{157-7}{10}=15$（厘米）。

11. 图中阴影部的面积等于边长 16 厘米，高为 6 厘米的直角三角形的面积减去（Ⅰ）的面积。而（Ⅰ）的面积等于正方形 BCDE 的面积减去扇形 EBD 的面积。

$$S_{阴影}=S_{\Delta ACD}-（S_{正方形\,BCDE}-S_{扇形\,EBD}）$$

$$=\frac{1}{2}\times（10+6）\times 6$$

$$-（6\times 6-\frac{1}{4}\times\pi\times 6^2）$$

$$\approx 48-7.74=40.26（平方厘米）。$$

12. 以 AC 为斜边作等腰直角ΔACE，则 ABCE 为正方形。连结 DE，如图可知阴影部分的面积等于正方形面积加半圆面积的总和与ΔADE面积的差的一半。即

$$S_{阴影}=\frac{1}{2}（S_{正方形\,ABCE}+S_{半圆}-S_{\Delta ADE}）$$

$$S_{正方形}=10\times 10=100，$$

$$S_{半圆}=\frac{1}{2}\times\pi\times 5^2=\frac{25}{2}\times\pi，$$

$$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\times 10\times(10+5)=75。$$

$$\therefore S_{阴影}=\frac{1}{2}\times（100+12.5\times 3.14-75）$$

$$=\frac{1}{2}\times（25+39.25）$$

$$=\frac{1}{2}\times 64.25=32.125。$$

13. 羊能吃到草的总面积为（如图）：

$$\frac{5}{6}S_{大圆}+2\times\frac{1}{3}S_{小圆}$$

其中大圆半径为$R=5$米，小圆半径为$r=(5-4)=1$米。

$$\frac{5}{6}S_{大圆}+\frac{2}{3}S_{小圆}=\frac{5}{6}\times\pi\times 5^2+\frac{2}{3}\times\pi\times 1^2$$

$$=\frac{129}{6}\pi\approx 67.51（平方米）。$$

答：羊能吃到草的总面积为 67.51 平方米。

14. 连结 AD，因为等高的两个三角形的面积之比等于它们底边之比，且$CD=\frac{1}{4}BC$，所以$S_{\Delta ACD}:S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}$；即$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$。同理，由$AE=\frac{1}{5}AC$得$S_{\Delta CDE}:S_{\Delta ACD}=\frac{4}{5}$，即$S_{\Delta CDE}=\frac{4}{5}S_{\Delta ACD}$，故$S_{\Delta CDE}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{5}S_{\Delta ABC}$。

若连结 BE、CF，同理可证：

$S_{\Delta BDF}=\frac{1}{8}S_{\Delta ABC}$，$S_{\Delta AEF}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$。

设$S_{\Delta ABC}=a(a>0)$，则

$$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{a-\frac{1}{5}a-\frac{1}{6}a-\frac{1}{8}a}{a}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}{1}=\frac{61}{120}。$$

15. 连结 AE，则ΔACE的面积是

$16\div2-4=4$。故$S_{\Delta ACF}=S_{\Delta ACE}$，又因$\Delta ACF$和$\Delta ACE$有相同的高，故$CF=CE$。

同理，ΔABE的面积是$16\div2-3=5$，所以$\frac{BD}{BE}=\frac{3}{5}$，即$BE=\frac{5}{8}DE=\frac{5}{8}AF$。

又因为ΔBCE与ΔACF有相同的高。（$CE=CF$），所以ΔBCE的面积是ΔACF面积的$\frac{5}{8}$。　即$S_{\Delta BCE}=\frac{5}{8}S_{\Delta ACF}=\frac{5}{8}\times4=2.5$。

$\therefore S_{\Delta ABC}=16-(3+4+2.5)=6.5$。

16. 由已知$AE=EC$，可得$S_{\Delta ABE}=S\Delta CBE$，$S_{\Delta AME}=S_{\Delta CME}$，所以$S_{\Delta ABE}-S_{\Delta AME}=S_{\Delta CBE}-S_{\Delta CME}$，即$S_{\Delta ABM}=S_{\Delta CBM}$.

又$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{7}{3}=\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\Delta BDM}}{S_{\Delta CDM}}$。

令　$S_{\Delta BDM}=7x$，则$S_{\Delta CDM}=3x(x>0)$，得$S_{\Delta BDM}+S_{\Delta CDM}=S_{\Delta CBM}=S_{\Delta ABM}=70$，即$7x+3x=70$，$x=7$。

$\because S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta DBM}=70+7x=70+49=119$

$\therefore \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}}=\frac{10}{7}=\frac{S_{\Delta ABC}}{119}$，$S_{\Delta ABC}=170$。

$\therefore S_{四边形CDME}=S_{\Delta BCE}-S_{\Delta DBM}$

$=\dfrac{170}{2}-49=85-49$

$=36$（平方厘米）

17. 由题意可知：$\dfrac{1}{2}\times ED\times DG=\dfrac{1}{2}\times CG\times FC\Rightarrow\dfrac{ED}{FC}=\dfrac{CG}{DG}$。

又 $FC=10\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{10}{3}$（厘米），$ED=4$厘米。

$\therefore\dfrac{ED}{FC}=\dfrac{4}{\frac{10}{3}}=4\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow\dfrac{CG}{DG}=\dfrac{6}{5}$。故 $DG=6\div(1+\dfrac{6}{5})=2\dfrac{8}{11}$（厘米）。

$CG=6-2\dfrac{8}{11}=3\dfrac{3}{11}$（厘米）。

$S_{\Delta ADG}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 2\dfrac{8}{11}=10\dfrac{10}{11}$（平方厘米）。

$S_{\Delta BCG}=\dfrac{1}{2}\times 10\times 3\dfrac{3}{11}=16\dfrac{4}{11}$（平方厘米）。

$S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}\times(8+10)\times 6=54$（平方厘米）。

$\therefore\Delta ABG$ 的面积是

$54-10\dfrac{10}{11}-16\dfrac{4}{11}=26\dfrac{8}{11}$（平方厘米）。

18. 易知$S_{\Delta FBC}=S_{\square ABCD}$ 又$S_{\Delta ECD}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$，所以$S_{\Delta BCE}+S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$。

设$S_{阴影}=x$，则

由（1）得$S_{\Delta FNP}+x+S_{\Delta MBC}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$，

由（2）得$13+S_{\Delta MBC}+49+S_{\Delta FNP}+35=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$。

$\therefore S_{\Delta FNP}+x+S_{\Delta MBC}=13+S_{\Delta MBC}+49+S_{\Delta FNP}+35$，

$\therefore x=13+49+35=97$

即 $S_{阴影}=97$。

19. 设$S_{\Delta ADE}=x$，$S_{\Delta BEC}=y$，则$S_{\Delta AEG}=3x$，$S_{\Delta BEF}=\dfrac{15}{12}S_{\Delta BEC}=\dfrac{5}{4}y$。

由题意得：

$$\begin{cases} x+y=53 & (1) \\ 3x+\frac{5}{4}y=110 & (2) \end{cases}$$

由（1）得$y=53-x$　　　　（3）

（3）代入（2）得$3x+\frac{5}{4}\times(53-x)=110$，

解得$x=25$，$S_{\Delta ADE}=25$。

所以$S_{\Delta ADG}=4S_{\Delta ADE}=4\times25=100$。

20. 连结 BF，则$S_{\Delta BFD}=S_{\Delta CFD}$。又$S_{\Delta BEF}=S_{\Delta BFD}-S_{\Delta EFD}$，$S_{\Delta ECD}=S_{\Delta CFD}-S_{\Delta EFD}$。

故$S_{\Delta BEF}=S_{\Delta ECD}=6$。

由$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta BEF}}=\frac{EC}{EF}=\frac{S_{\Delta ECD}}{S_{\Delta EFD}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，可得：

$S_{\Delta BCE}=\frac{3}{2}\times S_{\Delta BEF}=\frac{3}{2}\times6=9$。

于是$S_{\Delta BCD}=S_{\Delta BCE}+S_{\Delta ECD}=9+6=15$，又$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$。所以

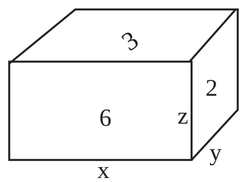
$S_{阴影}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta EFD}=S_{\Delta BCD}-S_{\Delta EFD}$

$=15-4=11$。

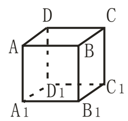
第十章　表面积与体积计算

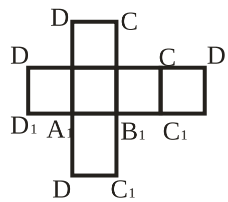
1. 一个长方体的长是宽的 1.5 倍，宽是高的 2 倍，棱长总和为 96 厘米，求它的体积。

2. 长方体的三个侧面积分别为 2、3、6 求长方体的体积。



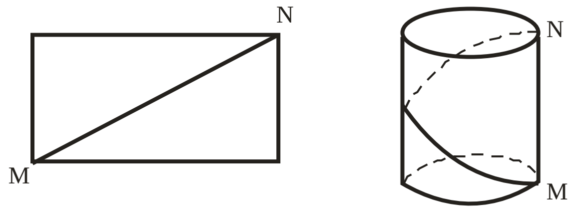
3. 已知正方体如图，一个小虫从顶点A_1出发沿正方体表面爬到顶点 C，沿什么样路线走距离最短？（请在展开图上表示出来）



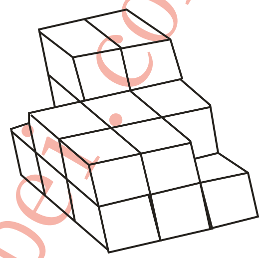


4. 如图，M、N 是圆柱体的同一条母线上且位于上、下底面上的两点，若从 M 点

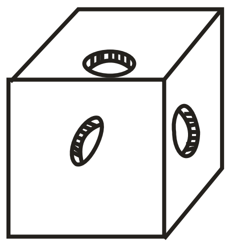
绕圆柱体的侧面到达 N，应沿怎样的路线路程最短？



5. 右下图是由 18 个棱长为 1 厘米的小正方体拼成的几何图，求该几何体的表面积。

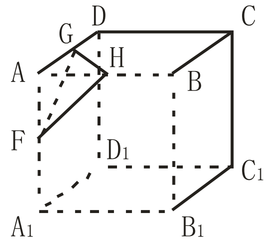


6. 如右下图是一棱长为 4 厘米的正方体，在它的各个面的中心位置上，各打一个直径为 2 厘米，深为 1 厘米的圆柱形孔，求打孔后几何体的表面积。



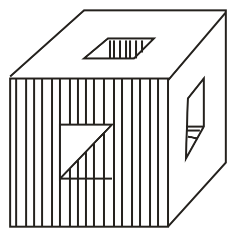
7. 已知横截面 2 分米的一根圆木。截成两段后，两段的表面积之和为 75.36 平方分米，求原圆木的体积。（π 取 3.14）

8. 已知：在正方体中、H、G、F 分别是棱 AB、AD、AA_1的中点，现在沿ΔGFH所在平面锯掉一个角，求锯掉的这块的体积是原正方体体积的几分之几？



9. 一块方木料，横截面是正方形，这个正方形的边长为 1.8 分米，木料长 5 分米。现在要把它加工成尽可能大的圆柱体，求这块木料的利用率？（π 取 3.14）

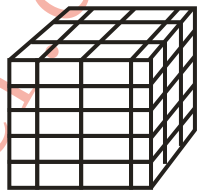
10. 在边长为 3 的正方体木块的每个面的中心打一个直穿木块的洞，洞口边长为 1 的正方形，求挖洞后木块体积和表面积。



11. 将一个长 9 厘米，宽 8 厘米，高 3 厘米的长方体锯成若干个小正方体（损耗不计），然后拼成一个大正方体，求这个大正方体的表面积。

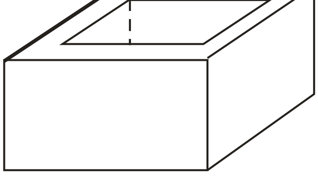
12. 将表面积为 54、96、150 平方厘米的三个铁质正方体熔成一个大正方体（不计损耗）求这个大正方体的表面积。

13. 一个正方体形状的木块，棱长 1 米，沿水平方向将它锯成 3 片，每片又锯成 4 长条，每长条又锯成 5 小块，共得到大大小小的长方体 60 块（如图）这 60 块长方体表面积之和是多少平方米？



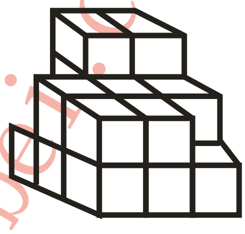
14. 把一块长 19 厘米，宽 5 厘米，高 3 厘米的长方体铝块和一棱长为 7 厘米的正方体铝块熔铸成一个地面周长为 31.4 厘米的圆柱形铝块，求铝块的高是多少厘米？

15. 如图，一个无盖木盒，从外边量长 10 厘米，宽 8 厘米，高 5 厘米。做这个木盒至少需用 1 厘米厚的木板多少平方厘米？这个木盒的容积是多少立方厘米？



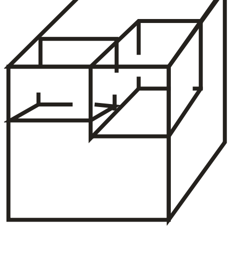
16. 一块长 32 厘米的长方形铁皮，四角各剪去边长为 4 厘米的正方形后做成无盖铁盒。已知铁盒的容积是 1920 立方厘米，求这块铁皮的面积。

17. 用棱长为 1 厘米的正方体 2100 个堆成一个实心的长方体，它的高为 10 厘米，长和宽都大于高，求它们的长和宽各是多少厘米？

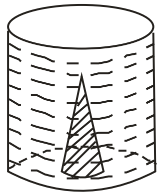


18. 在一个长 24 分米，宽 9 分米，高 8 分米的水槽中注入 4 分米深的水，然后放一个棱长为 6 分米的正方体铁块，问水位上升了多少？

19. 已知一个棱长 15 厘米的正方体木块，现从它的八个顶点处截去棱长分别是 1、2、3、4、5、6、7、8 的小正方体，这个木块剩下部分的表面积最少是多少？



20. 如图是一个底面直径为 20 厘米，并装有一部分水的圆柱形塑料桶，水中放着一个底面直径为 6 厘米，高 20 厘米的一个圆锥体铅锤，当铅锤从水中取出后，杯里的水下降几厘米？（π 取 3.14）



分析解答

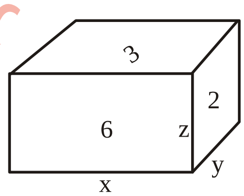
1. 只需求出该长方体的长、宽、高。设高为 x 厘米，则宽为 2x 厘米，长为 $1.5\times 2x=3x$（厘米），根据题意得：

$$4\times(3x+2x+x)=96,$$
$$24x=96,$$
$$x=4。$$
$$\therefore 2x=8，3x=12$$
$$4\times 8\times 12=384$$

答：长方体的体积为 384 立方厘米。

2. 设长方体的交于一点的三个棱长分别为 x，y，z，

则有：
$$\begin{cases} xy=3 & ① \\ yz=2 & ② \\ xz=6 & ③ \end{cases}$$



①×②×③得（xyz）$^2=36\Rightarrow xyz=6$

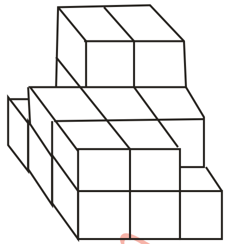
即长方体的体积为 6。

3. 因为两点间线段最短，如图，最短路线为线段A_1C（经过 AB 的中点），或线段A_1C（经过B_1B的中点）。

4. 沿圆柱体的母线 MN 将圆柱体的侧面剪开铺平，得出圆柱的侧面展开图，从 M 点绕侧面到达 N 点就是从侧面展开图的长方形的一个顶点 M 到达不相邻的另一个顶点 N。因两点间线段的长度最短，所以最短路线就是侧面展开图中长方

形的一条对角线。

5. 从图中看出：18 个小正方体共摆了三层，第一层 2 个，第二层 7 个，第三层摆了$18-2-7=9$（个）。又上、下两个面的表面积相同；前后两个面的表面积相同；左、右两个面的表面积相同。小正方体的棱长都是 1 厘米，所以有：



上面的表面积为$1^2\times 9=9$（平方厘米）。

前面的表面积为$1^2\times 8=8$（平方厘米）。

左面的表面积为$1^2\times 7=7$（平方厘米）。

该几何体的表面积为

$9\times 2+8\times 2+7\times 2=48$（平方厘米）。

6. 因为正方体的棱长为 4 厘米，孔深 1 厘米，所以正方体未被打通。这样，打孔后的几何体的表面积等于原来正方体的表面积加上 6 个相同的圆柱的侧面积，这 6 个圆柱的高为 1 厘米，底面半径也是 1 厘米。

正方体的表面积为

$4^2\times 6=96$（平方厘米）。

一个圆柱的侧面积为

$2\pi\times 1\times 1=6.28$（平方厘米）

几何体的表面积为

$96+6.28\times 6=133.68$（平方厘米）。

7. 截成两段后，两段长之和等于原长，底面积由两个变成四个。假设原圆木长为 x 分米，则

$$2\pi\times\frac{2}{2}\times x+4\pi\times\left(\frac{2}{2}\right)^2=75.36$$

$$2\pi x+4\pi=75.36$$

$$x=\frac{75.36-4\pi}{2\pi}$$

$$x\approx\frac{75.36-4\times 3.14}{2\times 3.14}=10$$

圆木的体积为

$\pi\times\left(\frac{2}{2}\right)^2\times 10\approx 31.4$（立方分米）。

答：原圆木的体积约为 31.4 立方分米。

8. 设正方体的棱长为 a，则正方体的体积为a^3。

锯掉的一角是一个三棱锥，它以ΔAGF为底面，H 为顶点，高为$HA=\frac{1}{2}a$。

因此三棱锥的体积为：

$1/3\times(1/2\times 1/2\ a\times 1/2\ a)\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{48}a^3$。

$\frac{1}{48}a^3\div a^3=\frac{1}{48}$

答：锯掉的一角的体积是正方体体积的$\frac{1}{48}$。

9. 要使加工成的圆柱体尽可能大，必须使圆柱的底面直径为正方形的边长 1.8 分米，高为 5 分米，其体积为$\pi\times(0.9)^2\times 5$（立方分米）。

$$\frac{\pi\times(0.9)^2\times 5}{1.8^2\times 5}=\frac{3.14\times 0.9\times 0.9}{1.8\times 1.8}=\frac{3.14}{4}=78.5\%$$

答：利用率是 78.5%

10. （1）原来木块的体积为$3\times 3\times 3=27$。挖掉的部分为三个小长方体，体积均为$3\times 1\times 1=3$，但中间空洞部分是重合的，挖掉的体积为：

$3\times 3-(1\times 1\times 1)\times 2=7$，

$27-7=20.$

（2）原长方体的表面积为

$3\times 3\times 6=54.$

挖去后减少的表面积为$1\times 1\times 6=6$

挖去后增加的表面积为

$1\times 1\times 4\times 6=24.$

挖去后的表面积为

$54+24-6=72$。

答：挖洞后木块的体积为 20，表面积为 72。

11. 锯法：把长 3 等分，宽 4 等分，长方体锯成 12 块，每一块长 3 厘米，宽 2 厘米，高 3 厘米。把 12 块长方体木块摆成两层，使长宽高均为 6 厘米，组成一

个大正方体。因此，大正方体的表面积为：

$6\times6\times6=216$（平方厘米）。

答：这个大正方体的表面积为 216 平方厘米。

12. 先求三个正方体的棱长，再求三个正方体的体积。

$54=6\times9=6\times(3\times3)$，棱长为 3 厘米。

$96=6\times16=6\times(4\times4)$，棱长为 4 厘米。

$150=6\times25=6\times(5\times5)$，棱长为 5 厘米。

$3\times3\times3=27$，体积为 27 立方厘米。

$4\times4\times4=64$，体积为 64 立方厘米。

$5\times5\times5=125$，体积为 125 立方厘米。

大正方体的体积为：

27+64+125=216（立方厘米）

$126=6\times6\times6$，棱长为 6 厘米。

大正方体的表面积为：

$6\times(6\times6)=216$（平方厘米）。

答：大正方体的表面积为 216 平方厘米。

13. 原来正方体的一个面为$1\times1=1$（平方米）。每锯一刀，就增加 2 个 1 平方米的表面。依题意，一共锯了$2+3+4=9$（刀）。共增加了$2\times9=18$（平方米）的表面，因此，这大大小小 60 块长方体的表面积之和为：

$1\times1\times6+18=24$（平方米）

答：这 60 块长方体的表面积为 24 平方米。

14. 由圆柱的底面周长为 31.4 厘米可求得圆柱的底面半径 r。由 $2\pi r=\ 3.14$，得 $r=5$厘米。

设圆柱的高为 x 厘米，根据熔铸前后铝块的体积不变列方程：

$$\pi\times5^2\times x=19\times5\times3+7^3$$

$$x=\frac{19\times5\times3+343}{3.14\times25}$$

$$x=8。$$

答：圆柱形铝块的高是 8 厘米。

15. （1）若前后两面以长 10 厘米，高 5 厘米计算木板面积，则左右两面的宽应是$8-2=6$（厘米），高 5 厘米。同理，下底面的木板长应是$10-2=8$（厘米），宽是$8-2=6$（厘米），共 5 个面，至少需要木板面积为：

$10 \times 5 \times 2 + (8-2) \times 5 \times 2 + (10-2) \times (8-2) = 208$（平方厘米）

（2）木盒的容积为

$(10-2) \times (8-2) \times (5-1) = 192$（立方厘米）

答：至少需要木板 208 平方厘米，木盒的容积是 192 立方厘米。

16. 只需求出铁皮的宽。设铁皮的宽为 x 厘米，铁盒底面的长为$32 - 4 \times 2 = 24$（厘米），宽为$x - 4 \times 2 = x - 8$（厘米），铁盒的高为 4 厘米，根据题意得：

$$24 \times (x-8) \times 4 = 1920,$$
$$x - 8 = 20,$$
$$x = 28.$$
$$32 \times 28 = 896.$$

答：铁皮的面积为 896 平方厘米。

17. 大长方体的体积为 2100 立方厘米。已知高为 10 厘米，所以长 × 宽 $= 2100 \div 10 = 210$。将 210 分解质因数$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$，根据题意长和宽只能是 3×5 和 2×7，即长 $= 3 \times 5 = 15$(厘米)宽 $= 2 \times 7 = 14$(厘米)。

答：堆成的长方体的长和宽分别为 15 厘米和 14 厘米。

18. 假定上升的水位能把铁块淹没，那么上升的水的体积就是铁块排开的水的体积。$6 \times 6 \times 6 = 216$（立方分米），放入水中的铁块最多能使水槽中的水位上升$216 \div (24 \times 9) = 1$（分米）。原来水槽中的水深 4 分米，现在的水深为 5 分米，与淹没 6 分米高的铁块矛盾。因此，上升的水位不能把铁块淹没。

设水位上升了 x 分米，则

$$24 \times 9 \times x = 6 \times 6 \times (x + 4)$$
$$x = 0.8$$

答：水位上升了 0.8 分米。

19. 由于在一个角上单独截去棱长为 1、2、3、4、5、6、7、8 的小正方体，剩余部分的表面积都不变。要使剩下部分的表面积尽可能小，应在用一条棱的两端各截去棱长为 7 和 8 的小正方体，故剩部分的表面积为

$$15^2 \times 6 - 7^2 \times 2 = 1252.$$

20. 因塑料桶是圆柱形，铅锤取出后，水面下降部分是一个小圆柱，它的体积与铅锤的体积相等，小圆柱的高就是水面下降的高度。

铅锤的体积为

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{6}{2}\right)^2\times 20 = 60\pi\text{（立方厘米）}$$

设水面下降高度为 x，则小圆柱的体积为$\pi\times10^2\times x = 100\pi x$（立方厘米）。

由$60\pi = 100\pi x$

得　$x = 0.6$

答：杯里的水下降 0.6 厘米。

第十一章　逻辑推理

1. 五年级 1、2、3、4 四个班举行接力赛，甲、乙、丙三个同学猜测四个班比赛的前三名，名次：甲说：1 班第三，3 班第一

乙说：3 班第二，2 班第三

丙说：4 班第二，1 班第一

比赛结果，三人都只猜对一半，请你判断四个班名次。

2. 赵、钱、孙、李、王参加学校象棋比赛，都进入了前五名，发奖前，老师让他们猜一猜各人名次：赵说：钱第三，孙第五

钱说：王第四，李第五

孙说：赵第一，王第四

李说：孙第一，钱第二

王说：赵第三，李第四

老师说：每个名次都有人猜对，问谁获第四？

3. 甲乙丙丁四人在操场上踢足球，打碎了一块玻璃，管理员问是谁打的？

甲说：玻璃是丙或丁打碎的

乙说：玻璃是丁打碎的

丙说：我没打坏玻璃

丁说：我才不干这种事呢。

如果他们中只有一个人说谎了，试问玻璃是谁打碎的？

4. 田径场上 A、B、C、D、E、F 六人参加百米决赛。对于谁是冠军，看台上甲、乙、丙、丁四人有以下猜测：

甲说：冠军不是 A 就是 B

乙说：冠军不是 C

丙说：D、E、F 都不可能是冠军

丁说：冠军是 D、E、F 中的一人。

比赛结果是，这四人中只有一人猜测是正确的，你能判断谁是冠军吗？

5. 有三个盒子，其中一个装两只红球，另一个装两只白球，还有一个装了红球，白球各一个。但三个盒子的标签全贴错了。现要求从一个盒子中只摸出一个球就能确定三个盒子中球的颜色，应如何做？

6. 在甲、乙、丙三人中有一位教师，一位工人，一位战士。已知丙比战士年龄大，甲和工人不同岁，工人比乙年龄小，请你判断谁是教师。

7. 有张、王、李三名工人，分在甲、乙、丙三个工厂，一人是车工，一人是钳工，一人是电工，已知：（1）张不在甲厂

（2）王不在乙厂

（3）在甲厂的不是钳工

（4）在乙厂的是车工

（5）王不是电工

问：张、王、李三名工人各在哪个工厂？各干三名工种？

8. 甲、乙、丙、丁四位老师分别教数学、物理、化学、英语。甲老师可以教物理、化学；乙老师可以教数学、英语；丙老师可以教数学、物理、化学；丁老师只能教化学，为了使每人都能胜任工作，应如何安排四位老师的教学工作。（每人只教一门课）

9. 把 1、2、3、4、5、6 六个数字填入下图表格中，要使每行右边的数字比右边的数字大，下面比上面的大，有几种填法？

A	B	C
D	E	F

10. A、B、C、D、E 五个队进行单循环赛（每两个队之间都要比赛一场）进行到中途，发现 A、B、C、D 队比赛的场次分别是 4、3、2、1。问这时 E 队赛过几场？E 队和哪个队赛过？

11. 小明、小强、小华三人中一人来自金城，一人来自沙市，一人来自水乡，在迎春杯数学竞赛中一人获一等奖，一人获二等奖，一人获三等奖，已知：

（1）小明不是金城选手

（2）小强不是沙市选手

（3）金城的选手获的不是一等奖

（4）沙市选手获得二等奖

（5）小强获的不是三等奖

判断三人各是何地的选手，各获几等奖？

12. 张、王、李、赵四位同学住在一个宿舍里。一天晚上，他们中间最晚回来的那位同学忘了关灯，第二天宿舍管理员查问谁回来的最晚，

（1）张说：我回来时，小李还没回来

（2）王说：我回来时小赵已经睡了，我也就睡了。

（3）李说：我进门时，小王正在床上。

（4）赵说：我回来就睡了，别的没注意。

他们说的都是实话，你知道谁回来最晚吗？

13. 甲、乙、丙、丁四人正进行羽毛球双打比赛，已知

（1）甲比乙年轻

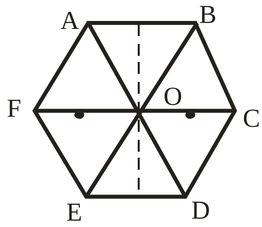
（2）丙比他的两个对手年龄都大。

（3）甲比他的同伴年龄大

（4）乙与甲的年龄差比丙与丁的年龄差要大

请把他们四人按年龄顺序从小到大排列起来。

14. 如图，ABCDEF 是一个正六边形，若在六条边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 上随意写上1~6这六个自然数，每个数字写一次，同时在 OA、OB、OC、OD、OE、OF 上也写1~6这六个数字，一个数字只写一次，那么是否存在一种写法，使三角形 OAB，OBC，OCD，ODE，OEF，OFA 的三边上各数之和相等？



15. A、B、C、D 四个同学猜测他们之中谁被评为三好学生。A 说："如果我被评上，那么 B 也被评上。" B 说："如果我被评上，那么 C 也被评上。" C 说："如果 D 没评上，那么我也没评上。" 实际上他们之中只有一人没被评上，并且 A、B、C 说的都是正确的。问：谁没被评上三好学生。

16. 一个圆桌围坐着五个人。甲是中国人，会说英语，乙是法国人，会说日语；丙是英国人，会说法语；丁是日本人会说汉语；戊是法国人会说西班牙语，问他们怎么坐，才能使相邻座位上二位都能彼此交谈。

17. 小张、小王、小李三人聊天，每人都说三句话，并且都是有两句真话，一句假话。

小张："我今年才 22 岁，我比小王还小两岁，我比小李大 1 岁。"

小王："我不是年龄最小的，我和小李相差 3 岁，小李 25 岁了。"

小李："我比小张小，小张 23 岁，小王比小张大 3 岁。"

请推断出他们三人的年龄。

18. 少先队员采访一位科学家，但不知道科学家姓什么。宾馆看门的老爷爷告诉说："二楼住着姓李、姓王、姓张三位科技会议代表，其中一位是科学家，一位是技术员，一位是编辑，同时还有三位来自不同地方的旅客，也是姓王、姓李、姓张各一位。"已知

（1）姓李旅客来自北京

（2）技术员在广州一家工厂工作

（3）姓王的旅客说话有口吃毛病，不做教师

（4）与技术员同姓的旅客来自上海

（5）技术员和一位教师来自同一个城市

（6）姓张的代表赛乒乓球总是输给编辑

请判断科学家姓什么？

19. A、B、C、D、E 五人进行了分胜负的乒乓球单循环比赛，结果是：

（1）A 胜 3 场

（2）E 胜 1 场

（3）B、C、D 各胜 2 场，且他们三人中有一人胜了其他二人。

（4）除 B 外，其他四人之间有胜有负。

（5）C 胜 E

判断他们五人之间的胜负关系。

20. 图中二、三、四号位为前排，一、六、五号位为后排，六名排球队员分别穿 1、2、3、4、5、6 号球衣，每个队员的站位号与他们球衣号都不相同。一、四号位站主攻；二、五号位站二传，三、六号位站副攻。已知（1）1 号 6 号不在后排

（2）2 号 3 号不是二传手
（3）3 号 4 号不同排
（4）5 号 6 号不是副攻
判断每个队员的站位。

四	三	二
五	六	一

分析解答

1. 假定甲说 1 班第三为真，则 3 班第一为假，由此推出 2 班第三为假，三班第二为真，这样 1 班第一为假，4 班第二为真，这与三班第二矛盾，因此假定不成立。

一	1	2	3	4
甲	三√		一×	
乙		三×	二√	
丙	一×			二√

由上述推理可知，甲说的 3 班第一为真，1 班第三为假，由此推出乙说的 3 班第二为假，2 班第三为真，最后丙说的 1 班第一为假，4 班第二为真。比赛结果是：3 班第一，4 班第二，2 班第三，1 班第四。（推理过程也可列表如下）

一	1	2	3	4
甲	三×		一√	

乙		三√	二×	
丙	一×			二√

这类问题称作“逻辑推理”问题。“逻辑”是指思维的规律。正确的思维，应该是确定的，首位一贯的，无矛盾的和有根据的。

解这类问题时，首先要把条件理清楚，然后再作推理。有时先从某一条件出发，进行推理，直到推出结论为止；有时先作出一个假设，然后进行推理、如果推出矛盾，说明假设不能成立，而假设的反面是正确的。解这类问题有时可采用列表或画图的方法，以帮助分析推理。

2. 由“每个名次都有人猜对”可知钱第二，获第四名的是王、李二者之一。假定李第四，则李不是第五，只有孙第五；于是孙不是第一，只有赵第一；于是赵不是第三，只有钱第三；这与钱第二矛盾。因此只能王获第四名。

3. 如果是甲打碎的，则甲、乙都说谎了，与题设矛盾。如果是乙打碎的，同样甲乙都说谎了，与题设矛盾。如果是丙打碎的，则乙、丙都说谎了，也与题设矛盾。如果是丁打碎的，只有丁在说谎，符合题设条件。

答：玻璃是丁打碎的。

4. 假定甲猜的正确，则乙、丙猜的也正确，不符合题意（只有一人猜测是正确的）。因此甲猜的不正确。假定乙猜的正确，则甲、丁猜的也正确，不符合题意，因此乙猜的不正确，冠军应该是 C，这样只有丙猜的正确，甲、乙、丁都猜的不正确，符合题意。

答：C 是冠军。

5. 从贴有红、白球标签的盒子里摸出一个球，如果是红球，则该盒子里有两个红球，这样，贴二红球标签的盒子里有二个白球，贴二白球标签的盒子里有红、白球各一个。如果从贴有红、白球标签的盒子里摸出一个白球，则该盒子里是两个白球，贴二红球标签的盒子里有红、白球各一个，贴二白球标签的盒子里是二红球。

6. 由“丙比战士年龄大”说明丙不是战士，由“甲和工人不同岁”说明甲不是工人，由“工人比乙年龄小”说明乙不是工人。综上所述，丙是工人。

由丙 > 战士和工人 < 乙（即丙 < 乙）得乙 > 丙 > 战士，说明甲是战士，最后乙是教师。

答：甲是战士，乙是教师，丙是工人。

7. 由（2）王不在乙厂；（4）在乙厂的是车工；（5）王不是电工可得王不是车工也不是电工，王是钳工；由（3）在甲厂的不是钳工，（4）在乙厂的是车工说明王不在甲厂，也不在乙厂，王在丙厂。由（1）张不在甲厂可知张在乙厂，由（4）张是车工。最后李在甲厂是电工。

答：张在乙厂是车工，王在丙厂是钳工，李在甲厂是电工。

8. 把已知条件列表：

	数学	物理	化学	英语
甲		√	√（×）	
乙	√（×）			√
丙	√	√（×）	√（×）	
丁			√	

由“丁老师只能教化学”知甲、丙老师不教化学。于是甲老师教物理，丙老师不教物理，只有丙老师教数学。最后，乙老师不教数学，乙老师教英语。

9. 为方便起见，把每一格中标一个字母，如上图，根据题意，应满足：

$$A < B < C，D < E < F，$$

$$A < D，B < E，C < F。$$

因此，A 最小，F 最大，

即　　A = 1，F = 6

B、C、D、E 只能取 2、3、4、5

又因为 B<C，B<E，故 B 只能取 2 或 3。

（一）B = 2时，C 可取 3，4，5 具体填法如下：

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

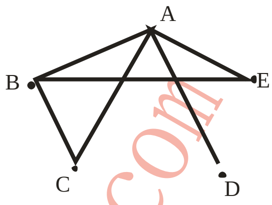
（二）B = 3时，C 可取 4 或 5、具体填法如下：

1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

答：共有 5 种填法。

10. 解一：如下图，用平面上的点表示 A、B、C、D、E 各队，若两队比赛过，则两点间连线；若两队没有比赛过，则不连线。



因为 A 赛过 4 场，A 与 B、C、D、E 均连；B 赛过 3 场，除与 A 赛过，还赛过两场，因为 D 只赛过 1 场（D 和 A 赛过），因此 B 只能和 C、E 赛过，这样正好符合 C 赛过 2 场，D 赛过 1 场。这时由图上可以看出，E 队赛过 2 场，E 队和 A、B 两队赛过。

解二：因为比赛一场，双方各计一次，因此，比赛过程中任何阶段，各队比赛的场次数总是偶数，A、B、C、D 各队的比赛场次之和是$4+3+2+1=10$是偶数，这时 E 赛过的场次数一定也是偶数，有三种可能：0 次，2 次，4 次。因为 A 赛过 4 场，一定和 E 赛过。E 不可能赛 0 场；又 D 只赛过一场，D 和 A 赛过，D 还未和 E 赛过，E 不会赛过 4 场，E 只能是赛过 2 场。E 和 A 赛过；B 赛过 3 场，而 B 和 D 没赛过，B 一定和 E 赛过。

答：E 赛过 2 场；E 和 A、B 各赛过一场。

11. 由条件（2）和（4）知小强获的不是二等奖，由条件（5）知小强获的也不是三等奖。因此，小强获得一等奖。由条件（2）和（3）知小强既不来自沙市，也不来自金城，小强来自水乡。由（1）小明不是金城的选手，又小明也不是水乡的选手，因此，小明是沙市的选手，由条件（4）知，小明获得二等奖。最后，小华是金城的选手，他获得三等奖。

答：小明是沙市的选手，获得二等奖；小强是水乡的选手，获得一等奖；小华是金城的选手，获得三等奖。

12. 由（1）知，张回来的不是最晚；由（2）知，赵回来的不是最晚；由（3）知，

王回来的不是最晚，因此，李回来的最晚。

13. 由（1）知甲 < 乙，即乙 > 甲；又由（3）甲的同伴不是乙，甲的同伴只能是丙或丁。

如果甲的伙伴是丙，由（3）甲 > 丙；再由（1）乙 > 甲 > 丙，又由（2）丙 > 乙，丙 > 丁，由此可得乙 > 甲 > 丙 > 丁，推出乙 > 乙不合理。因此甲的伙伴是丁，乙的伙伴是丙。由（1）、（3）知乙 > 甲 > 丁。又由（2）丙 > 甲，丙 > 丁。

丙和乙的关系只能是丙 ≥ 乙或丙 < 乙。即丙 ≥ 乙 > 甲 > 丁或乙 > 丙 > 甲 > 丁。

由丙 ≥ 乙 > 甲 > 丁推出丙 − 丁 > 乙 − 甲，与条件（4）不符，因此只有乙 > 丙 > 甲 > 丁。

答：四人按年龄顺序由小到大排列是丁、甲、丙、乙。

14. 设 AB，BC，CD，DE，EF，FA 各边上写的数是a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，则$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$。

设 OA，OB，OC，OD，OE，OF 各边上写的数字是b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 21。$$

假定有一种写法使六个三角形三边上各数字之和都相等，设三数之和为 S，六个三角形各边上的数的和为 6S。在求六个三角形三边之和时，六边形六条边上的各数a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6各用了一次，而b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6各数各用了两次，因此得：

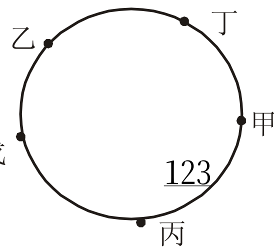
$$6S = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$$
$$+2 \times (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6)$$
$$6S = 21 + 2 \times 21$$
$$6S = 63.63 \text{ 不是 } 6 \text{ 的倍数，不合理。}$$

答：不存在一种写法使六个三角形中，每个三角形三边上三个数之和都相等。

15. 由 C 说可推出 D 必被评上，否则如果 D 没评上，则 C 也没评上，与“只有一人没有评上”矛盾。再由 A、B 所说可知：

假设 A 被评上，则 B 被评上，由 B 被评上，则 C 被评上。这样四人全被评上，矛盾。因此 A 没有评上三好学生。

16. 只有一人会西班牙语，不能用西班牙语交谈。会西班



牙语法国人（戊）两边只能做法国人（乙）和会说法语的英国人（丙）；日本人（丁）应坐在法国人（乙）和中国人（甲）之间，这样邻座的两人都能互相交谈了。

答：围着圆桌逆时针按甲、丁、乙、戊、丙的顺序就坐，就能使邻坐的两人之间都能互相交谈。

17. 假定小张说“我今年才 22 岁”为真，则小李说“小张 23 岁”为假，依题意，小李说“我比小张小”和“小王比小张大 3 岁”为真，小王是 25 岁，小李应小于 22 岁。这样小王说“我和小李相差 3 岁”和“小李 25 岁了”都为假，不符合每人只有一句假话的题意。因此小张应是 23 岁，由小张说的“我比小王还小两岁”和“我比小李大 1 岁”为真知小王 25 岁，小李 22 岁。

答：小张 23 岁，小王 25 岁，小李 22 岁。

18. 由（6）知张代表不是编辑，可能是科学家或技术员。由（3）、（5）知教师旅客来自广州，教师不姓王；由（1）知教师也不姓李，教师姓张。这样李旅客来自北京，张旅客来自广州，王旅客一定来自上海。由（4）知技术员姓王。由此得出张代表是科学家。

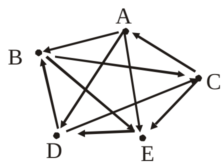
答：科学家姓张。

19. 为方便起见，用箭头表示二人之间的胜负关系，例如 C 胜 E 用“$C\to E$”表示。分以下几步：

（一）$A\to B$，否则因条件（1），A 要胜 C、D、E 这与条件（4）矛盾。

（二）$B\to E$，否则$E\to B$，则 E 只胜一场，E 就要败给 A、C、D 与条件（4）矛盾。

（三）由$C\to E$ 和 $B\to E$即 B、C 各胜 E 一场，由条件（3）B、C、D 中只有 D 胜其他二人，即$D\to B$，$D\to C$。



（四）因 D 只胜 2 场，因此 D 的另外二场输给 A 和 E，即$A\to D$，$E\to D$。

（五）E 只胜一场，因此 E 输给 A，即$A\to E$.

（六）因 B、C 各胜 2 场，最后只有$B\to C$，$C\to A$。

答：A 胜 B、D、E；B 胜 C、E；C 胜 A、E；D 胜 B、C；E 胜 D。

20. 由（1）知 1 号、6 号在前排，由（3）知 3 号、4 号一前一后，因此 2 号、5 号在后排。因为 5 号不站五号位；5 号不是副攻，5 号不站六号位，因此 5 号站一号位。因为 2 号不是二传手，2 号不站五号位，2 号站六号位。后排剩下

的五号位只可能3号或4号站。3号不是二传手，3号不站五号位，只有4号站五号位。3号在前排，3号不站三号位，3号不是二传手，也不站二号位，因此3号站四号位。6号不是副攻，6号不站三号位，因此6号站二号位。剩下1号站三号位。

四 3	三 1	二 6
五 4	六 2	一 5

答：前排：6号站二号位，1号站三号位，3号站四号位。后排：5号站一号位，2号站六号位，4号站五号位。

第十二章　完全平方数和个位数字问题

1. 比较大小（在__处填入“<”或“>”号）

（1）3^2___3×2；　（2）2^3___3^2

（3）5×4^2___$(5\times4)^2$；　（4）10^1___1^{10}

（5）$5^5\times2^5$___$2^6\times5^4$

2. 计算33333^2

3. 已知 a 为整数，求证a^5的个位数字与 a 的个位数字相同

4. 乘积$7\times 7^2\times 7^3\cdots\cdots\times 7^{10}$的个位数字是几？

5. 自然数$\underbrace{2\times 2\times \ldots\ldots\times 2}_{1997\text{ 个 }2}-1$的个位数是几？

6. 求$3^{1995}+4^{1996}+5^{1997}$的个位数

7. $1^{10}+2^{10}+3^{10}+4^{10}+5^{10}+6^{10}+7^{10}+8^{10}+9^{10}+10^{10}$的个位数字是几？

8. 求$1!+2!+3!+4!+\cdots\cdots+1997!$的个位数字。

9. 求$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+1996^4+1997^4$的个位数字。

10. 若 a 为整数，且不能被 5 整除，则a^4-1能被 5 整除。

11. 无论 n 是怎样的自然数，$3\times(5^n+1)$都不可能是两个连续自然数的乘积。

12. 证明：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

13. 用 300 个 2 或若干个 0 组成的整数有没有可能是完全平方数

14. 一箱苹果，如果将它们五个一份分装在塑料袋中，最后还剩 2 个，问这箱苹

果总数能否为完全平方数。

15. 证明 11,111，……$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$…，这串数中没有完全平方数。（$n\geq2$）

16. 证明对于任何自然数 n，n（n＋1）都不可能是完全平方数。

17. 证明不能被 3 整除数的平方与 1 的差能被 3 整除。

18. 一个小于 400 的三位数，它是完全平方数它的前两位数字组成的两位数还是完全平方数，其个位数字也是一个完全平方数，那么这个三位数是几？

19. 已知 x 是自然数，并且$x^5=229345007$，那么，x 是几？

20. 已知$\frac{n}{2}$ 是完全平方数，$\frac{n}{3}$ 是立方数。问 n 的最小正数值是多少？

分析解答

1. （1）>。因为$3^2=3\times3=9,3\times2=6$；

（2）<。因为$2^3=2\times2\times2=8$，$3^2=9$；

（3）<。因为 $5\times4^2=5\times4\times4=80$，$(5\times4)^2=20^2=400$；

（4）>。因为$10^1=10$，$1^{10}=1$；

（5）>。因为$5^5\times2^5=(5\times2)^5=10^5=100000$，$2^6\times5^4=2^2(2\times5)^4=4\times10^4=40000$。

2. $11111^2=123454321$，

$$
\begin{aligned}
33333^2 &= (11111\times3)^2\\
&= 11111^2\times3^2\\
&= 123454321\times9\\
&= 1111088889。
\end{aligned}
$$

3. a 为整数，整数的个位数字只有 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。

乘方的个位数字变化规律如下：

乘方	个位数字									
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
a^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
a^5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

由此可看出，a^5的个位数与 a 的个位数字相同。不难看出更一般的规律：

a^1，a^5，a^9，…的个位数字相同；

a^2，a^6，a^{10}，…的个位数字相同；

a^3，a^7，a^{11}，…的个位数字相同；

a^4，a^8，a^{12}，…的个位数字相同。

还可看出以下规律：

（1）平方数的个位数字只能是 0，1，4，5，6，9；

（2）立方数的个位数字从 0,1 到 9 都可能；

（3）四次方的个位数字只能是 0，1，5，6。

4. $7\times7^2\times7^3\times\dots\dots\times7^{10}$

$=7^{1+2+3+\cdots\dots+10}=7^{55}$

又因　$55=13\times4+3$，所以7^{55}的个位数字与7^3的个位数字相同，个位数字为 3。

所以$7\times7^2\times7^3\times\cdots\times7^{10}$的个位数字为 3。

5. $\underbrace{2\times2\times\dots\times2}_{1997\text{ 个 }2}=2^{1997}$，又因$1997=499\times4+1$。所以，$2^{1997}$的个位数字为 2。

由此可知

$\underbrace{2\times2\times\dots\times2}_{1997\text{ 个 }2}-1$的个位数字为 1

6. 首先分情况讨论

因$1995=498\times4+3$，所以3^{1995}的个位数字与3^3的相同，个位数字为 7；

因$1996=998\times2$，所以4^{1996}的个位数字为 6；而5^{1997}的个位数字为 5。

所以$3^{1995}+4^{1996}+5^{1997}$的个位数字与$7+6+5=18$的个位数字相同，应为 8。

7. 因为$10=2\times4+2$，所以$1^{10}+2^{10}+\ldots+10^{10}$的个位数字与$1^2+2^2+\ldots+10^2$的个位数字相同，即与$1+4+9+6+5+6+9+4+1+0=45$的个位数字相同。

由此可知$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+10^{10}$的个位数字为 5。

8. 这个问题初看起来数字很大，难以入手。但是，通过试验：

$1!=1$，$2!=1\times2=2$，$3!=1\times2\times3=6$，

$4!=1\times2\times3\times4=24$，$5!=1\times2\times3\times4\times5=120$。

不难发现：$6!-1997!$的个位数字均为 0。

因此，$1!+2!+3!+\cdots+1997!$的个位数字与$1+2+6+24+0=33$的个位数字相同，应为 3。

9. 由于$1^4+2^4+\ldots+9^4+10^4$的个位数字与$1+6+1+6+5+6+1+6+1=33$的个位数字相同（参看本章第 3 题解答中的表），应为 3。

同理，$11^4+12^4+\cdots+19^4+20^4$的个位数字也为 3。

这样，可将$1^4+2^4+\cdots+1990^4$按 10 个数分成一组，共分成 199 组，且每组和数的个位数字为 3。因此，$1^4+2^4+\cdots+1990^4$的个位数字与$199\times3=597$的个位数字相同，应为 7。

又因$1991^4+1992^4+\cdots+1997^4$的个位数字与$1+6+1+6+5+6+1=26$的个位数字相同，应为 6。

于是$1^4+2^4+\cdots+1990^4+1991^4+\cdots+1997^4$的个位数字应与$7+6=13$的个位数字相同，应为 3。

10. 若 a 不能被 5 整除，则 a 的个位数不为 0 和 5，于是a^4的个位数字为 1 或 6（a^4的个位数字只能为 0,1,5,6）。这样，a^4-1的个位数字为 0 或 5，也就是a^4-1能被 5 整除。

11. 因为5^n的个位数字为 5，所以5^n+1的个位数字为 6.由此可知$3\times(5^n+1)$的个位数字应为 8。

另一方面，由下列乘积

$1\times2=2$，$2\times3=6$，$3\times4=12$，$4\times5=20$，$5\times6=30$，$6\times7=42$，$7\times8=56$，$8\times9=72$，$9\times10=90$，$10\times11=110$。的个位数字可知：相邻两个自然数乘积的个位数字只能是 0,2,6。

所以，$3\times(5^n+1)$不可能是两个连续自然数的乘积。

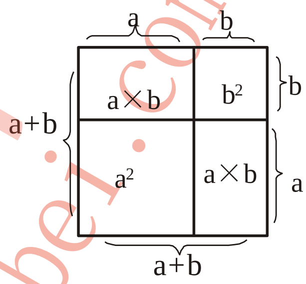
12. 证明如下：

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)\times(a+b)\\&=a\times(a+b)+b\times(a+b)\\&=a^2+a\times b+b\times a+b^2\\&=a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$称作两数和的平方公式，也叫完全平方公式，这是初等数学中常用的公式。

使用公式时应注意：$(a+b)^2\neq a^2+b^2$（这里 a 和 b 都不为零）。

两数和的平方公式还可以从下列图形中得到解释。图中大正方形的面积为$(a+b)^2$；大正方形被分割成四个图形，其中较大的正方形面积为a^2，小正方形面积为b^2，两个长方形的面积都为 ab，由此也可得



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

13. 设由 300 个 2 和若干零组成的数为 A，则 A 的数字和为 600。

因为　$3|600$，所以$3|A$。

而　　$9\nmid 600$，所以$9\nmid A$。

这说明 A 中有 3 的约数，而无$3^2=9$作为约数，所以 A 不是完全平方数。

14. 设共分了 k 袋，苹果总数为$5k+2$，这里 k 为自然数。

对于任何整数被 5 除，所得余数只能 0，1，2，3，4。因此，任何整数可表示为：$5k$，$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$五种形式之一。

因为$(5k)^2=25k^2$，所$(5k)^2$仍是 5 的倍数；

因为$(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$，

$(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$

所以，形如$5k+2$ 和 $5k+3$的数平方后应是 5 的倍数加 4。

由此可知，形如$5n+2$，$5n+3$的数（n 为自然数）不是某整数的平方数。因此，苹果总数$(5k+2)$不能为完全平方数。

15. 如果$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$是完全平方数（$n\geq2$），那么必为奇数的平方，设为$2k+1$的平方，由$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$，可知$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$可表示为 4 的

倍数加 1 的形式。

另一方面，$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$（$n \geq 2$）被 4 除余 3，即$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$是形为$4k+3$的数，这说明$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$不可能是完全平方数。

因为上面我们是对于任意的自然数 n 证明的，所以在这串数 11，111，…，$\underbrace{11\ldots11}_{n个1}$，…

中没有完全平方数。

16. 因为 $n(n+1)=n^2+n>n^2$，而且 $n(n+1)=n^2+n<n^2+2n+1=(n+1)^2$。所以，$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$。

在两个相邻的自然数的平方数之间不存在完全平方数。所以n（n+1）不可能是完全平方数。

17. 不能被 3 整除的数总能表示成形如$3k+1$或$3k+2$的数（k 为整数）。由于

$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

$$(3k+2)^2=9k^2+12k+1=3(3k^2+4k)+1。$$

所以形如$(3k+1)$和$(3k+2)$的数平方后均为 3 的倍数加 1，于是$(3k+1)^2-1$，$(3k+2)^2-1$都是 3 的倍数。

这就是说，不能被 3 整除的数的平方与 1 的差能被 3 整除。

18. 题中的三个条件是：

（1）一个小于 400 的三位数是完全平方数；

（2）这个三位数的前两位数字组成的两位数还是完全平方数；

（3）这个三位数的个位数字也是一个完全平方数。

先找出满足第一条件的三位数：

100，121，144，169，196，225，256，289，324，361。

再考虑第二个条件，从中选出合条件的数：

169，259，361。

再考虑第三个条件，挑除不合格的数 256，于是三个条件都合格的数为 169 和 361。

19. 先作估算

$$40^2=(2^2\times10)^5=2^{10}\times10^5=102400000,$$

$$50^2=(5\times10)^5=5^5\times10^5=312500000.$$

从而可知　$40^5 < x^5 < 50^5$

于是有　$40 < x < 50.$

又根据x^5的个位数字是 7，所以 x 的个位数字必为 7。

于是

$x = 47$。

20. 由已知$\frac{n}{2}$是完全平方数，$\frac{n}{3}$是立方数，我们可以设

$n = 2m^2 = 3k^3$(m，k 是自然数)。从而得 $2|k$ 且 $3|m$。

令 $m = 3b$(b 为自然数)，代入得

$n = 18b^2 = 3k^3$，

于是有　$3|k$，又$(2，3) = 1$，故

$$6|k。$$

为了使 n 尽可能小，依次从$k = 6，12，\cdots$试算。

当$k = 6$ 时，$n = 648$。这时

$\frac{n}{2} = 324 = 18^2$，$\frac{n}{3} = 216 = 6^3$。

所以，n 的最小正数值是 648。

第十三章　同　余

1. 求$437 \times 309 \times 1997$被 7 除的余数。

2. 设$x = 1 \times 1997 + 2 \times 1997 + 3 \times 1997 \cdots\cdots + 1997 \times 1997$，则 x 被 11 除的余数是几？

3. 已知 40 个整数，它们都不是 5 的倍数，那么，它们 40 次方的和被 5 除的余数是几？

4. 判断 288 和 214 对于模 37 是否同余？74 与 20 对于模 37 是否同余？

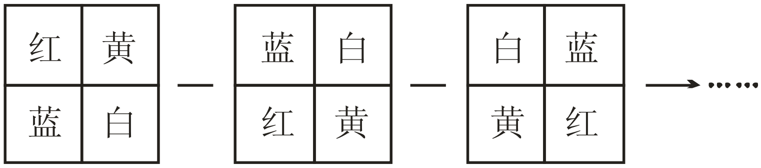
5. 求乘积$418 \times 814 \times 1616$除以 13 所得的余数。

6. 将奇数如下图排列，各列分别用 A、B、C、D、E、F、G 作为代表，问 1997 所在的列以哪个字母作为代表？

A	B	C	D	E	F	G
	1	3	5	7	9	11
23	21	19	17	15	13	
	25	27	29	31	33	35
47	45	43	41	39	37	
	49	51	53	55	57	59

…………

7. 四盏灯如图所示组成舞台彩灯，每 30 秒钟灯的颜色改变一次，方法如下：第一次上下两灯互换颜色，第二次左右两灯互换颜色，第三次同第一次，第四次同第二次……这样一直进行下去。问开灯 1 小时四盏灯的颜色如何排列？



（开始）　　第一次　　第二次

8. 求1949^{1997}被 7 除的余数。

9. 假定今天是星期日，再过75^{75}天之后是星期几？

10. 求$3333^{5555}+5555^{3333}$被 7 除的余数。

11. 分别求$123^{123}+456^{456}+789^{789}$被 3 和 9 除的余数。

12. 求$47^{35^{23}}$被 7 除的余数。

13. 求证$43^{43}-17^{17}$是 10 的倍数。

14. 求证$75^{378}-1$能被 74 整除。

15. 设自然数$N=\overline{a_n a_{n-1}\dots\dots a_1 a_0}$，其中$a_0$、$a_1$、$a_2$……$a_n$分别是个位，十位，百位……上的数字，又设$M=a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n$，即 M 是数 N 的各数位上的数字之和。求证$N\equiv M$（mod9）

16. 如果 13511,13903,14589 被自然数 m 除，所得的余数相同，那么 m 的最大值是多少？

17. 已知5^n-1是 7 的倍数，求 n 可以取哪些自然数。

18. 如果一百零一位数$\underbrace{33\dots\dots3}_{50\text{个}3}N\underbrace{55\dots\dots5}_{50\text{个}5}$能被 7 整除，求 N

19. 求适合下列同余式的 x 的值：

$5x \equiv 4$（mod11）

20. 求$777^{777}+888^{888}+999^{999}$的个位数字。

分析解答

1. 如果先计算乘积$437\times309\times1997$，再用 7 去除，这样虽然可以求得余数，但计算比较麻烦。结果是$437\times309\times1997=269660901$，被 7 除的余数是 6. 如果分别求出 437,309,1997 被 7 除的余数，再利用同余式的性质求出其乘积被 7 除的余数就简单多了。

$$\because 437\equiv3(\mathrm{mod}7),$$
$$309\equiv1(\mathrm{mod}7),$$
$$1997\equiv2(\mathrm{mod}7)。$$

根据同余式的可乘性得到：

$$437\times309\times1997\equiv3\times1\times2(\mathrm{mod}7)$$
$$\equiv6(\mathrm{mod}7)。$$

答：$437\times309\times1997$被 7 除余 6。

说明："modk"读作"模 k","≡"读作同余。"a ≡ b（modk）"读作"a 和 b 对于模 k 同余"，意思是：a 和 b 这两个数被 k 除所得余数相同。

2. $x=(1+2+3+\cdots+1997)\times1997$

$$=\frac{(1+1997)}{2}\times1997\times1997$$
$$=999\times1997\times1997$$

由于$999\equiv9(\mathrm{mod}11)$，

$$1997\equiv6(\mathrm{mod}11),$$

$$1997^2\equiv36\equiv3(\mathrm{mod}11)$$

所以$999\times1997^2\equiv9\times3\equiv27\equiv5(\mathrm{mod}11)$。

答：x 被 11 除的余数是 5.

3. 不能被 5 整除的数只有四种：

$$a\equiv1(\mathrm{mod}5),$$
$$b\equiv2(\mathrm{mod}5),$$
$$c\equiv3(\mathrm{mod}5),$$
$$d\equiv4(\mathrm{mod}5)。$$

显然$a^{40}\equiv1^{40}\equiv1(\mathrm{mod}5)$，另外，

$$b^2\equiv4(\mathrm{mod}5),\ c^2\equiv4(\mathrm{mod}5)$$
$$b^3\equiv3(\mathrm{mod}5),\ c^3\equiv2(\mathrm{mod}5)$$
$$b^4\equiv1(\mathrm{mod}5),\ c^4\equiv1(\mathrm{mod}5)$$

故$b^{40}\equiv1(\mathrm{mod}5)$，故$c^{40}\equiv1(\mathrm{mod}5)$，

$$d^2\equiv1(\mathrm{mod}5),\ 故d^{40}\equiv1^{20}\equiv1(\mathrm{mod}5)$$

因此，任何不是 5 的倍数的整数，40 次方后被 5 除都余 1.由同余的可加性，40 个 40 次方的和被 5 除的余数等于 40 个 1 相加被 5 除的余数，等于 0。

4. 要判断两数 a 和 b 是否对于模 m 同余，只要看$a-b$是否能被 m 整除即可。

$$\because 288-214=74=37\times2$$
$$\therefore 288\equiv214(\mathrm{mod}37)$$
$$\because 74-20=54,\ 而\ 37|54,\quad \therefore 74\not\equiv20(\mathrm{mod}37)。$$

5. 若先求乘积，再做除法求余数，计算量太大。利用同余的性质可以使"大数化

小”，简化计算。

$$\because 418 \equiv 2(\mathrm{mod}13)$$

$$814 \equiv 8(\mathrm{mod}13)$$

$$1616 \equiv 4(\mathrm{mod}13)$$

根据同余的可乘性得：

$$418 \times 814 \times 1616 \equiv 2 \times 8 \times 4 \equiv 64$$

$$\equiv 12(\mathrm{mod}13)$$

答：$418 \times 814 \times 1616$除以 13 余数是 12。

6. 奇数的排列是 12 个一循环，即每隔 12 个奇数位置重复一次。

$$\because 1997 \equiv 5(\mathrm{mod}12)$$

$$\therefore 1997 \text{ 与 } 5 \text{ 在同一列。}$$

答：1997 所在的列以 D 作为代表

7. 经观察试验可知，每经过 4 次互换，四盏灯的颜色排列重复一次。1 小时 $= 60$ 分钟 $= 60 \times 60$ 秒 $= 30 \times 120$ 秒。因为$120 \equiv 0(\mathrm{mod}4)$。即开灯 1 小时，四盏灯的颜色排列与一开始相同。

8. 1949^{1997}这个数太大，不能先计算乘方的结果，再被 7 除求余数，必须利用同余的性质。

$$\because 1949 = 7 \times 278 + 3,$$

$$1949 \equiv 3(\mathrm{mod}7)$$

$$\therefore 1949^{1997} \equiv 3^{1997}(\mathrm{mod}7)$$

3^{1997}虽然比1949^{1997}小得多，但计算3^{1997}工作量仍然过大。考虑到

$3^1 \equiv 3(\mathrm{mod}7)$

$3^2 \equiv 9 \equiv 2(\mathrm{mod}7)$

$3^3 \equiv 6(\mathrm{mod}7)$

$3^4 \equiv 2^2 \equiv 4(\mathrm{mod}7)$

$3^5 \equiv 3 \times 4 \equiv 5(\mathrm{mod}7)$

$3^6 \equiv 2 \times 4 \equiv 1(\mathrm{mod}7)$

而$1997 = 6 \times 332 + 5$

$$3^{1997} = (3^6)^{332} \times 3^5$$

$$\therefore 3^{1997} \equiv (3^6)^{332} \times 3^5 \equiv 3^5 \equiv 5(\mathrm{mod}7)$$

$$\therefore 1949^{1997} \equiv 3^{1997} \equiv 3^5 \equiv 5(\mathrm{mod}7)$$

答：1949^{1997}被 7 除余数是 5。

9. 只需求75^{75}被 7 除的余数。

$$75^1 \equiv 5(\bmod 7)$$
$$75^2 \equiv 25 \equiv 4(\bmod 7)$$
$$75^3 \equiv 20 \equiv 6(\bmod 7)$$
$$75^4 \equiv 16 \equiv 2(\bmod 7)$$
$$75^5 \equiv 24 \equiv 3(\bmod 7)$$
$$75^6 \equiv 8 \equiv 1(\bmod 7)$$

而$75^{75} = (75^6)^{12} \times 75^3 \equiv 1^{12} \times 6 \equiv 6(\bmod 7)$

答：75^{75}天后是星期 6。

10. 根据同余的性质：

$\because 3333 \equiv 1(\bmod 7)$，

$\therefore 3333^{5555} \equiv 1(\bmod 7)$。

又$5555 \equiv 4(\bmod 7)$，

$\therefore 5555^{3333} \equiv 4^{3333}(\bmod 7)$。

而$4^1 \equiv 4(\bmod 7)$，

$4^2 \equiv 2(\bmod 7)$，

$4^3 \equiv 1(\bmod 7)$。

$\therefore 4^{3333} \equiv (4^3)^{1111} \equiv 1(\bmod 7)$。

$\therefore 3333^{5555} + 5555^{3333} \equiv 1 + 1 \equiv 2(\bmod 7)$。

答：$3333^{5555} + 5555^{3333}$被 7 除余 2。

11. 根据同余的可乘方性得到：

$\because 123 \equiv 0(\bmod 3)$

$\therefore 123^{123} \equiv 0(\bmod 3)$

同理$456^{456} \equiv 0(\bmod 3)$，

$789^{789} \equiv 0(\bmod 3)$，

再由同余的可加性得：

$123^{123} + 456^{456} + 789^{789} \equiv 0(\bmod 3)$。

$\therefore 123^{123} + 456^{456} + 789^{789}$被 3 除余 0。

$\because 123 \equiv 6(\bmod 9)$，

$\because 123^2 \equiv 6^2(\bmod 9) \equiv 0(\bmod 9)$

$\therefore 123^{123} \equiv 0(\bmod 9)$

同理$456^{456} \equiv 0(\bmod 9)$

$789^{789} \equiv 0(\bmod 9)$

由同余的可加性得：

$123^{123}+456^{456}+789^{789} \equiv 0(\bmod 9)$。

$\therefore 123^{123}+456^{456}+789^{789}$被 9 除余 0。

答：原数被 3 和 9 除余数均为 0。

12. 注意到$47^{35^{23}}=47^{(35^{23})} \neq (47^{35})^{23}$。由于$47 \equiv 5(\bmod 7)$，

所以$47^{35^{23}} = 5^{35^{23}}(\bmod 7)$。

$\because 5^1 \equiv 5(\bmod 7)$，

$5^2 \equiv 25 \equiv 4(\bmod 7)$，

$5^3 \equiv 125 \equiv 6(\bmod 7)$，

$5^4 \equiv 16 \equiv 2(\bmod 7)$，

$5^5 \equiv 5 \times 2 \equiv 10 \equiv 3(\bmod 7)$，

$5^6 \equiv 4 \times 2 \equiv 8 \equiv 1(\bmod 7)$。

又$35 \equiv 5(\bmod 6)$

$35^2 \equiv 25 \equiv 1(\bmod 6)$

$35^3 \equiv 5(\bmod 6)$

$35^4 \equiv 1(\bmod 6)$

即 35 的奇次方幂与 5 同余（在模 6 下），35 的偶次方幂与 1 同余（在模 6 下），因此$35^{23} \equiv 5(\bmod 6)$，即$35^{23}$可表示为$35^{23}=6k+5$(k 是整数)。

$$\begin{aligned}\therefore 47^{35^{23}} &\equiv 5^{6k+5}(\bmod 7)\\ &\equiv (5^6)^k \cdot 5^5(\bmod 7)\\ &\equiv 1^k \times 3(\bmod 7)\\ &\equiv 3(\bmod 7)\end{aligned}$$

答：$47^{35^{23}}$被 7 除余数是 3。

13. 要证$43^{43}-17^{17}$是 10 的倍数，只需证明43^{43}与17^{17}的个位数字相同即它们被 10 除的余数相同。

证明：$\therefore 43^1 \equiv 3(\bmod 10)$

$43^2 \equiv 9(\bmod 10)$

$43^3 \equiv 27 \equiv 7(\bmod 10)$

$$43^4 \equiv 81(\bmod 10)$$

而$43^{43} = 43^{40} \times 43^3 \equiv (43^4)^{10} \times 43^3$

$$\equiv 1^{10} \times 7 \equiv 7(\bmod 10)。$$

又$17^1 \equiv 7(\bmod 10)$

$$17^2 \equiv 49 \equiv 9(\bmod 10)$$

$$17^3 \equiv 63 \equiv 3(\bmod 10)$$

$$17^4 \equiv 81 \equiv 1(\bmod 10)$$

而$17^{17} \equiv 17^{16} \times 17 \equiv (17^4)^4 \times 17$

$$\equiv 1^4 \times 7 \equiv 7(\bmod 10)。$$

∴它们被 10 除的余数都是 7，即它们的个位数字相同，差$43^{43} - 17^{17}$的个位数字为 0，因此$43^{43} - 17^{17}$是 10 的倍数。

14.要想证明$75^{378} - 1$能被 74 整除，只需证明$75^{378} \equiv 1(\bmod 74)$。

证明：$\because 75 \equiv 1(\bmod 74)$，

$\therefore 75^{378} \equiv 1^{378} \equiv 1(\bmod 74)$。

即$74|75^{378} - 1$。

一般地，设 k 与 n 为整数，且$k > 1$，$n > 0$，则有

$$k|(k+1)^n - 1。$$

15. 已知整数 N 可以表示为

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$$

$$= a_n \times \underbrace{100\ldots0}_{n个0} + a_{n-1} \times \underbrace{100\ldots0}_{n个0} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$\therefore 1 \equiv 1(\bmod 9),$$

$$10 \equiv 1(\bmod 9),$$

$$10^2 \equiv 1(\bmod 9),$$

……

$$10^n \equiv 1(\bmod 9)。$$

上边这些同余式两边分别乘以a_0，a_1，…，a_{n-1}，a_n得

$$a_0 \equiv a_0(\bmod 9),$$

$$a_1 \times 10 \equiv a_1(\bmod 9),$$

……

$$a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1}(\bmod 9),$$

$$a_n \times 10^n \equiv a_n(\bmod 9)。$$

根据同余的可加性得：

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$
$$\equiv (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)(\bmod 9)。$$

即$\mathrm{N} \equiv \mathrm{M}(\bmod 9)$。

这就证明了：一个整数被 9 除的余数与这个整数各数位上数字之和被 9 除的余数相同。

16. 如果 13511，13903，14589 被 m 除所得的余数相同，那么它们两两之差必被 m 整除，所求 m 的最大值应是它们两两之差的最大公约数。

$$13903 - 13511 = 392,$$
$$14589 - 13903 = 686,$$
$$14589 - 13511 = 1078。$$

容易求出 392,686,1078 的最大公约数是 98。

答：m 的最大值是 98。

17. 由$7|5^n-1$ 得$5^n \equiv 1(\bmod 7)$，只需求出 5 的多少次方与1 同余（在模 7 下同余）。

$\because 5^1 \equiv 5(\bmod 7)$　　$5^2 \equiv 25 \equiv 4(\bmod 7)$

$5^3 \equiv 20 \equiv 6(\bmod 7)$　　$5^4 \equiv 16 \equiv 2(\bmod 7)$

$5^5 \equiv 24 \equiv 3(\bmod 7)$　　$5^6 \equiv 36 \equiv 1(\bmod 7)$

因此，当 n 是 6 的倍数时，即$\mathrm{n} = 6\mathrm{k}$（k 是自然数）。

答：n 取 6 的倍数

18. 根据能被 7 整除的数的特征，易知 333333、555555 都能被 7 整除。将原数写

成下列：

$$\underbrace{33\ldots3}_{48\text{ 个 }3}\times10^{53}+33\mathrm{N}55\times10^{48}+\underbrace{55\ldots5}_{48\text{ 个 }5}$$

式中第一个加数和第三个加数都能被 7 整除，要使原数能被 7 整除，只需 $33\mathrm{N}55\times10^{48}$能被 7 整除，即$33\mathrm{N}55\times10^{48}\equiv0(\mathrm{mod}7)$。但$10^{48}\not\equiv0(\mathrm{mod}7)$ 必须$33\mathrm{N}55\equiv0(\mathrm{mod}7)$，通过试验容易得出$\mathrm{N}=3$。

答：$\mathrm{N}=3$。

19. 本题即求$x=?$（mod11）。在同余式中，一个数可以换成与这个数同余的另一个数。换句话说，同余式中的常数项可以加上模的任意倍数。好像加零一样。

由$5x\equiv4(\mathrm{mod}11)$，

得$5x\equiv4+11\equiv15(\mathrm{mod}11)$，

由于$(5,11)=1$，两端同除以 5 得$x\equiv3$（mod11）。

即只要 x 被 11 除余 3，均可满足同余式$5x\equiv4(\mathrm{mod}11)$。

$$\therefore x=11k+3(k\text{ 为整数})。$$

20. 求一个整数的个位数字就是求这个数被 10 除的余数。由同余的性质可得：

$777^1\equiv7(\mathrm{mod}10)$，

$777^2\equiv49\equiv9(\mathrm{mod}10)$，

$777^4\equiv81\equiv1(\mathrm{mod}10)$。

$777^{777}\equiv777^{776}\times7\equiv(777^4)^{194}\times7$

$\equiv1^{196}7\equiv7(\mathrm{mod}10)$。

$888^1\equiv8(\mathrm{mod}10)$，

$888^2\equiv64\equiv4(\mathrm{mod}10)$，

$888^4\equiv16\equiv6(\mathrm{mod}10)$。

$888^{888}\equiv(888^4)^{222}\equiv6^{222}\equiv6(\mathrm{mod}10)$。

$999^1\equiv9(\mathrm{mod}10)$，

$999^2\equiv81\equiv1(\mathrm{mod}10)$，

$999^{999}\equiv999^{998}\times9\equiv(999^2)^{499}\times9$

$\equiv1^{499}\times9\equiv9(\mathrm{mod}10)$。

所以$777^{777}+888^{888}+999^{999}$

$\equiv7+6+9\equiv22\equiv2(\mathrm{mod}10)$。

答：$777^{777}+888^{888}+999^{999}$的个位数是 2。

第十四章　不定方程

1. 在长为 158 米的地段铺设水管，用的是长 17 米和 8 米的两种同样粗细的水管，问两种长度的水管各需几根？（不截断）

2. 已知大客车有 54 个座位，小客车有 36 个座位，现有 378 位乘客，要使每位乘客都有座位且没有空位，问大、小客车各需几辆？

3. 求不定方程$31x+47y=265$的整数解。

4. 解不定方程$5x+7y=978$，并求正整数解的个数。

5. 老师将全班 40 人分成三种小组，数学组每组 3 人，生物组每组 2 人；体育组每组 8 人，问数学、生物、体育各有多少组？

6. （古代问题）“一百马，一百瓦，大马驮三，中马驮两，两个小马驮一瓦，最后不剩马和瓦，问有多少大马，中马和小马？”

7. 如果 1 只兔可换两只鸡，2 只兔可以换 3 只鸭，5 只兔可以换 7 只鹅，某人用 20 只兔换得鸡鸭鹅共 30 只，问其中鸡、鸭、鹅各多少只？

8. 袋里有三种球，分别标有数字 2、3 和 5.小明从中摸 12 个球，它们的数之和是 43，小明最多能摸出几个有数字 2 的球？

9. 鸡蛋每个 0.25 元，鸭蛋每个 0.40 元，鹅蛋每个 0.55 元。现有鸡蛋、鸭蛋、鹅蛋若干个，要把它们分成六堆。要求每堆三种蛋都有；各堆间三种蛋的比例互不相同；每堆价都是 4 元，问：这些蛋共有多少个？应怎样分摊？

10 一次数字竞赛准备了 22 支铅笔作为奖品发给一、二、三等奖的学生，原计划发给一等奖每人 6 支，二等奖每人 3 支，三等奖每人 2 支，后来改为一等奖每人 9 支，二等奖每人 4 支，三等奖每人 1 支，问：获一、二、三等奖的学生各几人？

11. 工程队要铺设 78 米长的地下排水管道，仓库中有 3 米和 5 米长的两种管子。问：可以有多少种不同取法？

12. 一个三位数除以 17 所得的商等于这个三位数各位数码之和，求这个三位数。

13. 一个三位数等于它的各位数字之和的 19 倍，这样的三位数共有 11 个，求出其中最小和最大的。

14. 某商店卖出一些 23 元一支和 16 元一支的钢笔，共收入 500 元，问这些钢笔共多少支？

15. 求不定方程$2x+3y+7z=23$的自然数解。

16. 求方程$3x^2-\mathrm{xy}+12=0$的整数解。

17. 求关于 x、y 的方程$(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2+2y^2=27$的一切自然数解和零解。

18. 二月份的一个星期日，有三批学生看望李老师，这三批学生的人数都不等，且没有单独一人去看望老师的。这三批学生的人数的积恰好等于这一天的日期数。那么，二月一日是星期几？

19. 小明用 70 元买了甲、乙、丙、丁四种书，共 10 册。已知甲、乙、丙、丁四种书的价格分别为 3 元、5 元、7 元、11 元，而且每种书至少买一本，那么共有几种不同的购买方法？

20. 商店的白糖有 4 千克，3 千克，1 千克三种包装。一位顾客要买 15 千克白糖，问：付给这位顾客白糖可以有多少种不同方法？

分析解答

1. 设 17 米长的水管用了 x 根，8 米长的水管用了 y 根，依题意得：

$17x + 8y = 158$，（1）

将方程（1）变形为

$8y = 158 - 17x$，（2）

$8y = 152 + 6 - 16x - x$，

因为 152 和 16x 都是 8 的倍数，所以$6 - x$也应是 8 的倍数，x 只能取 6，把$x = 6$代入(2)得 $y = 7$。答：17 米长的水管需 6 根，8 米长的水管需 7 根。

形如$ax + by = c$（$a \neq 0$，$b \neq 0$）的方程，其中，a，b，c 均为整数，称为未知数 x、y 的二元一次不定方程。人们关心的常是求它的整数解。

2. 解法一：设需大客车 x 辆，小客车 y 辆，根据题意列方程：

$$54x + 36y = 378, \quad (1)$$

$$3x + 2y = 21$$

$$2y = 21 - 3x,$$

$$y = \frac{21-3x}{2}。$$

因为 y 是整数，x 只能取奇数。

显然，$x = 1$ 时 $y = 9$；$x = 3$ 时 $y = 6$；$x = 5$ 时 $y = 3$；$x = 7$ 时 $y = 0$。

答：需大车 1 辆，小车 9 辆；或大车 3 辆，小车 6 辆；或大车 5 辆，小车 3 辆；或大车 7 辆，不要小车，都能使 378 位乘客都上车并且正好坐满。

说明：解法一叫分离整数法，这是求不定方程的整数解常用方法。

解法二：求二元一次不定方程的整数解有如下结论：

如果 a，b 互质，且x_0，y_0是二元一次不定方程$ax + by = c$（$a \neq 0$，$b \neq 0$） 的一组整数解，则这个不定方程的所有整数解为

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} \quad（t 为整数）$$

把方程（1）化为$3x + 2y = 21$　　（2）

由$(3,2) = 1$，原方程一定有整数解，易知$x = 1$，$y = 9$是方程（2）的一组整数解，故方程（2）的所有整数解为：

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 9 - 3t \end{cases}（t 是整数）。$$

$t = 0$ 时 $x = 1$，$y = 9$；$t = 1$ 时 $x = 3$，$y = 6$；$t = 2$ 时 $x = 5$，$y = 3$；$t = 3$ 时 $x = 7$，$y = 0$；

$t \geq 4$ 时 $y < 0$，不符合题意，舍去。

答：（略）。

说明：简单的二元一次不定方程可观察到一组整数解，但一般情况下不易做到，需用分离整数法。

3. 由于$(31,47) = 1$，所以原方程有整数解。将原方程变形为

$$31x = 265 - 47y$$

$$x=\frac{265-47y}{31}$$

$$x=\frac{248+17-31y-16y}{31}$$

$$x=8-y+\frac{17-16y}{31} \qquad (1)$$

因为 x，y 为整数，所以$\frac{17-16y}{31}$必为整数，设$\frac{17-16y}{31}=k$（k 是整数），则

$$31k=17-16y,$$

$$16y=17-31k,$$

$$y=\frac{17-31k}{16},$$

$$y=\frac{16+1-32k+k}{16},$$

$$y=1-2k+\frac{1+k}{16} \qquad (2)$$

因为 y，k 是整数，所以$\frac{1+k}{16}$必为整数，设$\frac{1+k}{16}=t$(t 是整数)，则

$$k=16t-1。$$

将$k=16t-1$代入（2）得

$$y=1-2\times(16t-1)+t=3-31t。$$

将$k=16t-1$，$y=3-31t$ 代入（1）得：

$$x=8-(3-31t)+16t-1=47t+4。$$

$$\therefore\begin{cases}x=4+47t\\y=3-31t\end{cases}（t 是整数）$$

当$t=0$ 时 $x=4$，$y=3$。当 $t\geq 1$ 时 $y<0$。

∴ 原方程得整数解为 $x=4$，$y=3$。

4. 由$(5,7)=1$,$1|978$知原方程有整数解。把原方程变形为：

$$5x=978-7y,$$

$$x=\frac{978-7y}{5},$$

$$x=\frac{975+3-5y-2y}{5},$$

$$x=195-y+\frac{3-2y}{5} \qquad (1)$$

因为 x，y 是整数，所以$\frac{3-2y}{5}$必是整数。

令$\frac{3-2y}{5}=k$(k 是整数)，则

$$5k=3-2y,$$

$$y=\frac{3-5k}{2}=\frac{2-4k+1-k}{2},$$

$$y=1-2k+\frac{1-k}{2} \qquad (2)$$

因为 y，k 都是整数，所以$\frac{1-k}{2}$ 必是整数。令$\frac{1-k}{2}=t$(t 是整数)，则

$$2t=1-k，k=1-2t$$

将$k=1-2t$ 代入(2)得

$y=1-2(1-2t)+t,$

$y=5t-1$。

将$y=5t-1$，$k=1-2t$ 代入(1)得

$$x=195-(5t-1)+k,$$

$$x=195-(5t-1)+(1-2t)。$$

$x=197-7t$。

即原方程的整数解为

$\begin{cases} x=197-7t \\ y=-1+5t \end{cases}$（t 是整数）。

要求正整数解，只需

$$\begin{cases} 197-7t>0 \\ -1+5t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t<\frac{197}{7} \\ t>\frac{1}{5} \end{cases}$$

$\therefore \frac{1}{5}<t<\frac{197}{7}$。

因为 t 是整数，所以 t 可以取 1，2，3，…，28，原方程有 28 组正整数解。如 $t=1$ 时 $x=190$，$y=4$；$t=2$ 时，$x=183$，$y=9$；……，$t=28$ 时 $x=1$，$y=139$。

5. 设数学组有 x 组，生物组有 y 组，体育组有 z 组，则本题就是求方程

$$3x+2y+8z=40 \qquad (1)$$

的整数解的问题。根据题意，z 只能取 1，2，3，4。

$z=1$ 时得方程 $3x+2y=32$，其正整数解为 $x=2$，$y=13$；$x=4$，$y=10$；$x=6$，$y=7$，$x=8$，$y=4$；$x=10$，$y=1$。

$z=2$ 时得方程 $3x+2y=24$，其正整数解为 $x=6$，$y=3$；$x=4$，$y=6$；$x=2$，$y=9$。

$z=3$ 时得方程 $3x+2y=16$，其正整数解为 $x=2$，$y=5$；$x=4$，$y=2$。

$z=4$ 时得方程 $3x+2y=8$，其正整数解为 $x=2$，$y=1$。

因此原方程的正整数解为：

$$\begin{cases} x=2\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 10\ \ 6\ \ 4\ \ 2\ \ 2\ \ 4\ \ 2 \\ y=13\ \ 10\ \ 7\ \ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 6\ \ 9\ \ 5\ \ 2\ \ 1 \\ z=1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 4 \end{cases}$$

答：全班 40 人的分组情况有：

组数 情况 / 组别	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一
数学	2	4	6	8	10	6	4	2	2	4	2
生物	13	10	7	4	1	3	6	9	5	2	1
体育	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4

6. 设有大马 x 匹，中马 y 匹，小马 z 匹。根据题意：

$$\begin{cases} x+y+z=100(\text{马有 100 匹}) & (1) \\ 3x+2y+\frac{1}{2}z=100(\text{瓦有 100 片}) & (2) \end{cases}$$

由（2）得 $6x+4y+z=200 \qquad (3)$

$(3)-(1)$ 得 $5x+3y=100 \qquad (4)$

由 $(5,3)=1$，$1|100$，知 (4) 有整数解。

由$3y=100-5x$得$y=\frac{5(20-x)}{3}$，因 y 为整数，故$3|(20-x)$。

当 x 依次取 2，5，8，11，14，17，20 时 y 依次取 30，25，20，15，10， 5，0。代入（1）得 z 依次取 68，70，72，74，76，78，80。

方程组有七组解：

$$\begin{cases}x=2，\\y=30，\\z=68；\end{cases}\begin{cases}x=5，\\y=25，\\z=70；\end{cases}\begin{cases}x=8，\\y=20，\\z=72；\end{cases}\begin{cases}x=11，\\y=15，\\z=74；\end{cases}\begin{cases}x=14，\\y=10，\\z=76；\end{cases}\begin{cases}x=17，\\y=5，\\z=78；\end{cases}\begin{cases}x=20，\\y=0，\\z=80。\end{cases}$$

答：（略）。

7. 设鸡 x 只，鸭 y 只，鹅 z 只。根据题意知：1 只鸡可换$\frac{1}{2}$只兔；1 只鸭可换$\frac{2}{3}$只兔，1 只鹅可换$\frac{5}{7}$只兔。由此得方程组：

$$\begin{cases}x+y+z=30 & （1）\\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+\frac{5}{7}z=20 & （2）\end{cases}$$

（方程（2）表示 x 只鸡、y 只鸭、z 只鹅共可换得 20 只兔）。

由（2）得$21x+28y+30z=840$ （3）

由（1）得$21x+21y+21z=630$ （4）

$(3)-(4)$得 $7y+9z=210$ （5）

由（5）得$y=\frac{210-9z}{7}=30-\frac{9}{7}z$

$=30-z-\frac{2}{7}z$ （6）

令$\frac{2}{7}z=k(k$ 是整数$)$，则

$z=\frac{7}{2}k=3k+\frac{1}{2}k$ （7）

令$\frac{1}{2}k=t$ 则 $k=2t$

将$k=2t$ 代入(7)得

$z=3(2t)+t=7t$。

将$z=7t$ 代入（6）得

$y=30-7t-\frac{2}{7}\times 7t=30-9t$。

将$y=30-9t$，$z=7t$代入(1)得

$x=30-y-z=30-(30-9t)-7t=2t$

即$\begin{cases}x=2t\\y=30-9t\\z=7t\end{cases}$（t为整数）。

要求正整数解，只需

$$\begin{cases}t>0\\30-9t>0\end{cases}\Rightarrow 0<t<\frac{30}{9}\Rightarrow 0<t<3\frac{1}{3}。$$

∴t 可以取 1，2，3。这时方程组的解为：

$\begin{cases}x=2,\\y=21,\\z=7;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=12,\\z=14;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6,\\y=3,\\z=21。\end{cases}$ --------------

答：共有鸡 2 只，鸭 21 只，鹅 7 只；或鸡 4 只，鸭 12 只，鹅 14 只；或鸡 6 只，鸭 3 只，鹅 21 只。

8. 设摸出的标有数字 2、3 和 5 的球分别为 x、y、z 个，根据题意有：

$\begin{cases}x+y+z=12 & （1）\\2x+3y+5z=43 & （2）\end{cases}$

$(1)\times 5$ 得 $5x+5y+5z=60$ （3）

$(3)-(2)$得 $3x+2y=17$ （4）

因为 x，y 都是正整数，在（4）中$y=1$时 $x=5$，只有一组解。

答：小明最多能摸出 5 个标有数字 2 的球。

9. 设每堆中分别由鸡蛋 x 个，鸭蛋 y 个，鹅蛋 z 个。则

$25x+40y+55z=400$，

化简得：$5x+8y+11z=80$ （1）

由于 x，y，z 都是正整数，z 只可能取 1，2，3，4，5，6。

当 $z=1$ 时得方程 $5x+8y=69$，其正整数为 $x=9$，$y=3$；$x=1$ 时 $y=8$。

当 $z=2$ 时得方程 $5x+8y=58$，其正整数为 $x=2$，$y=6$；$x=$

10，y = 1。

当z = 3 时得方程 5x + 8y = 47，其正整数为x = 3，y = 4。

当z = 4 时得方程 5x + 8y = 36，其正整数为x = 4，y = 2。

z = 5 时得方程 5x + 8y = 25，无正整数解。

z = 6 时得方程 5x + 8y = 14，无正整数解。

具体分堆方法如下表：

堆号	鸡蛋（个）	鸭蛋（个）	鹅蛋（个）
一	1	8	1
二	2	6	2
三	3	4	3
四	4	2	4
五	9	3	1
六	10	1	2

答：共有 66 个，分堆方法如上表。

10. 设获一、二、三等奖的人数分别为 x，y，z 根据题意有：

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 22 & (1) \\ 9x + 4y + z = 22 & (2) \end{cases}$$

$2 \times (2)$得 $18x + 8y + 2z = 44$ （3）

$(3) - (1)$得 $12x + 5y = 22$ （4）

解（4）求得正整数解为x = 1，y = 2。

代入（2）可求得z = 5。

答：获一等奖的有 1 人，获二等奖的有 2 人，获三等奖的有 5 人。

11. 设取 3 米长的管子 x 根，5 米长的管子 y 根，则

$$3x + 5y = 78,$$

$$3x = 78 - 5y$$

$$x = 26 - \frac{5}{3}y。$$

由x，y都是正整数知y是3的倍数。当y = 0 时 x = 26；y = 3 时 x = 21；y = 6 时 x = 16；y = 9 时 x = 11；y = 12 时 x = 6；y = 15 时 x = 1；y ≥

18 时 $x < 0$。不合题意舍去。

答：可以有 6 种不同取法。

12. 设所求三位数是$\overline{abc}$，则 a 为小于 10 的自然数，b、c 为小于 10 的整数，根据题意有：

$$(100a + 10b + c) \div 17 = a + b + c,$$

即 $83a - 7b - 16c = 0$，$7b + 16c = 83a$。因为 b、c 的最大值均为 9，$7 \times 9 + 16 \times 9 = 207$，而 $81 \times 3 = 243$，所以 a 只能取 1,2。当$a = 1$ 时得 $7b + 16c = 83$，解得整数解为 $b = 5$，$c = 3$。

当$a = 2$ 时 $7b + 16c = 166$，$16c = 166 - 7b$，因 16c 和 166 都是偶数，故 b 偶数，只能取 0,2,4,6,8，容易验证此方程无正整数解。

原方程只有$a = 1$，$b = 5$，$c = 3$一组解。

答：这个三位数 153。

13. 设这样的三位数为$\overline{abc}$，则 a 为小于 10 的自然数，b、c 为小于 10 的整数，根据题意有：

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c),$$

$$81a - 9b - 18c = 0,$$

化简得 $b + 2c = 9a$。要使三位数最小，必须 $a = 1$，$b + 2c = 9$，同理须 $b = 1$，这时 $2c = 8$，$c = 4$，最小三位数为 144。

由$b + 2c = 9a$且 b,c 的最大值为 9，$9 + 2 \times 9 = 27$，故 a 的最大值是 3。当$a = 3$ 时 $b + 2c = 27$，要使三位数最大，只有$b = 9$，$c = 9$，最大的三位数是 399。

答：所求最小的三位数是 114，最大的三位数是 399。

14. 设卖出 23 元一支的钢笔 x 支，16 元一支的钢笔 y 支，则

$23x + 16y = 500$，

$16y = 500 - 23x$，$y = \dfrac{500-23x}{16}$

$y = 30 - x + \dfrac{20-7x}{16}$ （1）

令$\dfrac{20-7x}{16} = k$（k 是整数），则

$7x = 20 - 16k$，$x = \frac{20-16k}{7}$，

$x = 2 - 2k + \frac{6-2k}{7}$ （2）

令$\frac{6-2k}{7} = t$（t 是整数），则

$2k = 6 - 7t$，$k = 3 - 3t - \frac{1}{2}t$ （3）

令$\frac{1}{2}t = m$（m 是整数），则$t = 2m$。

把 $t = 2m$ 代入(3)得 $k = 3 - 7m$，把 $k = 3 - 7m$ 代入(2)得 $x = 2 - 2 \times (3 - 7m) + 2m$，$x = 16m - 4$，把 $x = 16m - 4$ 代入(1)得 $y = 30 - (16m - 4) + (3 - 7m) = 37 - 23m$。

$$\therefore \begin{cases} x = 16m - 4 \\ y = 37 - 23m \end{cases}(\text{m 是整数})。$$

由 x，y 为正整数得

$$\begin{cases} 16m - 4 > 0 \\ 37 - 23m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m < \frac{37}{23} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} < m < 1\frac{14}{23}，$$ 因 m 是整数，故 m = 1。

$$\therefore x = 16 - 4 = 12，y = 37 - 23 = 14，$$

$$x + y = 12 + 14 = 26。$$

答：这些钢笔共有 26 支。

15. 显然 z 只能取 1，2，3。

当$z = 1$时，$2x + 3y = 16$，其自然数解为$x = 2$，$y = 4$；$x = 5$，$y = 2$。

当$z = 2$时，$2x + 3y = 9$，其自然数解为 $x = 3$，$y = 1$。

当$z = 3$时，$2x + 3y = 2$，显然无自然数解。

所以原方程的自然数解为：

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 4, \\ z = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \\ z = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 1, \\ z = 2。\end{cases}$$

16. 已知方程是二元二次方程，不能用解二元一次不定方程的方法求解。

因为$x=0$不是方程的解，所以原方程可化为

$$3x^2+12=xy,$$

$$3x+\frac{12}{x}=y, \qquad (1)$$

由 x，y 为整数，知$\frac{12}{x}$必为整数。故 x 为 12 的约数，即 x 可取 1，2，3，4，6，12 这几个值。代入（1）有：$x=1$ 时 $y=15$；$x=2$ 时 $y=12$；$x=3$ 时 $y=13$；$x=4$ 时 $y=15$；$x=6$ 时 $y=20$；$x=12$ 时 $y=37$。

即原方程的解为：

$$\begin{cases}x=1,\\y=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=12;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=13;\end{cases}\quad\begin{cases}x=4,\\y=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\y=20;\end{cases}\quad\begin{cases}x=12,\\y=37。\end{cases}$$

说明：原方程也可变形为：

$xy-3x^2=12$，$x(y-3x)=12$。当 x，y 为整数时，$y-3x$也为整数，x 是 12 的约数。以下解法同上。

17. 把方程变形为

$$(x-y)^2=27-2y^2$$

可知$27-2y^2\geq 0$，故 $0\leq y\leq 3$。

当$y=0$ 时，$27-2y^2=27$，无整数解。

当$y=1$ 时，$(x-1)^2=25$，$x-1=5$，$x=6$。

当$y=2$ 时，$27-2\times 2^2=19$，无整数解。

当$y=3$ 时，$(x-3)^2=9$，$x-3=3$，$x=6$。

所以原方程的整数解为

$$\begin{cases}x=6,\\y=1;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$$

18. 设这三批人数分别为 x，y，z，因 x，y，z 互不相等，不妨设$1<x<y<z$。

依题意有：

$$2\times 3\times 4\leq x\cdot y\cdot z\leq 29。$$

又$\because 2\times 3\times 5=30>29$，

所以$x\cdot y\cdot z=2\times 3\times 4=24$。

即这批学生看望老师的日期是 2 月 24 日，这天是星期日，所以 2 月 1

日是星期五。

答：2 月 1 日是星期五。

19. 设甲、乙、丙、丁四种书分别购买了 x、y、z、w 本，依题意有：

$$\begin{cases} x+y+z+w=10 & (1) \\ 3x+5y+7z+11w=70 & (2) \end{cases}$$

$(1)\times 3$ 得 $3x+3y+3z+3w=30$ （3）

$(2)-(3)$得 $2y+4z+8w=40$

化简得 $y+2z+4w=20$

因为每种书至少买了一本，所以 w 只能取小于 5 的自然数。$w<5$。

当 $w=4$ 时，$y+2z=4$，y 必为偶数。$Y=2$ 时 $z=1$，代入(1)得 $x=3.$ 当 $y=4$ 时 $z=0$，不合题意舍去。

当 $w=3$ 时，$y+2z=8$，y 必为偶数，$y=2$ 时 $z=3$，代入(1)得 $x=2$；$y=4$ 时 $z=2$，代入(1)得 $x=1$。$y=6$ 时 $z=1$，代入(1)得 $x=0$，不合题意舍去。

当 $w=2$，$y+2z=12$，y 必为偶数，$y=2$ 时 $z=5$，代入(1)得 $x=1$；$y=4$ 时 $z=4$ 代入(1)得 $x=0$，不合题意舍去。

当 $w=1$，$y+2z=16$，y 必为偶数。$y=2$ 时 $z=7$，代入(1)得 $x=0$；不合题意舍去。此时无解。

综上所述，原方程组的解为：

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2, \\ z=1, \\ w=4; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=2, \\ y=2, \\ z=3, \\ w=3; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=2, \\ w=3; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=5, \\ w=2。 \end{cases}$$

答：有四种不同的购买方法。

20. 设付给顾客 4 千克、3 千克、1 千克的分别为 x 包、y 包、z 包。根据题意，有$4x+3y+z=15$。

x 只可能取 0，1，2，3。

当$x=0$时$3y+z=15$，其整数解有 6 组：

$$\begin{cases} y=5, \\ z=0; \end{cases} \begin{cases} y=4, \\ z=3; \end{cases} \begin{cases} y=3, \\ z=6; \end{cases} \begin{cases} y=2, \\ z=9; \end{cases} \begin{cases} y=1, \\ z=12; \end{cases} \begin{cases} y=0, \\ z=15。 \end{cases}$$

当$x=1$时$3y+z=11$，其整数解有 4 组：

$$\begin{cases}y=3,\\z=2;\end{cases}\begin{cases}y=2,\\z=5;\end{cases}\begin{cases}y=1,\\z=8;\end{cases}\begin{cases}y=0,\\z=11。\end{cases}$$

当$x=2$时 $3y+z=7$，其整数解有 3 组：

$$\begin{cases}y=2,\\z=1;\end{cases}\begin{cases}y=1,\\z=4;\end{cases}\begin{cases}y=0,\\z=7。\end{cases}$$

当$x=3$时 $3y+z=3$，其整数解有 2 组：$\begin{cases}y=0,\\z=3;\end{cases}\begin{cases}y=1,\\z=0。\end{cases}$

答：共有 15 种付给方式。

第十五章　容斥原理

1. 已知集合$A=\{1、3、5、7\}$，$B=\{5、6、7、8\}$，求集合$A\cup B$。

2. 已知 6 的约数的集合为$A=\{1、2、3、6\}$，15 的约数的集合为$B=\{1、3、5、15\}$，求$A\cap B$。

3. 已知集合$A=\{a、b、c、d、f\}$，$B=\{a、b、d\}$，$C=\{e、f、g\}$

求：$A\cup B$，$A\cap B$，$B\cup C$，$B\cup C$。

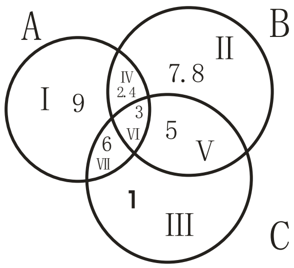
4. 已知集合$A=\{a、b、c、d、f\}$，$B=\{d、e、f\}$，$C=\{d、g、h\}$。

求：$A\cup B\cup C$，$A\cap B\cap C$。

5. 设集合$I=\{0、1、2、3、4、5、6、7、8、9\}$集合$A=\{2、4、8、9\}$，$\overline{A}$表示由所有属于 I 但不属于 A 的元素组成的集合，求$\overline{A}$，$A\cup\overline{A}$，$A\cap\overline{A}$。

6. 如图 A 圆，B 圆，C 圆相互分割成七个互不相交的部分，每一部分表示一个集合，图中的阿拉伯数字表示相应集合的元素，求集合 A、B、C；

$A\cap B$；$A\cup B$，$A\cap B\cap C$；$A\cup B\cup C$。



7. 求不超过 20 的正整数中是 2 的倍数或 3 的倍数的数共有多少个？

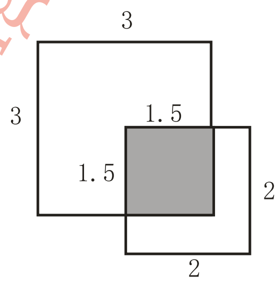
8. 某班组织了一次围棋和象棋比赛的活动，参加围棋比赛的有 22 人，参加象棋比赛的有 25 人，两种棋的比赛都参加的有 8 人，只有 6 人没参加比赛。试问这次参加棋类比赛（至少参加一项比赛）的有多少人？全班共有多少人？

9. 某班统计考试成绩，数学得 90 分以上有 25 人，语文得 90 分以上的有 21 人，两科中至少有一科在 90 分以上的有 38 人，问两科都得 90 分以上的有多少人？

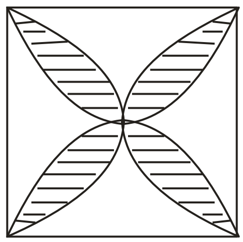
10. 有 100 位旅客，其中 10 人既不懂英语又不懂俄语，有 75 人懂英语，83 人懂俄语，问既懂英语又懂俄语的有多少人？

11. 从1~100的自然数中，至少能被 6 和 10 中一个数整除的数有多少个？

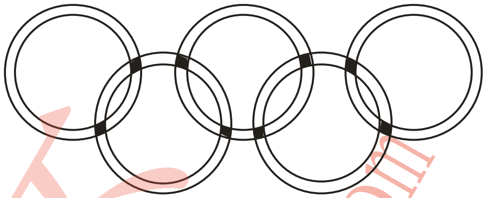
12. 边长为 2 的正方形与边长为 3 的正方形，如图放在桌面上，它们所盖住的桌面面积有多大？



13. 设右图中正方形边长为 1，半圆均以正方形的边长为直径，求图中阴影部分面积。



14. 五环图中每一个环，内半径为 4 厘米，外半径为 5 厘米，其中两两相交的小曲边四边形（如图中阴影部分）的面积相等，已知五个圆环盖住的总面积是 122.5 平方厘米，求每个小曲边四边形的面积（π 取 3.14）



15. 某班有团员 23 人，这个班里男生共 20 人，问这个班女生团员比男生非团员多多少人？

16. 某校组织棋类比赛，分成围棋，中国象棋和国际象棋三个组进行。参加围棋比赛的共 42 人，参加中国象棋比赛的共 51 人，参加国际象棋比赛的共 30 人，同时参加围棋和中国象棋比赛的共 13 人；同时参加围棋和国际象棋比赛的共 7 人；同时参加中国象棋比赛和国际象棋比赛的共 11 人，同时参加三种棋赛的有 3 人，问参加棋类比赛的共多少？

17. 盛夏的一天，有 10 个同学去冷饮店，向服务员交了一份需要冷饮的统计表，要可乐，果汁，凉茶的各有 5 人；可乐，果汁都要的有 3 人，可乐，凉茶都要的有 2 人；果汁，凉茶都要的有 2 人，三样都要的只有 1 人，证明其中一定有 1 人这三种饮料都没要。

18. 某班学生手中分别拿红、黄、蓝三种颜色的球。已知手中有红球的共 34 人，手中有黄球的 26 人，手中有篮球的共 18 人，其中手中有红、黄、蓝三种球的有 6 人；而手中只有红、黄两种球的有 9 人；手中只有黄、蓝两种球的有 4 人；手中只有红蓝两种球的有 3 人。那么，这个班共有多少人？

19. 求1~200的自然数中不能被 2、3、5 中任何一个数整除的数有多少个？

20. 在一次数学竞赛中，甲答错了考题总数的$\frac{1}{4}$，乙答错了 3 道，甲、乙都错的题占题目总数的$\frac{1}{6}$，求甲、乙都答对的题目数。

分析解答

1. 符号“∪”读作“并”，“A∪B”读作“A 并 B”。$A\cup B$表示由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集。于是

   $A\cup B=\{1,3,5,6,7,8\}$。

   注意，由于集合中的元素是不重复的。因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次。

2. 符号“∩”读作“交”，“A∩B”读作“A 交 B”。$A\cap B$表示由所有既属于 A 又属于 B 的元素（即 A 与 B 的公共元素）所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集。于是

   $A\cap B=\{1，3\}$。

   本题中$A\cap B$即由 6 与 15 的公约数所组成的集合。

3. $A\cup B=\{a，b，c，d，f\}$，

   $A\cap B=\{a，b，d\}$，

   $B\cup C=\{a，b，d，e，f，g\}$，

   $B\cap C=\emptyset$。

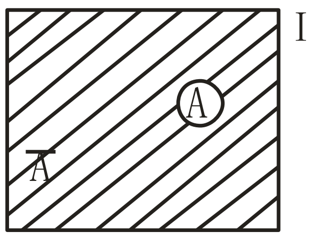
   由于集合 B 与 C 没有公共元素，因此$B\cap C$不包含任何元素，这种不含任何元素的集合称作空集，记作$\emptyset$。

   前述并集与交集的概念不难推广到三个集合，以至几个集合的情形。

4. $A\cup B\cup C=\{a，b，c，d，e，f，g，h\}$，

   $A\cap B\cap C=\{d\}$.

5. 我们称由全体研究对象组成的集合叫做全集，题中全集 I 是　由全体阿拉伯数字组成的集合。$\overline{A}$表示由所有属于 I 但不属于 A 的元素组成的集合，$\overline{A}$称作集合 A 在全集 I 中的补集，简称补集。



如右图，整个长方形表示全集 I，圆表示集合 A，阴影部分表示补集$\overline{A}$。

本题中　$\overline{A}=\{0,1,3,5,6,7\}$，

$A\cup\overline{A}=I$，

$A\cap\overline{A}=\emptyset$。

6. 集合 A 表示 A 圆中所含阿拉伯数字所组成的集合，于是

$A=\{2,3,4,6,9\}$，

同理 $B=\{2,3,4,5,7,8\}$，

$C=\{1,3,5,6\}$。

不难由示意图看出

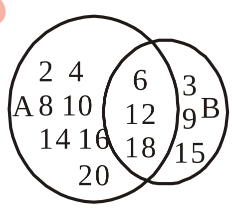
$A\cap B=\{2，3，4\}$，

$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$A\cap B\cap C=\{3\}$，

$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

7. 由已知得$A=\{2,4,6,8，\ldots，18,20\}$，$B=\{3,6,9,12,15,18\}$。



我们用$|A|$、$|B|$分别表示集合 A 和 B 所含的元素个数。问题即求$|A\cup B|$。

显然 $|A|=10$，$|B|=6$。由示意图中可以看出$|A\cup B|\neq 10+6$，因为交集$A\cap B$的 3 个元素被重复地多算了一次，应减去。于是

$|A\cup B|=10+6-3=13$。

上式可表示为公式：

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

我们称这一公式为包含与排除原理，简称容斥原理。

包含与排除原理告诉我们，要计算两个集合 A、B 的并集$A\cup B$的元素的个数，可分以下两步进行：

第一步　分别计算集合 A 和 B 的元素个数，然后加起来，即先求$|A|+|B|$，意思是分别把 A、B 的一切元素都“包含”进来，加在一起；

第二步　从上面的和中减去交集的元素个数，即减去$|A\cap B|$，意思是“排除”了重复计算的元素个数。

8. 设$A=\{$参加围棋比赛的学生$\}$，

$B=\{$参加象棋比赛的学生$\}$。

那么，$A\cap B$表示两种棋的比赛都参加的学生。由题意知

$|A|=22$，$|B|=25$，$|A\cap B|=8$。

$A\cup B$表示至少参加一次比赛的学生的集合。由容斥原理

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=22+25-8=39。$$

所以，参加了棋类比赛的人数为 39 人。

全班人数应为$39+6=45(人)$

9. 设$A=\{$数学成绩 90 分以上的学生$\}$

$B=\{$语文成绩 90 分以上的学生$\}$

那么，集合$A\cup B$表示两种中至少有一科在 90 分以上的学生，由题意知

$|A|=25$，$|B|=21$，$|A\cup B|=38$

现在要求两科都在 90 分以上的学生数，即求$|A\cap B|$。由容斥原理

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|$$
$$=25+21-38=8。$$

所以，两科都在 90 分以上的学生有 8 人。

10. 设$A=\{$懂英语的旅客$\}$，

$B=\{$懂俄语的旅客$\}$。

那么：$A\cup B$表示英语和俄语中至少懂一种的旅客的集合，$A\cap B$表示两种语言都懂的旅客的集合。由题意知

$|A|=75$，$|B|=83$，$|A\cup B|=100-10=90$。

由容斥原理，得

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|$$
$$=75+83-90=68。$$

所以，既懂英语又懂俄语的旅客有 68 人。

11. 设

$A=\{$1 到 100 中间能被 6 整除的数$\}$

$B=\{$1 到 100 中间能被 10 整除的数$\}$

由于，6 与 10 的最小公倍数是 30，于是

$$A\cap B=\{1 到 100 中既能被 6 又能被 10 整除的数\}$$
$$=\{1 到 100 中能被 30 整除的数\}。$$

设$[x]$表示小于等于 x 的最大整数，那么

$|A| = [100 / 6] = 16$，$|B| = [100 / 10] = 10$，

$|A \cap B| = [100/30] = 3$。

由容斥原理，得

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= 16 + 10 - 3 = 23$。

所以，1 到 100 的自然数中，至少能被 6 和 10 中一个数整除的数共有 23 个。

12. 在计算面积的问题中，有时必要用到容斥原理。

如果把两个正方形的面积加起来，得

$$2^2 + 3^2 = 13$$

就会发现，多计算了一块阴影部分面积。这块面积是$1.5^2 = 2.25$，应该从上面的和中减去。因此，两个正方形所盖住的面积应是

$$2^2 + 3^2 - 1.5^2 = 13 - 2.25 = 10.75。$$

13. 四个直径为 1 的半圆不但盖住了正方形，还有四个重叠的部分，这正好是要求的阴影部分。

设 A 表示上、下两个半圆，B 表示左、右两个半圆。那么，$A \cup B$表示边长为 1 的正方形，$A \cap B$表示图中阴影部分。如用$|A|$表图形 A 的面积，那么

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

$$= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1^2$$

$$= 1.57 - 1 = 0.57。$$

14. 每个圆环的面积为$\pi \times$（$5^2 - 4^2$），于是五个圆环的面积和为$5 \times \pi \times (5^2 - 4^2) = 141.3$（$\mathrm{cm}^2$）。

根据容斥原理，

阴影面积=五个圆环的面积和

$-$ 五个圆环所盖住的面积

$= 141.3 - 122.5$

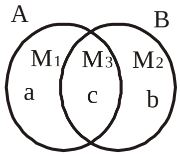
$= 18.8$（cm^2）

所以，每个小曲边四边形的面积为

$18.9 \div 8 = 2.35$（cm^2）

15. 设$A = \{$这个班的男生$\}$，

$B=\{$这个班的团员$\}$。如果，A、B 相互分割成三个不相等的部分；M_1表示男生非团员，M_2表示女生团员，M_3表示男生团员。



设 a，b，c 分别表示上述三个集合的元素个数。由条件可知

$$a+c=20，b+c=23。$$

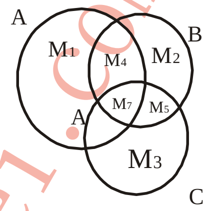
于是 $b-a=(b+c)-(a+c)$

$$=23-20=3(人)。$$

所以，女生团员比男生非团员多 3 人。

16. 容斥原理推广到三个有限集合，有如下公式：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|。$$



如图，$A\cup B\cup C$一般可分成互不相交的七部分。其中，M_1、M_2、M_3的元素仅属于某一个集合，而M_4，M_5，M_6的元素分别属于某两个集合，M_7则是三个集合的交集。上述公式也不难从这个图中得到直观解释，通常我们称这个图叫文氏图。设

$$A=\{参加围棋比赛的人\},$$
$$B=\{参加中国象棋比赛的人\},$$
$$C=\{参加国际象棋比赛的人\}。$$

那么，参加棋类比赛的人的集合为$A\cup B\cup C$。由题意知：

$$|A|=42，|B|=51，|C|=30，$$
$$|A\cap B|=13，|A\cap C|=7，|B\cap C|=11，$$
$$|A\cap B\cap C|=3。$$

由容斥原理，得

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\&=42+51+30-13-7-11+3\\&=95(人)\end{aligned}$$

所以，参加棋类比赛的共有 95 人。

17. 设$A=\{要可乐的人\}$，$B=\{要果汁的人\}$，$C=\{要凉茶的人\}$。

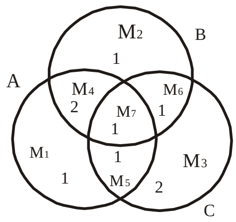
由题意，得

$$|A|=|B|=|C|=5，|A\cap B|=3。$$
$$|B\cap C|=2，|A\cap C|=2，|A\cap B\cap C|=1。$$

根据容斥原理

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$
$$= 5 + 5 + 5 - 3 - 2 - 2 + 1 = 9(\text{人})。$$

所以，共有 9 人要了饮料，10 人中有 1 人没有要饮料。



此题也可利用文氏图，逐个填写各区域所表示的集合元素的个数，然后求出最后结果。

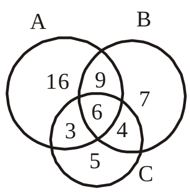
区域M_7(即 $A\cap B\cap C$）表示三种饮料都要的人，由题意应填数字 1。区域 M_4表示仅要了可乐和果汁的人，其人数为$3-1=2(\text{人})$。区域M_5表示仅要了可乐和凉茶的人，其人数为$2-1=1(\text{人})$。区域 M_1表示只要了可乐一种饮料的人，其人数为$5-1-2-1=1(\text{人})$。同理可把

区域M_2，M_3，M_6的人数逐个算出，分别填入区域内。由此得出要饮料的总人数为

$$1+1+2+2+1+1+1=9(\text{人})。$$

所以，10 人中有 1 人没有要饮料。

18. 此题用填写文氏图各区域元素个数的方法来解较为简便，设 A、B、C 分别表示手中有红球、黄球、篮球的人的集合。由题可逐一填出各区域元素的个数（如图）。



所以，全班人数为

$$16+7+5+9+4+3+6=50(\text{人})。$$

19. 设

$$A=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }2\text{ 整除的数}\},$$
$$B=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }3\text{ 整除的数}\},$$
$$C=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }5\text{ 整除的数}\}。$$

那么，$A\cap B=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }2\times3\text{ 整除的数}\}$，

$$A\cap C=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }2\times5\text{ 整除的数}\},$$
$$B\cap C=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }3\times5\text{ 整除的数}\},$$
$$A\cap B\cap C=\{1\text{ 到 }200\text{ 中间能被 }2\times3\times5\text{ 整除的数}\}。$$

设$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数，那么

$$|A|=[200/2]=100，|B|=[200/3]=66，$$
$$|C|=[200/5]=40，|A\cap B|=[200/6]=33，$$

$$|A\cap C| = [200/10] = 20，|B\cap C| = [200/15] = 13，$$
$$|A\cap B\cap C| = [200/30] = 6。$$

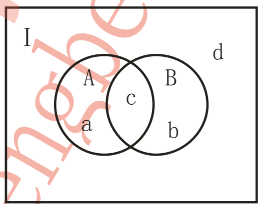
根据容斥原理，1 到 200 的自然数中至少能被 2、3、5 中一个数整除的数共有

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$
$$= 100 + 66 + 40 - 33 - 20 - 13 + 6$$
$$= 146(个)。$$

所以，1 到 200 的自然数中不能被 2、3、5 中任何一个数整除的数共有

$$200 - 146 = 54(个)。$$

20. 如图，全集 I 表示全部题目构成的集合，A、B 分别表示甲、乙答错的题目构成的集合。图中 a，b，c，d 分别表示由 A、B 分割成的各个区域（互不相交）中元素的个数，例如 d 为甲乙两人都答对的题目的个数。设全部题目的个数为 n，显见$n = a + b + c + d$。由题意得：



$$\begin{cases} a + c = \dfrac{n}{4}, & (1) \\ c + d = 3, & (2) \\ c = \dfrac{n}{6}。 & (3) \end{cases}$$

将（3）代入（1），得

$$a = \frac{n}{12}。$$

由于 a、b、c、d 均为非负整数，因此，n 只能取 12 的倍数：12，24，…。

将（3）代入（2），得

$$b = 3 - \frac{n}{6}。$$

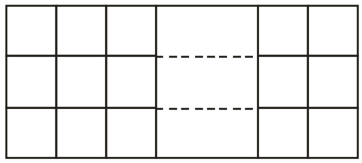
由此解得 $n = 12$，$b = 1$，$c = 2$，$a = 1$。

于是 $d = n - (a + b + c) = 12 - (1 + 2 + 1) = 8$。

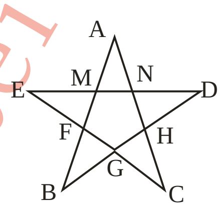
所以，甲、乙两人都答对的题共 8 道。

第十六章　计数问题（一）

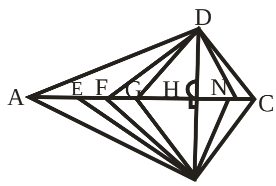
1. 用长短相同的火柴棍摆成3×1996的方格网，（每一个小方格的边长为一根火柴棍长（如图），共需用多少根火柴棍。



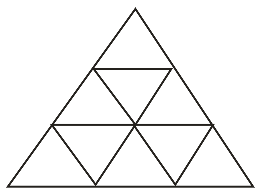
2. 如图的五角星图形中能数出多少条线段。



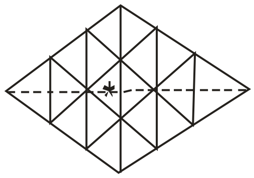
3. 图中能数出多少条线段？能救出多少个三角形？



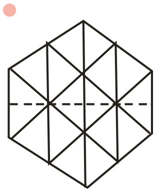
4. 图中三角形，平行四边形，梯形个数的和是多少？



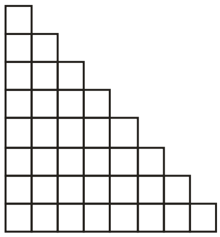
5. 如图是由 18 个大小相同的小正三角形拼成的四边形，其中某些相邻的小三角形可以拼成较大的正三角形若干个，那么，图中含“*”号大小正三角形有多少个？



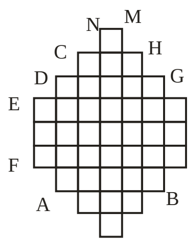
6. 图中的小三角形都是边长是 1 的小正三角形，问图中能数出多少个三角形？



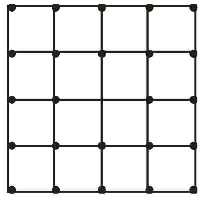
7. 图中每个小方格都是边长为 1 的小正方形，问能数出多少个正方形？



8. 图中每个小方格都是边长为 1 的小正方形问能数出多少个正方形？



9. 如图，在一块木板上画有4×4方格网，并钉了 24 颗铁钉（图中每个小方格是边长为 1 的正方形），如果用线绳围正方形，最多可围出多少个？



10. 从 1 开始，依次写到 150，这 150 个自然数共有几个数字？

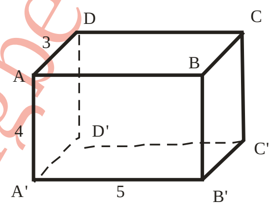
11. 有一本书共 500 页，编上页码 1，2，3，……。问数字 1 在页码中共出现多少次？

12. 在0~1000的整数中，数字 0 出现了多少次？

13. 用足够数量的一分，五分和一角的硬币凑成二元钱，共有多少种不同方法？

14. 问$101\times102\times\cdots\cdots\times199\times200$这 100 个数的乘积的末尾有多少个连续的零？

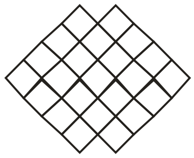
15. 有 7 个棱长分别是 3 厘米，4 厘米，5 厘米相同的长方体，把它们的某些面染上红色，使得这些长方体中有只有一面是红色的。有两面是红色的，有三面是红色的，有四面是红色的，有五面是红色的，有六面是红色的，染色后把所有长方体分割成棱长为 1 厘米的正方体，分割完后恰有一面是红色的小正方体最多有几个？



16. 两个自然数 a 与 b,它们的最小公倍数是 60，那么，这两个自然数的差有多少种可能的值？

17. 已知 9 个连续的自然数，它们都大于 80，那么其中质数至多有多少个？

18. 图中每个小方格都是边长为 1 的小正方形，那么，图中共能数出多少个正方形？



19. 分别写着 1，2，3……13 的卡片各 2 张，任意取出两张，计算这两张卡片上的数的积，这样得到的积中最多有多少个能被 6 整除？

分析解答

1. 横放需1996×4根，竖放需1997×3根。共需

$$1996\times4+1997\times3=1996\times(4+3)+3=13975(\text{根})。$$

2. 在线段 AB 上两个分点，共能数出$1+2+3=6$条线段。因此，这个五角星图形中共能数出线段 $6\times5=30(\text{条})$。

3. 能数出线段共

$$(1+2+3+4+5+6+7)+6+7+1=42(\text{条})。$$

能数出三角形共

$$(1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5)+4=40(\text{个})。$$

4. 三角形的个数$=1+3+10=13$；

平行四边形的个数$=6+9=15$；

梯形的个数$=(1+1+4)\times3=18$。

所以，图中三角形、平行四边形、梯形个数之和是

$13+15+18=46$。

5. 分类进行计数，设小正三角形边长为 1。

边长为 1 的正三角形有 1 个；

边长为 2 的正三角形有 4 个；

边长为 3 的正三角形有 1 个；

因此，图中包含“*”的所有大、小正三角形共有$1+4+1=6(\text{个})$。

这种分类统计的方法在计数问题中是最常用方法之一。

6. 边长为 1 的三角形共有$(3+5)\times2=16(\text{个})$。

边长为 2 的三角形共有$3+3=6(\text{个})$。

所以，图中共能数出

$16 + 6 = 22$个三角形。

7. 分类统计

1×1的正方形共有$1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 36$(个)，

2×2的正方形共有$1 + 2 + 3 + \cdots + 6 = 21$(个)，

3×3的正方形共有$1 + 2 + 3 + 4 = 10$(个)，

4×4的正方形共有$1 + 2 = 3$(个)。

所以，图中共有正方形$36 + 21 + 10 + 3 = 70$(个)。

8. 我们进行分类统计。

先考察正方形 ABCD 中的正方形，有$5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 55$(个)。

再考察有一边在 EF 上的正方形：

边长为 1 的有 3 个，边长为 2 的有 2 个，边长为 3 的有 1 个，共有$3 + 2 + 1 = 6$(个)。

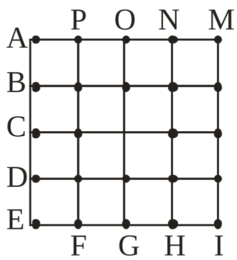
与 EF 情况相同线段共 4 条。

接着考察以 NM 为一边的正方形，有 1 个，与 NM 情况相同的线段共有 2 条。

综合以上情况，可得图中正方形的总数为

$55 + 6 \times 4 + 1 \times 2 = 81$(个)。

9. 先把四周各点标上字母（如图），再分类进行统计：



边长等于 1 的有$4 \times 4 - 4 = 12$(个)；

边长等于 2 的有$3 \times 3 = 4 = 5$(个)；

边长等于 3 的有$2 \times 2 = 4$(个)；

边长等于 4 的有 1 个；

边长等于 DF 的有 5 个；

边长等于 CF 的有$4 \times 2 = 8$(个)；

边长等于 BF 的有 2 个；

边长等于 CG 的有 1 个。

所以，最多可围出正方形

$12+5+4+1+5+8+2+1=38(\text{个})$。

10. 我们可分下列几种情况统计：

一位数 1—9，共 9 个。有 9 个数字；

二位数 10—99，共 90 个。有$2\times 90=180$ 个数字；

三位数 100—150，共 51 个。有$3\times 51=153$ 个数字。

所以，共有数字$9+180+153=342(\text{个})$。

11. 我们可以根据 1 分别在个位、十位、百位上出现的次数来统计。

因为每连续十个自然数中，个位上就出现一次 1，因此，个位上出现的次数为$500\div 10=50(\text{次})$。又每一百个连续自然数中，十位上出现 1 的数有 10 个，所以十位上出现 1 的次数显然为$5\times 10=50(\text{次})$。500 个数中，百位上出现 1 的数显然有 100 个。因此，总共出现 1 的次数是

$50+50+100=200(\text{次})$。

12. 我们可以用分类统计的方法。

二位数 10，20，…，90 中，0 出现了 9 次。

三位数　101，102，…，109，110，120，…190，

201，202，…，209，210，220，…290，

301，302，…，309，310，320，…390，

…………………………………………………

901，902，…，909，910，920，…990。

中，0 共出现了$18\times 9(\text{次})$；

三位数 100，200，…，900 中，0 共出现了2×9 次；

0 和 1000 中，0 出现了 4 次。

在 0—1000 的整数中，0 共出现了　$9+18\times 9+2\times 9+4=193(\text{次})$。

13. 用分类统计的方法解题，主要是分好类。分类相当于把全体对象分割成若干个部分，分类的原则是“不重不漏”。“不重”指任意两个部分间没有公共元素，“不漏”指所有各部分合并后等于全体对象。有时分类方法不是唯一的，我们应选择简明的。

由于一角的币值最大，我们按二元钱中一角币的个数可分成 21 种不同情

况，当一角币的个数确定后再考虑五分币的个数有多少种情况，其余的应用一分币补足。凑足二元钱的各种情况可列成下表：

序号	一角币个数	五分币个数	方法种数
1	20	0	1
2	19	0, 1, 2	3
3	18	0, 1, 2, 3, 4	5
4	17	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	7
⋮	⋮	⋮	⋮
20	1	0, 1, 2, 3, ⋯ ⋯ , 38	39
21	0	0, 1, 2, 3, ⋯ ⋯ , 39, 40,	41

所以，凑成二元钱的不同方法有

$$1+3+5+\cdots+39+41=\frac{1}{2}(1+41)\times 21=21^2=441(\text{种})。$$

14. 要使乘积的末尾有一个零，必需有一组质因数 2 和 5 相乘。在 101—200 这些数中，含有质因数 2 的个数较质因数 5 的个数多。因此，可以只考虑质因数 5 的个数，就能推断出乘积末尾零的个数。

在 101—200 这 100 个自然数中，含有质因数 5 的数可作如下分类：

（1）末尾是 0 的数：110，120，⋯，190，200，其中 150，200 各含有 2 个因数 5，其余各含 1 个因数 5，共含 12 个因数 5。

（2）末尾是 5 的数：

①只含有一个质因数 5 的数：105，115，135，145，155，165，185，195，共 8 个；

②含有两个质因数 5 的数只有 175 一个；

③含有 3 个质因数 5 的数只有 125 一个。

共含有 13 个因数 5。

综合（1）、（2），乘积中共含有质因数 5 为 $12+13=25(\text{个})$。

所以，乘积末尾有 25 个连续的零。

15. 先分下面几种情况讨论：

（1）只有一面染红色。应将$AA'B'B$染成红色，这样所得一面红色小正方体最多，有 20 个，其它染色方法都将少于 20 个。

（2）有二面染红色。应将$AA'B'B$ 和$CC'D'D$两面染红色，这样所得一面为红色小正方体最多，共有 40 个。

（3）有三面染红色。应将$AA'B'B$，$CC'D'D$ 和$BB'C'C$染成红色，这样所得

一面为红色小正方体最多，有 36 个。

（4）有四面染红色。应将$AA'B'B$，$BB'C'C$，$CC'D'D$，$DD'A'A$四面染成红色，这样所得一面为红色的小正方体最多，有 32 个。

（5）有五面染红色时，最多能得到一面为红色的小正方体$32-8+3=27(个)$。

（6）六面都染红色时，能得到$27-5=22$个一面为红色的小正方体。

由于两面染红色时，能得到一面为红色的小正方体最多。因此，在这七个长方体中，有两个两面染红色，其它情况各一个。这样所得一面染红色的小正方体最多，共有

$22+27+32+36+20+2\times40=217(个)$。

16. 因$[a，b]=60=2^2\times3\times5$。60 的 12 个约数：1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60。这里 a，b 均为 60 的约数，不妨设$a\geq b$。

（1）当$a=60$ 时，b 可取 12 个值，于是$a-b$可取 12 个不同的值：59，58，57，56，55，54，50，48，45，40，30，0；

（2）当$a=30$时，b 可取 4，12，20。所以，$a-b$可取三个不同的值：26，18，10；

（3）当$a=20$时，b 可取 3，6，12，15。所以，$a-b$可取四个不同值：17，14，8，5；

（4）当$a=15$时，b 可取 4，12。所以，$a-b$可取两个不同值：11，3；

（5）当$a=12$时，b 可取 5，10。所以，$a-b$可取两个不同值：7、2。

因此，a 与 b 差的不同值共有

$12+3+4+2+2=23(种)$。

17. 9 个连续的自然数中有 4 个偶数，即至多有 5 个连续的奇数。因为大于 80 的质数必为奇数，于是质数只可能在这 5 个连续的奇数中。因为三个连续的奇数中必定有一个是 3 的倍数，而且大于 80，因此他一定是合数。所以，在这 5 个连续的奇数中质数个数不能超过 4 个。这里采用了逐次淘汰的方法。

另外，在 101—109 这九个连续的自然数中，有 101，103，107，109 是质数，这就是说，在 9 个连续的自然数中，可以有 4 个质数。

综上所述，在大于 80 的 9 个连续的自然数中至多有 4 个质数。

本题的讨论包括两个方面：一方面说明大于 80 的 9 个连续的自然数中质数不能超过 4 个；另一方面又给出了在大于 80 的 9 个连续的自然数中存在 4

个质数的实例。综合这两方面才能得到上述结论。

18. 一个4×4的方格网中能数出正方形的个数为

$4^2+3^2+2^2+1^2=30$(个)。

重叠部分为一个3×3的方格网，能数出正方形的个数为

$3^2+2^2+1^2=14$(个)。

由容斥原理，共能数出正方形的个数为

$30\times2-14=46$(个)。

19. 从 1 至 13 中取两个自然数的乘积是 6 的倍数，其最小值是1×6，最大值是$12\times13=26\times6$。经分析和检验，仅有17×6，19×6，21×6，23×6，25×6无法实现。所以 1—13 中取两个自然数的乘积能被 6 整除的共有$26-5=21$(个)。

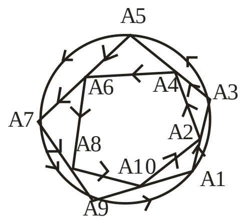
第十七章　计数问题（二）

1. 一根绳子对折后，从中间剪一刀，用这种方法剪过 1993 次后，这根绳子变成多少段？

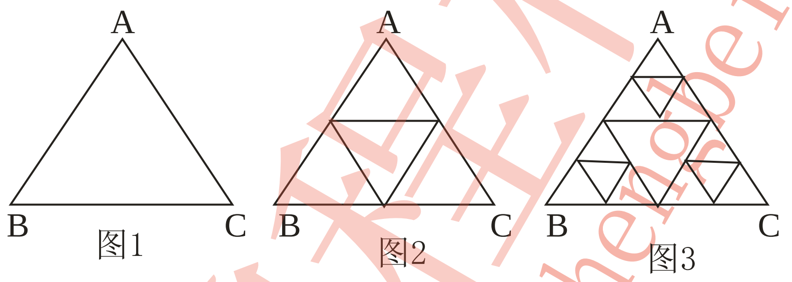
2. 一个长方形中任意点了 10 个点，以这 10 个点及长方形的 4 个顶点为端点的连线（不能有两条线段相交）最多能把已知长方形分割成多少个相互不重叠的三角形区域？

3. 教师节前夕，某校 40 名学生给老师做大红花，分到每人手中的纸从 7 张到 46 张各不相同，规定用 3 张或 4 张做一朵花，并且要求每人把分给自己的纸全部用完，并且尽可能多做一些花，那么，其中用 4 张纸做的花共多少朵？

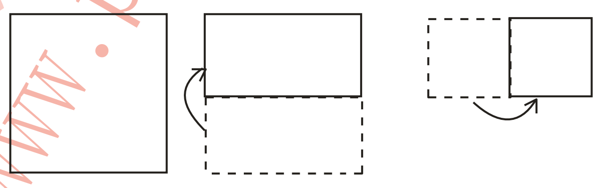
4. 有 10 个村庄及联系它们的道路如图所示。其中村庄分别用A_1，A_2……A_{10}表示，某人从A_1出发按箭头方向绕一圈，最后由A_{10}回到A_1，每个村庄至多经过一次，有多少种不同走法？



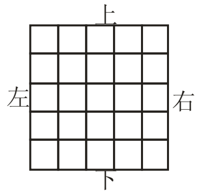
5. 把一个底边在下的三角形 ABC 如图分割成 4 个三角形（参看图 2）对于图 2 中各底边在下的三角形再进行一次上边分割，这时ΔABC被分割成 13 个三角形，（参看图 3）问如此分割 5 次后，ΔABC分割成多少个三角形？



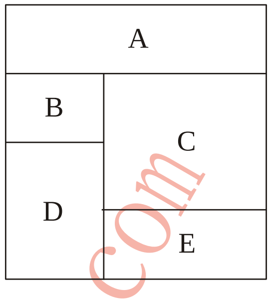
6. 将正方形纸片由下往上对折，再由左向右对折，称为完成一次性操作，按上边规则完成五次操作以后，剪去所得小正方形的左下角，问，当展开这张正方形纸片后，一共有多少个小洞孔？



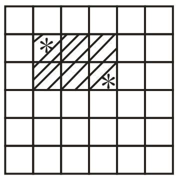
7. 如图，图中有 25 个小方格，要把 5 枚硬币放在方格里，使每行每列只出现一枚硬币，那么共有多少种方法？



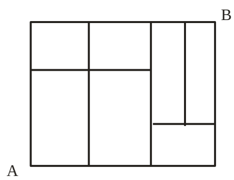
8. 如图，把 A、B、C、D、E 这五部分用四种不同颜色染色，且相邻的部分不能使用同一种颜色，不相邻的部分可以使用同一种颜色，那么这幅图一共有多少种不同的着色方法？



9. 图为6×6的正方形方格网，如图，其中有两个小正方形中含“*”号，问包含有两个“*”在内的由小正方形构成的长方形（包括正方形）共有多少个？



10. 右图是某地的街道图，有一人要从 A 走到 B。问总路程最短的路线共多少种？



11. 现有红、黄、绿、蓝四种颜色的小旗各一面，用其中若干面挂在旗杆上作信号，不同顺序表示不同信号，问一共能表示多少种不同信号？

12. 有红、黄、蓝、紫、白五种颜色的塑料花，把不同颜色的任意三种扎成一串，可以组成多少种不同的花束？

13. 数 1447，1005，1231 有某些相同的特点，每一个数都是以 1 为首的四位数，且每个数恰有两个数字相同，问这样的数共有多少个？

14. 从 0，1，2，3，4 这五个数字中任取四个数组成没有重复数字的四位数，问至少能组成多少个这样的四位数？其中能被 3 整除的有多少个？把这些能被 3 整除的四位数从小到大排列起来，那么第 10 个是几？

15. 光明小学六年级甲、乙、丙三个班组织了一次文艺晚会，共演出十四个节目，如果每个班至少演出三个节目，那么，这三个班演出节目数的不同情况共有多少种？

16. 把一个长方体木块表面涂满红色后，分割成若干个同样大小的小长方体，其中只有两个面涂上红色的小长方体恰好有 12 块，那么至少要把这个大长方体分割成多少个小长方体？

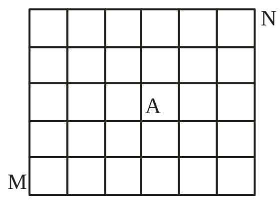
17. 设 a 与 b 是两个互不相等的自然数，如果它们的最小公倍数是 72，那么，a 与 b 的和可以有多少种不同的值？

18. 有个机器人，对自然数列 1 开始由小到大按如下规则进行染色，凡能表示为两个合数之和的自然数都染成红色，不合上述要求的自然数染成黄色（如 $23=15+8$，23 染成红色，1 染成黄色），那么，染成黄色的数有多少个？

19. 右图为某城市街道图，有 7 条南北向街，6 条东西向街。

（1）如果有人从城的西南角 M 到东北角 N，最短的走法有多少种？

（2）如果 A 处由于修路不能通行，最短走法有多少种？

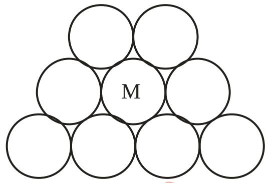


20. 有 9 张同样大小的纸片，其中标有数码“1”的有 1 张；标有数码 2 的有两张；

标有数码 3 的有 3 张；标有数码 4 的也有 3 张。把这 9 张纸片如图放置在一起，但标相同数码的纸不许靠在一起；问：

（1）如果 M 位上放置标有数码“3”的纸片，共有多少种不同放置方法？

（2）如果 M 位上放置标有数码“2”的纸片共有多少种不同放置方法？



分析解答

1. 在日常生活或生产实践中，人们常常需要统计某些事物的数目，或者说需要数一数它们的个数。这是数学中最基本的问题之一，通常称作计数问题。

解决计数问题时，试验归纳方法，是经常被采用的方法。先用试验方法，找出有关数的特征或规律，然后再求需要统计的数目。

一根绳子对折后，从中剪一刀，得到 3 段（如图 1），比原来增加了 2 段，可写成$3=1+2$的形式；把其中一段对折后，同样从中剪一刀，又可增加 2 段，共有$1+2\times 2=5$段。依次类推，每剪一次增加 2 段。于是，用上述方法剪过 1993 次后，原先那段绳子变成了

$1+2\times 1993=3987$（段）。

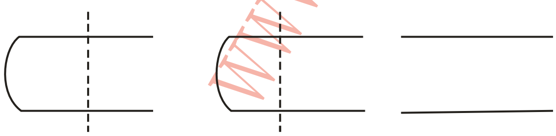


图 1　　　　　　　　图 2

一般地，一根绳子用上面的方法剪过几次后，可得（$1+2n$）段。

2. 从最简单的情况入手分析，设长方形中的点的个数为 n，分割的区域数最多为 a_n。

当$n=1$时，易得$a_1=4$（如图 1）

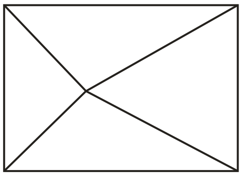


图 1

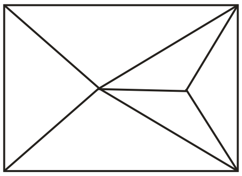


图 2

当$n=2$时，无论第 2 个点落在某个三角形区域内或某两个三角形区域的公共边上，最多能增加 2 个三角形区域。所以，$a_2=4+2$。

……………………………………………………………

不难发现，一般地有递推关系式

$$a_n=a_{n-1}+2。$$

由$a=4$ 和$a_n=a_{n-1}+2$ 可得

$$a_n=4+2(n-1)$$

当$n=10$ 时，$a_{10}=4+2\times 9=22$。

所以，这 10 个点最多能把长方体分割成 22 个三角形区域。

3. 根据题目要求：每人必须把手中的纸全部用完，并且尽可能多做一些花。我们把每人做花朵数按顺序排列起来：

每人手中纸的张数	7	8	9	10	11	12	13	…	43	44	45	46
用 3 张纸做的花数	1	0	3	2	1	4	3	…	13	12	15	14
用 4 张纸做的花数	1	2	0	1	2	0	1	…	1	2	0	1

由此发现：用 4 张做的花的朵数，总以 1，2，0 为周期，循环出现。每个周期中，用 4 张纸做的花的朵数为$1+2+0=3$(朵)。从$7-45$共有 13 个周期。因此，用 4 张纸做的花数目应是$3\times 13+1=40$(朵)。

4. 设从A_1按箭头方向走到A_{n+1}的走法为a_n。那么，a_9为所求的走法（因为A_{10}到A_1只有一种走法）。

$A_1\to A_2$只有一种走法，所以$a_1=1$。

$A_1\to A_3$，有两种走法，所以$a_2=2$。

从图中可以发现，当$n\geq 3$时，有递推关系：$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$。

由此可推算出：

$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=8$，$a_6=13$，$a_7=21$，$a_8=$

34，$a_9 = 55$。

所以，从A_1出发按箭头方向绕一圈回到A_1共有 55 种不同走法。

5. 如果我们把每次分割后所得的三角形分成正放和倒放两类，那么不难发现：

（1）每次分割后正放着的三角形个数是上次分割后正放着的三角形数的三倍；

（2）每次分割后倒放着的三角形个数是上次分割后三角形的总数。

设a_n为 n 次分割后的三角形总数。那么

当 $n = 1$ 时，$a_1 = 4 = 3 + 1$，

其中 3 为正放三角形的个数，1 为倒放着三角形的个数。

当$n = 2$ 时，$a_2 = 3 \times 3 + 4 = 13$。

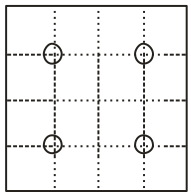
当$n = 3$ 时，$a_3 = 3^3 + 13 = 40$。

当$n = 4$ 时，$a_4 = 3^4 + 40 = 121$。

当$n = 5$ 时，$a_5 = 3^5 + 121 = 364$。

所以，分割 5 次后，ΔABC被分割成 364 个三角形。

6. 一次操作后，层数由 1 变为 4，若剪去所得小正方形左下角，展开后只有 1 个小洞孔，恰是大正方形的中心。



连续两次操作后，折纸层数为4^2，剪去所得小正方形左下角，展开后大正方形上留下$4^{2-1} = 4^1 = 4$个小洞孔。

不难归纳出，连续五次操作后，折纸层数为4^5，剪去所得小正方形左下角，展开后大正方形上共留有$4^{5-1} = 4^4 = 256$个小洞孔。

7. 第一枚硬币有 25 种放法，第一枚位置确定后第二枚有 16 种放法（与第一枚硬币不同行也不同列）。

同理，第二枚的位置确定后，第三枚有 9 种放法，第三枚的位置确定后，第四枚有 4 种放法。第四枚位置确定后，第五枚只有一种放法。

由乘法原理，共有

$$25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 14400$$

种不同放法。

8. A 有 4 种着色方法，B 有 3 种着色方法，C 有 2 种着色方法，D 有 2 种着色方法，E 有 2 种着色方法。由乘法原理，该图共有$4\times3\times2\times2\times2=96$种着色方法。

9. 我们把包含两个“*”在内的长方形的四条边称作上边、下边、左边和右边。那么

上边由阴影图形向上，有 2 种选法；

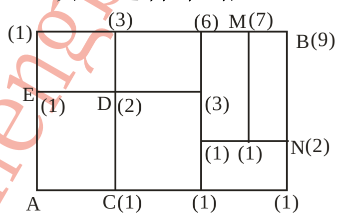
下边由阴影图形向下，有 4 种选法；

左边由阴影图形向左，有 2 种选法；

右边由阴影图形向右，有 3 种选法；

由乘法定理，包含两个星号“*”的长方形有$2\times4\times2\times3=48$(个)。

10. 图中共有 15 个路口（包括 A、B 在内），由 A 到 B，必须经过各个路口。



由 A 到各路口的最短走法可由加法原理逐个算出。例如，由 A 到 C 只有一种走法，由 A 到 E 也只有一种走法，由 A 到 D 可经 C，也可经 E，所以由 A 到 D 应由$1+1=2$(种)走法。运用同样的方法可把由 A 到各路口的最短走法数算出，标在相应的路口旁（如图）。

由此可知，由 A 到 B 的最短路线共有 9 种。

11. 分下列几种情况讨论。

用一面旗帜表示信号，有 4 种；

用两面旗帜表示信号，根据乘法原理，有$4\times3=12$(种)；

用三面旗帜表示信号，根据乘法原理，有$4\times3\times2=24$(种)；

用四面旗帜表示信号，根据乘法原理，有$4\times3\times2\times1=24$(种)。

所以，共能表示$4+12+24+24=64$种不同信号。

12. 如果我们先考虑从五种颜色的花中，有顺序的选三种，根据乘法原理有

$$5\times4\times3=60$$

种不同选法。但是，由题意可知，三种花扎成一束，是把三种花组成一组，与颜色顺序无关。

而确定三种颜色（例如红、黄、白）有顺序区别的排列方法共有 $3\times2\times1=6$ 种，在无顺序区别时，这 6 种排列只能看作一种花束。所以题中要求的花束种数应是

$$60\div6=10(种)。$$

13. 我们把满足要求的数分成两类：第一类除了千位数是 1 外，还有一个 1；第二类仅千位数是 1。

在第一类数中，另外一个 1 可能在百位、十位或个位，有三种不同情况。其余两个数位上的数字可从 0，2，3，4，5，6，7，8，9 中任取两个做排列，有9×8种方法。根据乘法原理，第一类数共有$3\times9\times8=216(个)$。

在第二类数中，个位、十位、百位上的数字有两个相同（但不等于 1）。另一个数既不等于 1，也不等于这相同的两个数，它可能在个位、十位、百位上，有三种不同情况，并且它可以是 0，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数中任何一个，而相同的两个数只能是余下八个数中的任何一个。根据乘法原理，第二类数共有

$$(9\times8)\times3=216(个)。$$

由加法原理，符合题目要求的数共有$216+216=432(个)$。

14. （1）由于千位数字不能为零，所以千位数字只能有 4 种取法，考虑到没有重复数字的要求，百位、十位、个位数字的取法分别是 4 种、3 种、2 种。由乘法原理，能组成没有重复数字的四位数有$4\times4\times3\times2=96(个)$。

（2）只有 0，1，2，3；0，2，3，4 才能组成能被 3 整除的四位数。共有 $(3\times3\times2\times1)\times2=36(个)$。

（3）把（2）中的数从小到大排起来：1023， 1032， 1203，1230，1302，1320，2013，2031，2034， 2043， 2103。第 10 个数是 2043。

15. 把 14 分成三个大于等于 3 的整数的和，有下列几种分法：

$$\begin{aligned}14&=3+3+8\\&=3+4+7\\&=3+5+6\\&=4+4+6\end{aligned}$$

$$=4+5+5$$

对于第一种分法。三个班演出节目数的不同情况有三种。

对于第二种分法，相应的情况有$3\times2\times1=6$(种)。

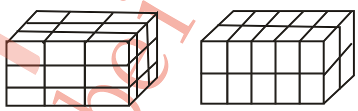
对于第三种分法，相应的情况也有$3\times2\times1=6$(种)。

对于第四种分法，相应的情况有三种。

对于第五种分法，相应的情况有三种。

所以，这三个班演出的节目数共有$3+6+6+3+3=21$种不同情况。

16. 把一个表面红色的长方体分割成若干个大小相同的小长方体，其中只有两面是红色的小长方体只能位于每条棱中间的部分。若每条棱有一块两面涂红色的小长方体，则需将长方体的长、宽、高均三等分，共分割成$3^3=27$个小长方体。若将长方体的长五等分，宽和高均二等分，共分割成$2\times2\times5=20$个小长方体，则此时块数最小且恰好有 12 个两面涂红色的小长方体(参看下图)。



17. 由于 a 与 b 的最小公倍数$[a，b]=72=2^3\times3^2$。所以，a 与 b 只能在 72 的 12 个约数：1，2，3，4，6，8，9，12，18，24，36，72 之中取值。

为了避免重复或遗漏，不妨设$a>b$。下面分类计数：

(1)当$a=72$ 时，b 可取小于 72 的 11 个约数，这样$a+b\geq72+1=73$，有 11 种不同的值；

（2）当$a=36$ 时，b 必须取 8 或 24，这样$a+b$的值为 44 或 60，均不同于（1）中的值；

（3）当$a=24$ 时，b 必须取 9 或 18，这样$a+b$的值为 33 或 42，均不同于（1）、（2）中的值；

（4）当$a=18$ 时，b 必须取 8，这样$a+b$的值为 26，不同于（1）、（2）、（3）中的值；

（5）当$a=12$ 时，b 无解；

（6）当$a=9$ 时，b 必须取 8，这样$a+b=17$，不同于（1）、（2）、（3）、（4）中的值。

综上所述$a+b$可有

$11+2+2+1+1=17$种不同的值。

18. 本题初看似乎无规律可循，我们先作试验观察看能否发现规律。

显然，1 应染黄色。由于$2=1+1$，所以 2 也应染黄色。

由于$3=2+1$，$4=1+3=2+2$，$5=1+4=2+3$，$6=1+5=2+4=3+3$，$7=1+6=2+5=3+4$，$9=1+8=2+7=3+6=4+5$，$11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6$，所以，以上各数均应染黄色。

由于，$8=4+4$，$10=4+6$，所以 8 和 10 应染红色。

于是$1-11$间的自然数除 8、10 外，其余 9 个都应染黄色。

当自然数$n\geq 12$时，可分下列两种情况讨论：

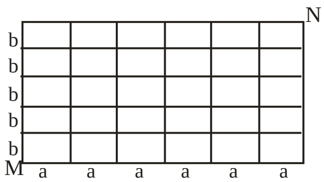
（1）若 n 为偶数，则$n=4+2k$；

（2）若 n 为奇偶，则$n=9+2k$。

其中，k 为自然数。于是当$n\geq 12$ 时，均应染红色。

综上所述，只有 1，2，3，4，5，6，7，9，11 这 9 个数应染黄色。

19. 如图所示，每条东西向街被分成 6 段，用 6 个 a 表示，每条南北向街被分成 5 段，用 5 个 b 表示。含有 6 个 a 和 5 个 b 的一个排列，对应于从 M 到 N 的一种最短走法。例如，排列 aaabbaababb，对应的走法如图中虚线所示。上述排列中共有 11 个不同位置，其中 5 个位置上是 b，如果 b 所占位置不同，那么表示的走法就不同。这相当于从 11 个不同元素中选 5 个元素的组合，其组合种数共有



$$\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}=462(种)。$$

即由 M 到 N 的最短走法有 462 种。

（2）由 M 到 N 的最短走法中，经过 A 处的走法可分两步考虑：

①由 M 到 A 的最短走法有

$$\frac{5\times 4}{1\times 2}=10(种)。$$

②由 A 到 N 的最短走法有

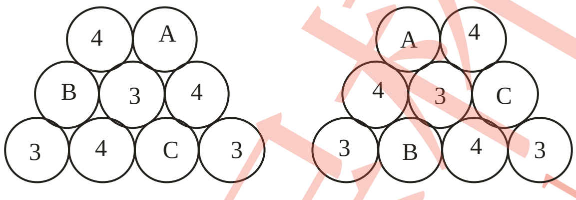
$$\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=20(\text{种})。$$

根据乘法原理，由 M 经 A 到 N 的最短走法有$10\times20=200(\text{种})$。

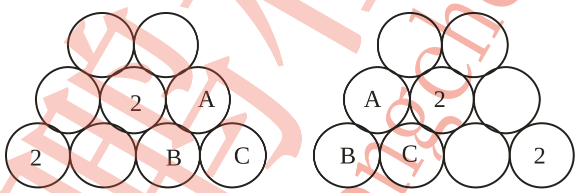
所以，如果 A 处不能通行，由 M 到 N 的最短走法应为

$$462-200=262(\text{种})。$$

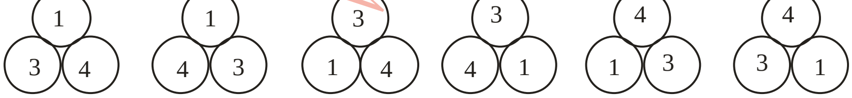
20. （1）由于 M 位上放了标有数码“3”的纸片，因此另外两个标有数码“3”的纸片只能放在左下角和右下角；标有数码“4”的纸片须与 M 相邻，并且相应放置，这样将有两种可能（如图）。对于每种可能，标有数码“1”的纸片均有 A、B、C 三个位置可以放置，所以总共有$3\times2=6$（种）不同的放置方法。



（2）由于 M 位上放了标有数码“2”的纸片，另一个标有数码“2”的纸片只能放在左下角或右下角（如图）。



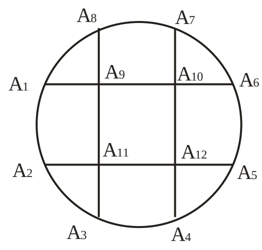
对于每一种可能，标有数码“1”、“3”、“4”的纸片放在 A、B、C 三个位置上，只有六种方法（如图）。



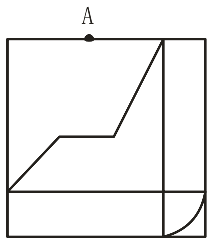
所以，共有$6\times2=12$（种）不同的放置方法。

第十八章　简单统筹规划问题

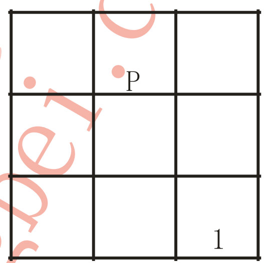
1. 花园的小径如图所示，一个游人想从A_1出发走遍所有的小径，则至少重复走的小径有哪几条？



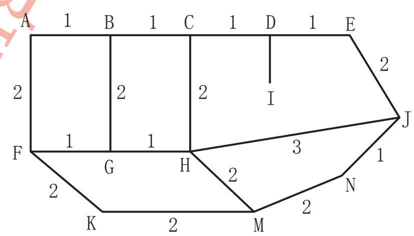
2. 右下图是一个街道图，图中 A 是邮局的位置。问邮递员应如何设计他的邮递路线，才能使他走的路程最短？



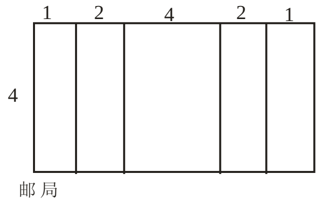
3. 右图表示某城市的街道图，九个街区都是边长为 1 千米的正方形，现需设一牛奶站，希望找到一最佳地址要使送奶车以最短路线跑遍城市所有街道，然后返回奶站。如果，小明把奶站选在 P 点，试问他选的对吗？送一遍奶所走的路程要比该城全部街道的总长长多少？



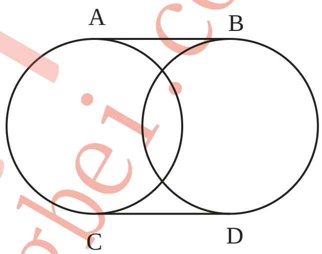
4. 右图表示一个旅游城市的景点以及连结景点的街道，图上数字表示各街道的长度（单位：千米）。一游客要从旅馆出发，游览所有景点并走遍全部街道回到旅馆，请为他设计一条最优游览路线，求出全城的千米数。



5. 一个邮递员递送邮政快件的道路如下图所示，图上数字表示各段路的千米数，他从邮局出发，要走遍各道路，最后回到邮局，请为他设计一条最合理的路线，全程要走多少千米？



6. 如图为一花圃路径，而圆半径都为 5 米，AB = CD = 8 米，一人在花圃散步，从某点出发，走遍花圃，回到原地，至少应走多少米（π取 3.14）



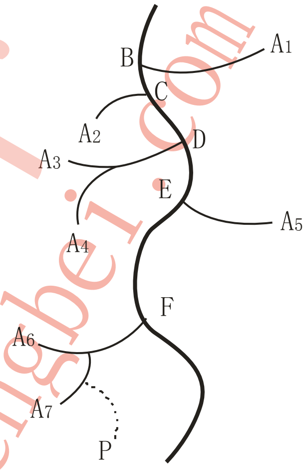
7. 现有 97 名小学生分散在一条大街上宣传交通法规。问完成任务后应该在大街的什么地方集合，可以使他们走到集合地点的路程总和最小？如有 100 名小学生，又该在哪儿？

8. 一条公路上有 A、B、C 三个工厂，三个厂的工人数相近。现要设一个汽车站，应使 A、B、C 三厂的工人到车站所行路程总和最小，那么车站应设在何处？

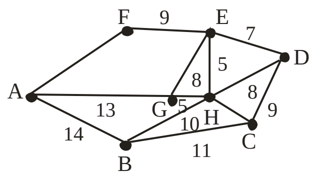
9. 右图是一个工厂区的地图，一条公路（粗线），通过这个地区，七个工厂 A_1、A_2、……A_7分布在公路两侧，由一些小路（细线）与公路相连，现在要在公路上设一个长途汽车站，车站到工厂（沿公路，小路走）的总和越小越好，问

（1）这个车站设在哪里？

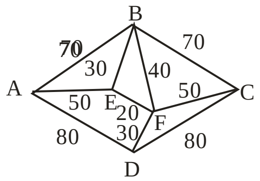
（2）如果在 P 处又建一个工厂，虚线为新修的小路，那么这时车站应设在哪里？



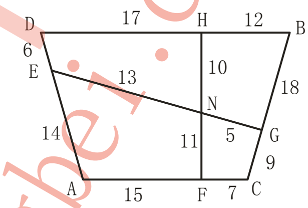
10. 某乡有八个村庄 A、B、C、D、E、F、G、H，分布如图所示。线旁的数字表示相应道路的长度（单位：千米）现在这个乡要建立广播网，沿道路架设电线（广播线为双线）。如何设计线路才能使电线最省？总长度是多少？



11. 为庆祝新年在校园内架设彩灯，其位置及道路如图所示（单位：米）要设计一条最省电线的线路至少需要多少电线？



12. 右图是一张道路图，每段路旁所表示的数字是小明走过道路所需的分钟数，问小明从出发走到B，最快需几分钟？

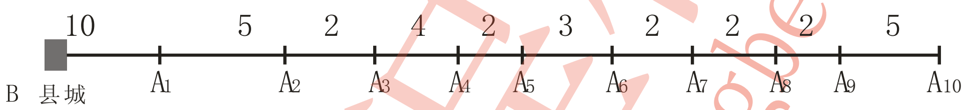


13. 某人从金坛市出发去扬州、常州、苏州、杭州各一次，最后返回金坛，已知各市之间的路费如表所示，请为他设计一条路费最省的路线（表中单位：元）

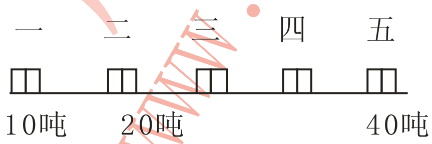
	金坛	常州	扬州	苏州	杭州
金　坛	0	30	40	50	60
常　州	30	0	15	25	30
扬　州	40	15	0	15	25
苏　州	50	25	15	0	15
杭　州	60	30	25	15	0

14. 五个人各拿一只水桶到水龙头前打水，他们打水所需时间分别是 5 分钟，3 分钟，10 分钟，6 分钟，7 分钟，现只有一个水龙头，应怎样安排这五人的次序，使他们打水和等待花费的时间总和最小？

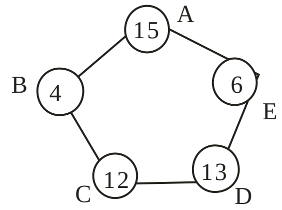
15. 有十个村庄，座落在从县城出发的一条公路上，现要铺设水管，从县城给各村庄供水。可用粗细两种水管。粗水管足够供应所有村庄用水，细水管只够供一个村的用水，粗水管每千米 8000 元，细水管每千米 2000 元，把粗细水管搭配使用可降低总费用，问应如何搭配费用最省？最少费用是多少？（图中数字表示各段路千米数）



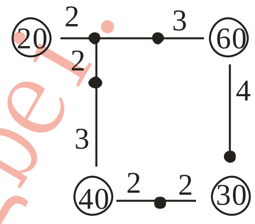
16. 在一条公路上每隔 10 千米有一个仓库，共有 5 个仓库（如图）一号仓库有 10 吨货物，二号仓库有 20 吨货物，五号仓库有 40 吨货物，其余两个仓库是空的，现要把所有货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输一千米的费用为 1.5 元，那么最少要多少运费？



17. 有 50 名同学去野营，他们搭好五顶帐篷正好位于正五边形五个顶点处（如图），图中圆圈内的数字表示每顶帐篷内的人数。现想把五个帐篷内的人数调整为一样多，问如何调整最方便？



18. 图中“○”表示粮库，○内数字表示该粮库存粮数（单位：吨）“ • ”表示居民点，线段旁的数字表示相应道路的长（单位：千米）假定每吨粮食一千米运费为 1.5 元，现要把粮库内的粮食全部调运到各居民点，并使各居民点粮食一样多，应如何调运，才能使运费最省？运费为多少？



19. 现有 189 米长的钢筋要剪成 4 米或 7 米两种尺寸，如何剪法最佳？

20. 钢筋原材料每件长 7.3 米，每套钢筋架子用长 2.4 米、2.1 米和 1.5 米的钢筋各一段。现需要绑好钢筋架子 100 套，至少要用去原料几种？如何截料最省？

论。

分析解答

1. 一个人想由A_1出发走遍所有小径，则至少要重复走下列三条小径：A_3A_4，A_5A_6，A_7A_8，然后由A_2出去。

本题是“一笔画问题”。一个由“点”和“线”组成的连通图，有以下结论。

（1）如果图中结点都为偶点，那么此图可以一笔画成；画时可以任一点

出发，一笔画成，回到这个点；

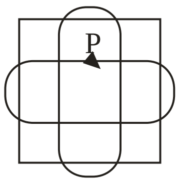
（2）如果图中只有两个奇结点，那么可从其中一个奇结点出发，一笔画成，到另一个奇结点终止。

本题图中，共有 8 个奇结点：A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7，A_8。如果添加A_3A_4，A_5A_6，A_7A_8三条弧，这样只有A_1、A_2为奇结点，根据（2）可从A_1出发走遍所有小径，其中A_3A_4，A_5A_6，A_7A_8各重复走遍，然后到A_2终止离开花园。读者可自己找出一种走法（不是唯一的）。

2. 由于这个街道图中无奇结点，所以是一个一笔画（或称欧拉图）。邮递员可以从邮局出发，不重复地走遍每条街道，回到邮局，这就是邮递员的最短路线。读者可以设计一条最短路线的具体走法（不是唯一的）。

上面这类问题也称作“邮递路线问题”，实质上是“一笔画问题”。

3. 由于图中有 8 个奇结点，所以必须重复走某些街道，才能送遍全城回到奶站。如图添加四条线（重复路线），这样图中的结点全部为偶结点，说明奶站设在街任何一处都一样。因此，小明选在 P 点没有错。一次送遍全城回到奶站的最短路线应是$24+4=28(\text{公里})$，比全城街道总长多 4 公里，多走全城街道总长的 16.7%

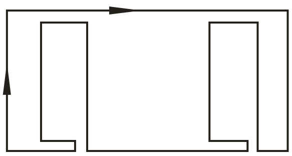


4. 需要重复走的路段为 FG，BC，DI 和 JNM。最佳路线为：旅馆→K→F→A→B→G→F→G→H→C→B→C→D→I→D→E→J→H→M→N→J→N→M→旅馆。全程要走 33 公里。

5. 全程要走

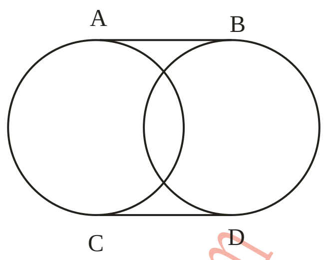
$$[(1+2+4+2+1)\times 2+4\times 6]+2\times 4=52(\text{公里})。$$

邮递路线如下：



6. 图中 A、B、C、D 四点为奇结点，当重复路段为 AB、CD 时，散步路径最短，也可回到原地。所以，走遍花圃，回到原地至少应走

$$(2\pi \times 5 + 8) \times 2 + 8 \times 2 \approx 94.8(\mathrm{m})。$$



7. 我们从最简单的情况入手分析

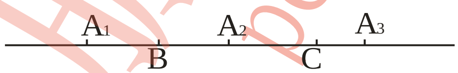
（1）当只有 2 人时，设宣传岗分别为A_1和A_2（如上图）。显然，集合地点选在A_1或A_2或A_1与A_2之间的任何一点都可以。因为两人到集合地的总路程都等于A_1A_2。

（2）当只有 3 人时，则集合地点应选在A_2（如图）。这时，三人路程总和为A_1A_3。

如选在A_1与A_2间的 B 点。这时，3 人到集合地点的路程总和是

$$A_1B + A_2B + A_3B = (A_1B + A_3B) + A_2B = A_1A_3 + A_2B。$$

由于$A_1A_3 < A_1A_3 + A_2B$，所以选在A_2较选在 B 好。



如果集合地点选在A_2与A_3间任何一点 C。同理可证明，选在A_2较 C 好。所以，当有 3 人时，集合地点应选在中间人处。

（3）当有 4 人时，由于集合地点无论选在A_1与A_4之间的哪一点。A_1，A_4处二人所走路程和为定值A_1A_4。因此，集合地点的选取只与A_2、A_3有关。即问题转化为“2 个人站岗”的情况。根据（1）的讨论，集合地点应选在A_2或A_3或A_2与A_3之间任何地点。

（4）当有 5 个人时，类似地可把问题转化为“3 个人站岗”的情况，集合地点应选在正中间的岗位A_3处。

依此逆推下去，得到规律：

当有奇数$(2n-1)$个人时，集合地点应选在正中间岗位A_{n-1}处。

当有偶数 2n 个人时，集合地点可选在中间一段A_nA_{n+1}上任一点（包括两端）。

本题中有 97 人，集合地点应选在A_{49}处。有 100 人的情况，请读者自己回答。

8. 设车站地址在 AC 上某点 P，由于各厂人数相近，所以只要考虑怎样才能使$AP+BP+CP$达到最小。设

$$
\begin{aligned}
W &= AP+BP+CP \\
&= (AP+CP)+BP \\
&= AC+BP
\end{aligned}
$$

其中 AC 为定值，只有当$BP=0$即 P 与 B 重合时，W 最小。

所以，车站应设在 B 处。

9. 设 B、C、D、E、F 是各条小路连通公路的道口。

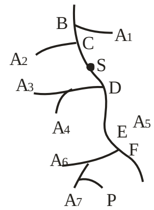
（1）车站设在 D 点最好。我们采用比较法说明道理。

设S_1，S_2，$\cdots$，S_7表示 D 到各工厂的路程，总路程为：$S=S_1+S_2+\cdots+S_7$。

现假定车站由 D 向北移到 S（S 在 C、D 之间），D、S 间的路程为 d，那么S_1，S_2各减少 d，但S_3，S_4，S_5，S_6，S_7各增加 d；所总路程 S 增加$5d-2b=3d$。显然，如果车站移到 C 以北情况更糟。这说明车站在 D 以北的地方都不如在 D 点好。同样，可以说明车站在 D 点以南的任何地方都不如 D 点好。

（2）设在 D 或 E 或 D 与 E 之间的任何地方都可以。

说明：由于各工厂经小路到道口的路程是必须走的，与车站地址无关。因此，我们假设把各工厂移到道口，这样问题就转化成文章 7 题、8 题的类型。应注意的是有些点可能有多个工厂，这一点与前不同。

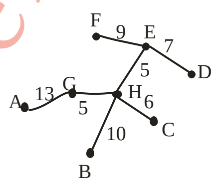


10. 显然线路应把八个村庄都连通起来。

如果我们按题中所画道路架设线路，其中有许多闭路，造成电线的浪费。因此，可以考虑把每个圈中较长的线剪掉，这种方法叫“破圈法”。剪去长线，留取短线又叫取短法。例如在 AGEF 这个圈中，AF 最长，应剪掉。同理，应把 EG、AB、BC、CD、DH 剪掉。这样得到以下树形图是总长度最短的线路，总长为

$13+5+10+6+5+9+7=55$（千米）

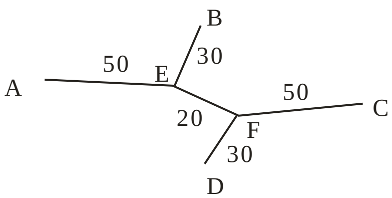
由于广播线是双线，所以电线总长为$55\times 2=110$（千米）。



11. 采用破圈法，去掉线段 AB，BC，BF，CD，AD，得到最短线路如右图。电线总长为

$50+20+30+30+50=180$(米)。

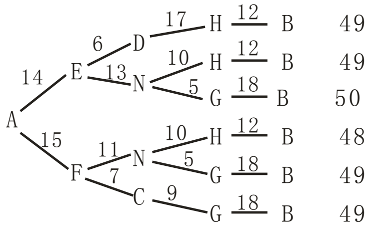
所以，至少需要电线 180 米。



12. 本题属最短线路问题。

（1）决策树法

画出树形图，枚举出所有可能的走法，再进行比较。



经比较得最短路径 AFNHB，小明走完这段路需 48 分钟。

（2）关键点法

由 A 到 B 的关键点为 N。先在从 A 到 N 的道路中选一条最省时间的，即最短的。这里是 AFN；再在从 N 到 B 的道路中也选一条最短的，即 NHB。把上面两条道路接起来，就是由 A 经 N 到 B 的最短路径，即 AFNHB，共用时 48 分钟。

另外不经 N 到 B 的路径还有两条：一条是 AEDHB，用时 49 分钟；另一条是 AFCGB，用时 49 分钟。

由比较可知，由 A 到 B 的最短路径（最省时的路径）是 AFNHB。共需用时 48 分钟。

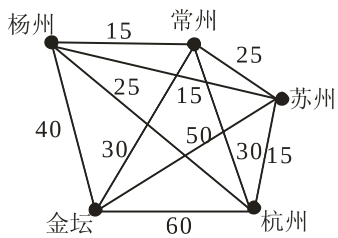
在解决“最短线路”问题中，以上两种方法是常用的方法。决策树法，方法简单，但计算量较大；关键点法，计算量较小，但首先要选好关键点。

13. 路费最省的路线为

金坛→常州→杭州→苏州→扬州→金坛

或金坛→扬州→苏州→杭州→常州→金坛。

本题用决策树法计算量太大，下面我们用逐步调整法说明理由。



如图两城市连线旁的数字表示相应的路费。可以看到有三对城市间路费最低，都是 15 元。因此，常州 15 扬州 15 苏州 15 杭州，共用 45 元，这时我们组成方案 I

$$\text{金坛}\xrightarrow{30}\text{常州}\xrightarrow{15}\text{扬州}\xrightarrow{15}\text{苏州}\xrightarrow{15}\text{杭州}\xrightarrow{60}\text{金坛}$$

共需路费 135 元。

然而下面的方案 II

$$金坛\xrightarrow{30}常州\xrightarrow{30}杭州\xrightarrow{15}苏州\xrightarrow{15}扬州\xrightarrow{40}金坛$$

共需路费 130 元。

因此，要路费最省、15 元的路段至多只能选两条。当有两条 15 元路段时，25 元的路段至多有一个，因此上段路费不少于

$$15+15+25+30+40=125(元)。$$

另一方面，总路费 125 元是不能达到的。事实上进出金坛至少要 $30+40=70(元)$。这样第一站只能是常州或扬州，最后一站只能是扬州或常州。可能的情况有下列四种

$$金坛\xrightarrow{30}常州\quad 苏州\xrightarrow{15}杭州\xrightarrow{25}扬州\xrightarrow{40}金坛\quad 135元$$

$$金坛\xrightarrow{30}常州\quad 杭州\xrightarrow{15}苏州\xrightarrow{15}扬州\xrightarrow{40}金坛\quad 130元$$

$$金坛\xrightarrow{40}扬州\quad 苏州\xrightarrow{15}杭州\xrightarrow{30}常州\xrightarrow{30}金坛\quad 130元$$

$$金坛\xrightarrow{40}扬州\quad 杭州\xrightarrow{15}苏州\xrightarrow{25}常州\xrightarrow{30}金坛\quad 135元$$

可见最少路费不可能是 125 元。由于路费差价至少 5 元，所以，总路费 130 元是最省的。

14. 如果假定打水需 5 分钟的排在第一，打水需 3 分钟的排在第二，那么这两人打完水时，所有人打水和等候时间为

$$5\times5+3\times4=37(分钟)$$

若把此两人顺序交换一下，则当此两人打完水时，所有人打水和等候时间为

$$3\times5+5\times4=35(分钟)$$

比前一种顺序少 2 分钟。同样的道理打水需用 6 分钟，7 分钟，10 分钟的人依次排在后面。

最省时间的顺序应按打水所需时间由少到多排队，即按打水时间 3 分钟、5 分钟、6 分钟、7 分钟、10 分钟的次序排队打水，才能使他们打水、等候的总时间最少。

五人打水、等候时间总和最小值为

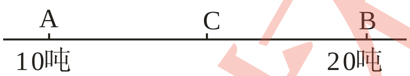
$3 \times 5 + 5 \times 4 + 6 \times 3 + 7 \times 2 + 10 \times 1 = 77$ 分钟

15. 由于粗管费用是细管的 4 倍。因此，同一段路上要铺设四根以上细管可用一根粗管代替。

假设从县城到各村庄都按一根细管。那么在BA_1，A_1A_2，⋯，A_4A_5，A_5A_6各段分别有 10 根，9 根，⋯、6 根、5 根细管。所以应把BA_6之间都换成粗管，这样工程总费用最省。最低总费用为

（10+5+2+4+2+3）×8000+（2×4+2×3+2×2+5×1）×2000=254000（元）。

16. 我们从简单入手，现讨论只有两个仓库的情形（如下图）。假定仓库建在 A、B 之间某个点 C，每吨货物 1 公里运费为 a（元），那么总运费为：



W=10×a×AC+20×a×CB

=10×a×AC+10×a×CB+10×a×CB

=10×a×AB+10×a×CB

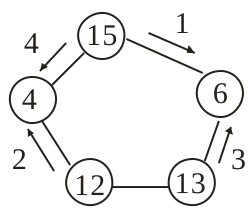
上式中，10a×AB 为定值，当 C 与 B 重合时，BC=0，总运费 W 达到最小。这说明仓库应建立在 B 处，称作“小往大处靠”，这时解决“场地设置问题是常用的原则”。

根据“小往大处靠”的原则，先把 1 号仓库的 10 吨货物运往 2 号仓库集中。再把 2 号仓库 30 吨货物与 5 号仓库作比较，再根据“小往大处靠”原则把 2 号仓库的 30 吨货物运往 5 号仓库集中。这一方案所花运费最省，总费用为

10×10×1.5+30×30×1.5=1500（元）。

17. 要求把五个帐篷内的人数调整为一样多，因此每个帐篷内的人数为

50÷5=10（人）。



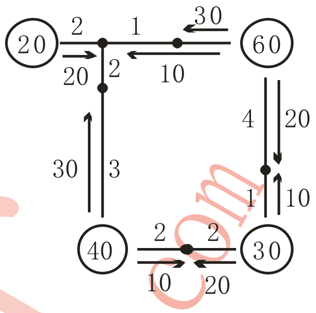
最佳调整方案如左图所示，我们把这种图称作流向图。其中，箭头方向表示流向，箭头旁的数字表示流量（本题指流动人数）。

这类问题的最佳调动方案必须满足以下两个条件：

（1）流向图上没有“对流”现象;

（2）顺时针和逆时针方向调动的路程都不超过半圈的长度。

18. 4 个粮仓内粮食共有 20+60+30+40=150（吨），每个居民点应有粮食 150÷5=30 吨。



最佳调运方案如图所示，其中箭头方向，表示流向，箭头旁的数字表示粮食流量。

调运总费运为

（20×2+30×3+10×4+20×4+10×1+20×2+10×2+30×3）×1.5=410×1.5=615（元）。

19. 无残料的剪法是最佳的。设 4 米长的剪 x 根，7 米长的剪 y 根，依题意列方程：

$4x+7y=189$

根据倍数分析法可知 7∣x（即 x 是 7 的倍数）。

设$x_1=0$，则 $7y=189$，解得$y_1=27$；

$x_2=7$，则 $7y=161$，解得$y_2=23$；

$x_3=14$，则 $7y=133$，解得$y_3=19$；

$x_4=21$，则 $7y=105$，解得$y_4=15$；

$x_5=28$，则 $7y=77$，解得$y_5=11$；

$x_6=35$，则 $7y=49$，解得$y_6=7$；

$x_7=42$，则 $7y=21$，解得$y_7=3$。

以上 7 种剪法都是最省料的剪法。

此类问题称作“下料问题”，属“线性规划”范畴。线性规划是运用一次方程（组）来解决规划问题的数学分支。

20. 不难想到每件钢筋有以下三种截法省料：

（1）2.9 米长的截 2 段，1.5 米长截 1 段。因为 2.9×2+1.5=7.3（米）所以无残料。

（2）2.1 米长的截 2 段，1.5 米长截 2 段。因为 2.1×2+1.5×2=7.2（米），每件剩残料 0.1 米。

（3）2.9 米长的截 1 段，2.1 米长截 2 段。因为 2.9+2.1×2=7.1（米），每件剩残料 0.2 米。

设第一种截法用 x 件，第二种截法用 y 件，第三种截法用 z 件。根据要求三种尺寸的钢筋都要 100 段。可列出方程组（求整数解）

$$2x+z=100$$

$$2y+2z=100$$

$$x+2y=100$$

解得 x=40，y=30，z=20。

共需原料钢筋 90 件，其中 40 件用截法（1）；30 件用截法（2）；20 件用截法（3）。

第十九章　归纳与递推

1. 找出下列各数列的构造规律，并填空。

（1）1、3、6、10、15、____、28。

（2）1、8、27、64、____、216。

（3）1、2、3、5、8、____、____、34。

（4）2、3、5、7、____、13。

2. 有一列由三个数组成的数组（1、5、10），（2、10、20），（3、15、30），（4、20、40），那么第 99 组内三个数的和是多少？

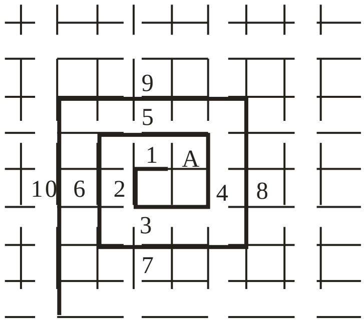
3. 现有一列数，a_1，a_2，a_3……，已知a_1=1949，a_2=1994，从a_2开始，每个数是它前面两数的算术平均值的整数部分，问这个数列的第 100 项是几？

4. 一根铁丝，第一次剪去它的$\frac{1}{2}$，第二次剪去剩下的$\frac{1}{3}$，第三次再剪去剩下的$\frac{1}{4}$，第四次剪去剩下的$\frac{1}{5}$……，剪了 99 次后剩下铁丝是原来的几分之几？

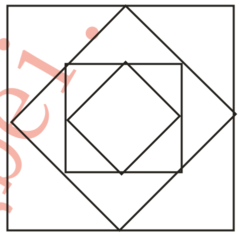
5. 如图，在一张方格纸上画折线（用实线表示的部分）。图中每个小方格的边长为 1，从 A 点出发依次给每条直线段编号。

（1）编号 1994 的直线段长是多少？

（2）长度为 1994 的直线段的编号是多少？



6. 依次连接正方形各边中点得到一个小正方形，如（图）再依次连结这个小正方形各边中点又得到一个更小的正方形。如此不断的作下去，共作了 20 个小正方形，连原来的正方形共 21 个，试比较 20 个正方形面积的和与原正方形面积的大小。



7. 根据下面四个算式，能否发现其中规律，然后在____上填入适当的数。

1×5+4=9=3×3　　2×6+4=16=4×4

3×7+4=25=5×5　　4×8+4=36=6×6

10×______+4=______=______×______

______×______+______=______=______×102

8. 把自然数排成下面的三角形数阵：

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

……

其中第一行一个数，第二行 3 个数，第三行 5 个数，第四行 7 个数。

求（1）第 11 行所有数之和

（2）1997 排在第几行，第几个位置？

9. 观察下列个数列规律：

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，……

求（1）$\frac{11}{27}$ 排在第几个位置上。

（2）第 100 个位置上是哪个数？

10. 有 500 位学生编成一排，从左到右“1、2、3”报数，凡报到 1 和 2 的离队，报 3 的留下向左看齐后，再重复同样的报数过程，如此进行若干次后，只剩下两位同学，问这两位同学在开始的队列中，从左到右计算，分别在第几个？

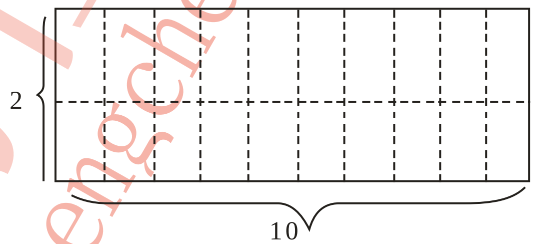
11. 在平面上有 10 条直线，问它们最多能把平面分割成多少部分？

12. 平面上有 10 个圆，最多把平面分成多少部分？

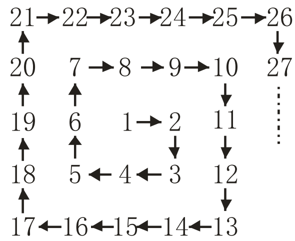
13. 如果现有一对小兔，过一个月长成大兔，但不能生殖，第二个月起每对大兔每个月生下一对小兔，问起初养了一对小兔，一年后共有多少对兔子？

14. 上一段 12 级楼梯，规定每一步只能上一级或两级，问要登上第 12 级楼梯共有多少种不同走法？

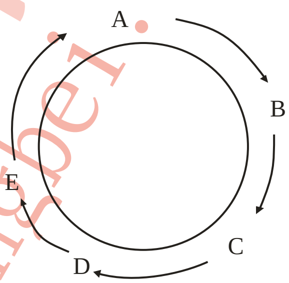
15. 用“1×2”的矩形，覆盖“2×10”的图形（如图），问有多少种不同方法？



16. 将自然数 1、2、3、4……按箭头所指方向顺序排列（如图），依次在 2、3、5、7、10……等数的位置处拐弯，如果 2 算作第一次拐弯处，问第 45 次拐弯处的数是多少？



17. 五个小朋友 ABCDE 围坐一周，面向外（如图），老师分别给 ABCDE 发 246810 个球，然后从 A 开始，按顺时针方向顺序做游戏：如果左邻小朋友的球的个数比自己少，则送给左邻小朋友 2 个球；如果左邻小朋友的球的个数比自己多或一样多，就不送了，如此做下去，到第四圈为止，他们每人手中的球的个数分别是多少？



18. 把一个圆周上按下面规则标上一些数：第一次先把圆周二等分，在两个分点旁标上$\frac{1}{2}$ 和$\frac{1}{3}$ ，如图 1，第二次把两段半圆弧二等分，在分点旁标上相邻两分点旁所标两数的和，如图 2 标上$\frac{5}{6}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$，第三次把 4 段圆弧分别二等分，并在 4 个分点旁边标上两个相邻分点旁所标数的和，如图 3，分别标上 $1\frac{1}{3}$ 和 $1\frac{1}{6}$ ，如此继续下去，当第八次标完数以后，圆周上所有已标的数的和是多少？

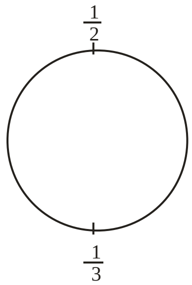


图1

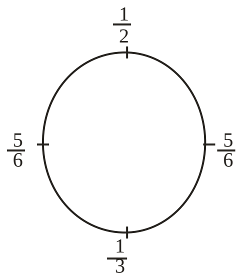


图2

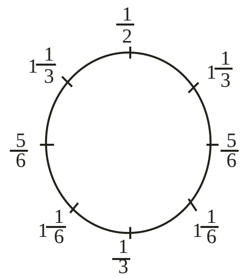
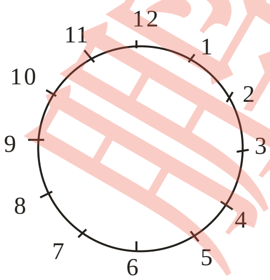
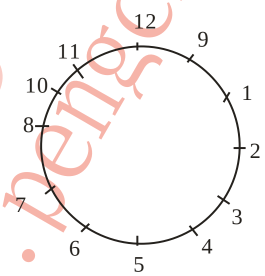


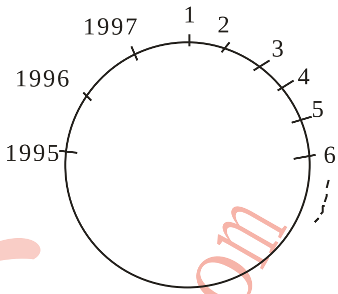
图3

19. 如图 1.圆周上顺序排列着 1、2、3……12 这十二个数，我们规定相邻的四个数a_1,a_2,a_3,a_4顺序颠倒为a_4，a_3，a_2，a_1称为一次“变换”（如图 1、2、3、4 变为 4、3、2、1，又如 11、12、1、2，变成 2、1、12、11）。能否经过有限次“变换”，将十二个数的顺序变成 9、1、2、3……8、10、11、12（如图 2）请说明理由





20. 把 1 到 1997 这 1997 个数，按顺时针方向依次排列在一个圆圈上（如图）。从 1 开始按顺时针方向，保留 1，擦去 2；保留 3，擦去 4……（每隔一个数，擦去一个数）转圈擦下去，最后剩的是哪个数？



分析解答

1.（1）从给出的 6 个数本身看，看不出什么共同性质。如果分析彼此间的关系，发现：

$$a_2-a_1=2，a_3-a_2=3，a_4-a_3=4，a_5-a_4=5。$$

是有规律的，“相邻两项的差成等差数列”。

照此规律，$a_6=a_5+6=15+6=\quad 21$。

已知$a_7=28$，$a_7-a_6=7$，同样是适合的。

（2）从各自的属性分析发现：

$a_1=1=1^3$，$a_2=8=2^3$，$a_3=27=3^3$，$a_4=64=4^3$。

可以猜测$a_5=5^3=125$。规律是：各项等于它的项数的立方。

由$a_6=216=6^3$，也符合这个规律。

（3）仔细观察，我们可发现：从第三项起，每一项都是前两项之和。

$a_3=a_1+a_2$，$a_4=a_2+a_3$，$a_5=a_4+a_3$。

照此规律，$a_6=a_4+a_5=5+8=13$，

$a_7=a_5+a_6=8+13=21$。

而且 $a_8=34=a_6+a_7$，也符合此规律。

（4）从各项本身性质看，不难发现它们是依次排列的质数。

$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$。

照此，$a_5=11$。且$a_6=13$也符合此规律。

观察，分析数列的构造规律，要从数列各项的性质、特点及相邻项之间的关系进行比较、归纳。开始可是一种猜测，再在猜测的基础上进行检验。对于一个无限数，如果给出的项是有限的，则规律不是唯一的。

2. 由观察不难发现规律，数组（a_n，b_n，c_n）内的三个数；

$a_n = \text{n}$，$b_n = 5 \times \text{n}$，$c_n = 10 \times \text{n}$。

因此，第 99 个数组内的三个数为：

$a_{99} = 99$，$b_{99} = 5 \times 99$，$c_{99} = 10 \times 99$。

其和为 $a_{99} + b_{99} + c_{99}$

$= 99 + 5 \times 99 + 10 \times 99$

$=（1 + 5 + 10）\times 99$

$= 1584$。

3. 根据构造数列的法则，先求出这个数列的前几项

1949，1994，1971，1982，1976，1979，1977，1978，1977，……。

由此发现，相邻两数之差越来越小，这个差等于 1 时，往后的数就总不变了。所以

$a_{100} = 1977$。

4. 设这根铁丝的长度为 1，那么，

剪一次剩下的是原来的$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$；

剪二次剩下的是原来的$\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$；

剪三次剩下的是原来的$\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$；

剪四次剩下的是原来的$\frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$；

……

我们可以发现规律，剪 n 次剩下的是原来长的$\frac{1}{n+1}$。因此，剪了 99 次后，剩下的铁丝是原来铁丝长的$\frac{1}{100}$。

人们在探索某一类事物的属性或它们之间关系时，经常从观察具体事物入

手，通过分析找出这类事物的一般属性。这种“从特殊到一般的推理方法”，叫做归纳推理。

5. 通过观察列出编号与长度的关系表：

编号	（1）（2）	（3）（4）	（5）（6）	（7）（8）	（9）（10）	…
长度	1	2	3	4	5	…

从表中看出：长度为 n 的线段编号为$2n-1$和 2n。

（1）编号为 1994 的线段长为：

$1994 \div 2 = 997$。

（2）长度为 1994 的线段有两条，编号分别为：

$1994 \times 2 - 1 = 3987$，

$1994 \times 2 = 3988$。

6. 设原正方形边长为 1，则面积为 1 平方单位。连结成的第一个小正方形，不难看出它的面积是大正方形的$\frac{1}{2}$。同理，第二个小正方形面积为$\frac{1}{4}$，第三个小正方形面积是$\frac{1}{8}$，……。于是

前 2 个小正方形面积和是$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2^2-1}{2^2}$；

前 3 个小正方形面积和是$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=\frac{2^3-1}{2^3}$；

前 4 个小正方形面积和是$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=\frac{2^4-1}{2^4}$；

……

前 20 个小正方形面积和是$\frac{2^{20}-1}{2^{20}}$。

由于$\frac{2^{20}-1}{2^{20}}<1$，所以 20 个小正方形的面积和小于原来正方形的面积。

7. 从已知的四个算式中可发现，被乘数为自然数，依次是 1，2，3，4。而乘数总比被乘数大 4。于是

$10 \times 14 + 4 = 144 = 12 \times 12$。

另外，从右向左分析第二个填空式。

$102 \times 102 = 10404 = 10400 + 4$，

$10400 = 100 \times 104$。

于是

$100 \times 104 + 4 = 10404 = 102 \times 102$。

8. 不难发现每一行的数的个数等于它的行数的 2 倍减 1，即第 n 行有$2n-1$个数。

（1）先计算前 10 行所有数的个数。

$1+3+5+\cdots+$（$2 \times 10-1$）

$=[1+19] \times 10 \div 2 = 100$

第 11 行的第 1 个数是 101，共有（$2 \times 11-1$）个数，最后一个数是

$100+(2 \times 11-1) = 121$。

第 11 行所有数之和是：

$101+102+\cdots+121$

$=(101+121) \times 21 \div 2$

$= 2331$。

通过观察，我们还可发现，每一行的最后一个数正好等于行数的平方。利用这一规律来解，就更简单了。例如，求第 15 行各数之和：

第 15 行第 1 个数是$14^2+1 = 197$，第 15 行最后一个数是$15^2 = 225$。这行共 29 个数，它们的和是

$197+198+\cdots+225$

$=(197+225) \times 29 \div 2 = 6119$。

（2）因为$44^2 = 1936$，$45^2 = 2025$，$44^2 < 1997 < 45^2$。所以，1997 在第 45 行。由于

$1997-1936 = 61$。

所以，1997 排第 45 行第 61 个位置上。

9. （1）通过观察发现，在这个数列中依次排列着，分母是 2 的有 1 个数，分母是 3 的有 2 个数，分母是 4 的有 3 各数，⋯。如果按分母不同分组：

第 1 组 1 个数，第 2 组 2 个数，第 3 组 3 个数，⋯。$\frac{11}{27}$应排在第 26 组第 11 个位置上。由于

$(1+2+\cdots 25)+11$

$=(1+25) \times 25 \div 2 + 11 = 336$。

所以，$\frac{11}{27}$排在数列的第 336 个位置上。

（2）先考虑第 100 个位置排在第几组的第几个位置。前几组所有数的个数是

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}(n+1)n。$$

而 $n = 13$时，$S_n = 91$；$n = 14$时，$S_{14} = 105$。又$91 < 100 < 105$，所以第 100 个数一定排在第 14 组。

由于$100 - 91 = 9$，所以第 100 个数排在第 14 组第 9 个位置上。这组数的分母是 15，第 9 个数的分子是 9。所以，这个数列第 100 个位置上的数是$\frac{9}{15}$。

10. 将这 500 名学生从左至右编上号码：1，2，3，⋯，500。

列举几次报数后，剩下学生的号码：

报数前：1，2，3，4，⋯，500。

第一次后：3×1，3×2，3×3，⋯，3×166。

第二次后：9×1，9×2，9×3，⋯，9×55。

第三次后：$3^3 \times 1$，$3^3 \times 2$，$3^3 \times 3$，⋯，$3^3 \times 18$。

……

从上面可以发现，每次剩下的人的编号是 3 的乘方的倍数，第 n 次报数后，剩下的最左边的学生编号是3^n。

由于$500 \div 3 = 166 \cdots 2$，所以第一次报数后，剩下 166 人。同理

$166 \div 3 = 55 \cdots 1$，第二次剩下 55 人；

$55 \div 3 = 18 \cdots 1$，第三次剩下 18 人；

$18 \div 3 = 6$，第四次剩下 6 人；

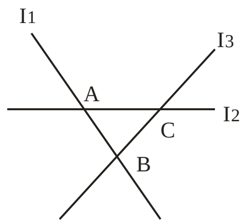
$6 \div 3 = 2$，第五次剩下 2 人。

因此，第五次报数后剩下的两人的编号分别为

$3^5 = 243$ 和$3^5 \times 2 = 486$。

即最后两人分别是第 243 号和 486 号。

11. 我们还是从简单的情况入手，归纳出一般结论。



一条直线把平面分成 2 部分；两条直线，相交时把平面分的部分最多，

第二条直线被第一条直线截成两段，每一段把原有的一部分分成了二部分。因此，增加了二部分，共四部分；如果再增加一条直线，三条直线时，第三条直线被前两条最多分成三段，每段把原来的一部分分成了两部分，增加了 3 部分。依次类推，每增加一条直线，平面增加的部分数依次是 4，5，6，…。n 条直线把平面分割的部分数最多是：

$$a_n = 2+2+3+4+\cdots+n$$
$$=1+（1+2+3+\cdots+n）$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)+1。$$

当$n=10$时，$a_{10}=\frac{1}{2}(10\times 11)+1=56$。即 10 条直线最多把平面分成 56 部分。

这道例题的解题思路是：

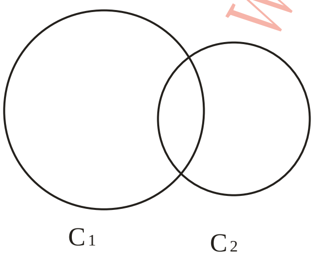
特殊 → 一般 → 特殊

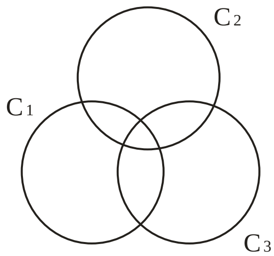
（简单情况） （一般规律） （较复杂情况）

这种从简单情况入手，经过分析，归纳出一般结论，再用以解决较复杂问题的方法，在数学解题中，经常被采用。

12. 我们仍然从简单的情况入手。一个圆显然把平面分成二部分；两个圆相交，第二个圆C_2被第一个圆C_1相交后分成了两段弧，每一段弧把原来一部分“一分为二”，增加二部分，共 4 部分；如果再增加一个圆C_3，圆C_3最多被前两个圆分成 4 段弧（C_3与C_1、C_2各有两个交点）而每段弧把原来的一部分分成了两部分，又增加了 4 部分。如果设a_n表示 n 个圆把平面最多分割成的部分数，那么

$$a_1=2，$$
$$a_2=4=a_1+2，$$
$$a_3=8=a_2+2\times 2。$$





一般地，当添加第 n 个圆时，C_n最多与前$n-1$个圆有$(n-1)\times 2$个交点，把C_n分成$(n-1)\times 2$段弧，每段弧把原来的一部分“一分为二”，增加了$(n-1)\times 2$部分。可写成

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)\times 2。$$

上面这类式子，表示数列$\{a_n\}$相邻的一些项的关系，叫做递推式。

根据 初始值$a_1 = 2$，和递推式$a_n = a_{n-1} + (n-1)\times 2$，不难得出

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + 1\times 2 = 2 + 1\times 2$$

$$a_3 = a_2 + 2\times 2 = 2 + 1\times 2 + 2\times 2,$$

$$a_4 = a_3 + 3\times 2 = 2 + 1\times 2 + 2\times 2 + 3\times 2$$

……

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)\times 2 = 2 + 1\times 2 + 2\times 2 + \cdots + (n-1)\times 2。$$

于是，$a_n = 2 + 1\times 2 + 2\times 2 + \cdots +（n-1）\times 2$

$$= 2 + 2\times\frac{n（n-1）}{2} = 2 + n（n-1）$$

$$= n^2 - n + 2。$$

当$n = 10$时，$a_n = 10^2 - 10 + 2 = 92$，即平面上 10 个圆最多把平面分成 92 部分。

13. 根据题意，我们把最初 n 个月的兔子数列成下表

月份数 n	一	二	三	四	五	六	七	八	…
小兔对数	1		1	1	2	3	5	8	…
大兔对数		1	1	2	3	5	8	13	…
总对数 a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	…

由以上统计表，分析得出：从第三个月起，大兔子的对数是上月兔子的总对数，而小兔子的对数是上月大兔子的对数，即前一个月兔子的总对数，而每月兔子总对数是本月大、小兔对数之和。如用a_n表示第 n 个月兔子的总对数，那么 $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$。

有上述递推公式及$a_1 = a_2 = 1$，不难得出：

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$，

$a_4=a_2+a_3=1+2=3$，

$a_5=a_3+a_4=2+3=5$，

$a_6=a_4+a_5=3+5=8$，

$a_7=a_5+a_6=5+8=13$，

$a_8=a_6+a_7=8+13=21$，

$a_9=a_7+a_8=13+21=34$，

$a_{10}=a_8+a_9=21+34=55$，

$a_{11}=a_9+a_{10}=34+55=89$，

$a_{12}=a_{10}+a_{11}=55+89=144$。

所以，一年共有兔子 144 对。

这个问题是意大利数学家斐波那契（Fibonacci）最先提出来的，人们称相关的数列$\{a_n\}$为斐波契数列，它具有许多重要的奇特性质。

14. 设登上 n 级楼梯共有a_n种不同走法。显然

$a_1=1$，$a_2=2$

当$n\geq 3$时，把上列第 n 级楼梯的情况分成两类。第一类是先上一级，剩下$n-1$级楼梯共有a_{n-1}种走法；第二类，先走两级，剩下$n-2$级楼梯共有a_{n-2}种走法。由加法原理，上列第 n 级楼梯的走法a_n满足递推关系式：

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。

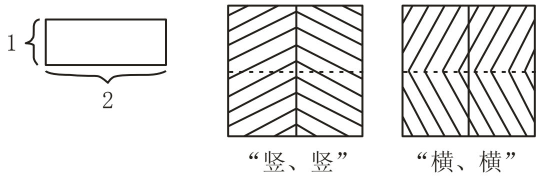
又因，$a_1=1$，$a_2=2$。由上述递推式可得：$a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=8$，$a_6=13$，$a_7=21$，$a_8=34$，$a_9=55$，$a_{10}=89$，$a_{11}=144$，$a_{12}=233$。

所以，登上第 12 级楼梯共有 233 种不同走法。

15. 我们仍从简单情况入手。设a_n为用“1×2”的矩形覆盖“$2\times n$”的图形的不同方法总数。

显然$n=1$时，只有一种方法，所以，$a_1=1$。

当$n=2$时，只有两种方法：“竖、竖”和“横、横”，如下图。

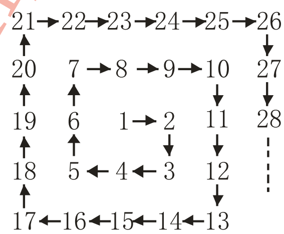


当$n \geq 3$时，与 14 题相仿，把用“1×2”矩形覆盖住“$2 \times n$”图形的方法分为两类：第一类，先用“1×2”的矩形覆盖“2×1”图形，剩下的“$2 \times (n-1)$”图形的不同覆盖方法有a_{n-1}种；第二类，先用两个“1×2”的矩形通过“横、横”的方法盖住“2×2”的图形，剩下的“$2 \times (n-2)$”图形的不同覆盖方法有a_{n-2}种。（注意，如果先用“竖、竖”的方法盖住“2×2”图形的话，此种覆盖方法已包含在第一类中）。由加法原理，得到递推关系式：$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$。

又因，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，不难算出：$a_3 = 3$，$a_4 = 5$，…，$a_{10} = 89$。

所以，用“1×2”的矩形覆盖“$2 \times n$”图形的不同方法共有 89 种。

16. 根据已知数阵的排列规则，由拐弯处的数所成的数列：2，3，5，7，10，13，17，21，…。

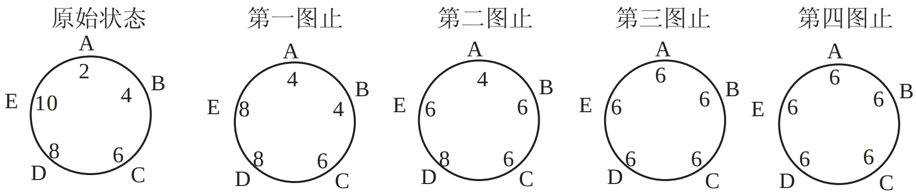


不难发现，从第二项起，后一项与前一项之差依次为：1，2，2，3，3，4，4，……。

因此，第 45 次拐弯处的数为：

$$
\begin{aligned}
& 2+1+2+2+3+3+4+4+\cdots+22+22+23 \\
&= 2+(1+2+3+\cdots+23)+(2+3+\cdots+22) \\
&= 2+\frac{1}{2}\times(1+23)\times 23+\frac{1}{2}\times(2+22)\times 21 \\
&= 2+276+252 \\
&= 530。
\end{aligned}
$$

17. 根据游戏规则，把每做一圈的结果列举如下：



我们发现。游戏做完第三圈时，每个人手中的球均为 6 个，此后各人手中的球数不变。所以，第四圈止，他们每人手中均有 6 个球。

18. 为了发现相邻两次标完后数的总和间关系，设第一次所标的两数分别为 a，b，用S_k表示第 k 次标完后各分点所标数的总和。

$= (a+b)$，$S_2 = S_1 + 2S_1 = 3S_1$

$S_3 = S_2 + 2S_2 = 3S_2$，…。

一般地，$S_n = S_{n-1} + 2S_{n-1} = 3S_{n-1}$。

由此递推关系式及$S_1 = (a+b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$不难得到

$S_8 = 3^7 S_1 = 3^7 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

$= 3^6 \times$ ***错误！未定义书签。*** $= 1822.5$。

所以，当第八次标完后，圆周上所有已标的数的总和是 1822.5。

19. 比较图 2 与图 1，主要是把 9 按逆时针方向移动了 8 个位置。

经过如下试验

56789—59876—78956—76598—95678

可以发现，经过 4 次“变换”可将 9 提前 4 位，其余顺序不变。再经过 4 次“变换”可将数字 9 按逆时针移动 8 位，其余的数顺序不变。即经过 8 次“变换”可将原来的十二个数的顺序变为：9，1，2，3，4，5，6，7，8，10，11，12。

具体“变换”方法如下：

56789→59876→78956→76598→95678。

12349→19432→34912→32194→91234。

本题主要培养学生实验、观察、分析、归纳的能力。

20. 如果依照题意在上图中进行操作，直到剩下一个数为止，实在是很困难的。我们还应从最简单的情况入手分析，归纳出解决问题的规律，再用此规律解题。

如果是 2 个数 1、2，最后剩下 1；如果是 3 个数 1、2、3，最后剩下 3；

如果是 4 个数 1、2、3、4，最后剩下 1；如果是 5 个数 1、2、3、4、5，最后剩下 3；如果是 6 个数 1、2、3、4、5、6，最后剩下 5；如果是 1—7,7 个数，最后剩下 7；如果是 1—8，8 个数，最后剩下 1。

我们发现当数的个数是 2，4，8 时，最后剩下的都是 1。实际上，当数的个数为2^n时（$n \geq 2$），当擦完一圈后还剩2^{n-1}个数，把问题化成2^{n-1}个数的情况。不断作下去，最后化为 2 个数的情况，显然最后剩下的数为 1。注意，1 为起始数。

由于$2^{10} = 1024$，$2^{11} = 2048$。

$2^{10} < 1997 < 2^{11}$，

$1997 - 1024 = 973$。

这就是说，要剩2^{10}个数，需要先擦去 973 个数。按题意，每两个数擦去一个数，当擦第 973 个数时，最后擦去的数是：$973 \times 2 = 1946$。

下一个起始数是 1947，所以，最后剩下的数应是 1947。

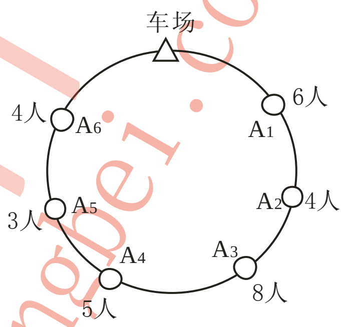
第二十章　综合练习题

1. 有 9 个分数的和为 1，它们的分子都是 1，其中的五个是$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{11}$、$\frac{1}{33}$，其余四个数的分母个位数都是 5，请写出这四个分数。

2. 有一串数$\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$、$\frac{1}{4}$……它的前 1997 个数的和是多少？

3. 某班买来单价为 0.5 元的练习本若干，如果将这些练习本只给女生，平均每人可得 15 本，如果将这些练习本只给男生，平均每人可得 10 本，那么这些练习本平均分给全班同学，每人应付多少钱？

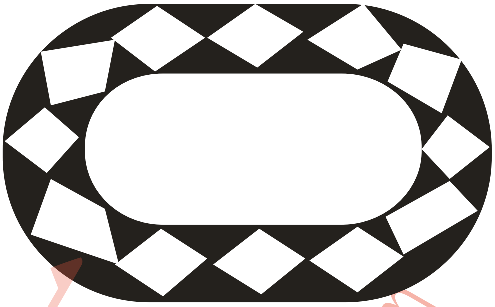
4. 某车场每天有 4 辆汽车经过六个货站A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6组织循环运输。A_1装货需要 6 个工人，在A_2卸货需 4 个工人，在A_3装货需 8 个工人，在A_4卸货需 5 个工人，在A_5点装货需 3 个工人，在A_6点卸货需 4 个工人，若每个货站固定工人太多，会造成人力浪费，我们可以让装卸工人跟车走，这样有人跟车，有人固定，问：最少要安排多少名装卸工人？



5. 一次有小学生和初一学生参加的棋赛，计分方法是，胜者得 1 分，负者得 0 分，和棋两人各得$\frac{1}{2}$ 分，规定每位选手平均需与其他选手各对局一次，现知选手中初一学生是小学生人数的 10 倍，但其总得分只为小学生得分的 4.5 倍，问：共有几名小学生参赛，他们共得了几分？

6. 有一串自然数排成一行。已知它的第一个数与第二个数互质，而且第一个数的$\frac{5}{6}$恰好是第二个数的$\frac{1}{4}$ ，从第三个数开始，每个数正好是前两个数的和，那么这串数的第 1998 个被 3 除得的余数是几？

7. 园林小路，由正方形石板和三角形石板铺成（如图），问：是内圈三角形石板的总面积大还是外圈的总面积大？



8. 有一批规格相同的圆棒，每根划分成长度相同的五节，每节有红、黄、蓝三种颜色来涂。问：可以得到多少种颜色不同的圆棒？

9. 用对角线把一个正八边形$A_1A_2\cdots\cdots A_8$分成三角形（这些三角形的顶点是正八边形的顶点），问有多少种不同的剖分方法？

10. 某幼儿园的小班人数最少，中班有 27 人，大班比小班多 6 人。春节分苹果 25 箱，每箱苹果不超过 60 个，不少于 50 个，苹果总数的个位数字是 7，若每人分 19 个，则苹果数不够。现在大班比中班每人多分一个，中班比小班每人多分一个，刚好分完，问：这时大班每人应分苹果多少个？小班有多少人？

11. 一组互不相同的自然数，其中最小是 1，最大是 25，除去 1 之外，这组数中任一个数或者等于这组数中某个数的 2 倍，或者等于另外两个数之和，在满足要求的所有可能的数组中寻找出使得组内各数之和最小的数组，并求这数组和的最小值。

12. 有 100 个已经涂了色的小球，其中有红球、白球、黄球，允许你对它们改色，办法是：取出两个不同色的球，把它们涂上与它们颜色都不同的另一种颜色（例如：取出一个白球，一个黄球，可以改涂为红色），然后放回去，这叫“一次操作”。问：能否经过有限次操作，把所有的球都改成同一颜色？

分析解答

1. 其余四个分数的和为$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{33}=\frac{202}{3^2\times7\times11}=\frac{1010}{3^2\times5\times7\times11}$。现要把分子 1010 拆成四个数之和，这四个数只能以 3，7，11 为质因数。而

$$\begin{aligned}1010&=693+231+77+9\\&=3^2\times7\times11+3\times7\times11+7\times11+3^2\text{。}\end{aligned}$$

于是$\frac{1010}{3^2\times5\times7\times11}=\frac{3^2\times7\times11}{3^2\times5\times7\times11}+\frac{3\times7\times11}{3^2\times5\times7\times11}+\frac{7\times11}{3^2\times5\times7\times11}+\frac{3^2}{3^2\times5\times7\times11}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}$。

因此，所求的四个分数是：

$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{45}$，$\frac{1}{385}$。

2. 为了研究方便起见，我们分母相同的分数归为一组，于是

$$\frac{1}{1},\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\right),\ \cdots\cdots$$

前 n 组中包含的分数个数为

$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

当$n=62$时，$S_{62}=\frac{1}{2}(63\times62)=1953$，

当$n=63$时，$S_{63}=\frac{1}{2}(64\times63)=2016$。

又因为$1997-1953=44$，所以数列中第 1997 个数，应第 63 组第 44 个，即$\frac{44}{63}$。

数列的前 1997 个数的和为

$$\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{62}+\frac{2}{62}+\cdots+\frac{62}{62}\right)+\left(\frac{1}{63}+\frac{1}{63}+\cdots+\frac{44}{63}\right)$$

$=(1+1.5+2+\cdots+31.5)+\frac{1}{63}(1+2+\cdots+44)$

$=\frac{1}{2}\times(1+31.5)\times62+\frac{1}{63}\times\frac{1}{2}\times(44+1)\times44$

$=1007.5+15\frac{5}{7}$

$=1023\frac{3}{14}$。

所以，这个数列前 1997 个数的和是$1023\frac{3}{14}$。

3. 全分给女生，平均每人 15 本，所以练习本总数是 15 的倍数。全分给男生，平均每人 10 本，所以练习本总数又是 10 的倍数。因此，练习本总数是$[15,10]=30$的倍数。记作 30a，a 是正整数。

现把全班女生分成 a 组，每组必为 2 人；全班男生也分成 a 组，每组必为 3 人。这等于把全班分成 a 组，每组 2 名女生，3 名男生，每组分 30 本练习本。

每人 6 本。

所以，平均分给每个同学，每人应付$6\times0.5=3(元)$钱。

4. 我们采用逐步调整的方法。假定开始根据各货场需要的人数都安排成固定工人，共需工人数为$6+4+8+5+3+4=30(人)$。这样虽然保证各货站正常工作，但造成人力浪费。

现设想从每一站抽出一名工人，每辆车上安排一名（保证每辆车到各站时都能正常工作），只需 4 人，可节约 2 人。如此抽调 3 次，各站人数变为A_1剩 3 人，A_2剩 1 人，A_3剩 5 人，A_4剩 2 人，A_5剩 0 人，A_6剩 1 人。再从A_1，A_2，A_3，A_4，A_6五个站中各抽 1 人，每辆车再派 1 人，又可节约 1 人。这时每辆车跟车人数为 4 人，A_1仍留固定工人 2 人，A_3留固定工人 4 人，A_4留固定工人 1 人，并保证每辆车到各站都能正常工作。

这样，总计需装卸工人

$4\times4+2+4+1=23(人)$。

5. 设有 x 个小学生参赛，小学生得总分为 y。于是，初一参赛学生人数为 10x，所得总分为 4.5y。

比赛总人数为 11x，比赛总局数应为$\frac{11x（11x-1）}{2}$。又因每局两人得分和为 1，所以比赛得分总和应为$\frac{11x（11x-1）}{2}$。另一方面比赛得分总和也可表示成$4.5y+y=5.5y$，于是

$$5.5y=\frac{11x（11x-1）}{2},$$

$$y=x(11x-1)。$$

由于每一选手只能比赛$11x-1$局，最多积分为$11x-1$分。而 x 个小学生选手欲得x（$11x-1$）分。则每个选手都必须全胜，这只有当$x=1$时才可能。

所以，只有一个小学生参加了比赛，共得了 10 分。

6. 先求出这一串数的头两个，便可求出这一串数，然后再考虑这串数分别除以 3，所得余数是否有规律可循。

设第一个数为a_1，第二个为a_2，由题意可知

$\frac{5}{6}\times a_1=\frac{1}{4}a_2$，

于是

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{10}$。

又两数互质，所以$a_1=3$，$a_2=10$。

因此，这串数为：

3，10，13，23，36，59，95，154，249，403，652，1055，…。

被 3 除所得余数为：

0，1，1，2，0，2，2，1，0，1，1，2，…。

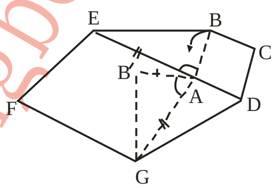
余数按“0，1，1，2，0，2，2，1”循环，周期为 8。又因

$1998\div 8=249\cdots 6$

所以第 1998 个数被 3 除所得余数应是 2。

7. 现考虑两个相连接的正方形，它们夹着一个外圈的三角形石板和一个内圈的三角形石板（如图），将ΔABE绕 A 点逆时针旋转$90°$补到$\Delta AB'G$的位置，所以$\Delta ABE\cong\Delta AB'G$。

因为$\angle GAB'+\angle DAG=180°$



因此，D、A、B'三点在一直线上。因为$AD=AB=AB'$，所以三角形 GAD 与三角形GAB'面积相等，又因三角形GAB'与三角形 EAB 面积相等。所以三角形 GAD 与三角形 EAB 面积相等

由于两个相连的正方形所夹的外圈三角形与内圈三角形面积相等，所以外圈三角形石板总面积与内圈三角形石板总面积相等。

8. 用 1，2，3 三个数分别代表三种颜色，它们组成的五位数代表一种涂法。每一位数都有三种取法，即 1，2，3。由乘法原理，共能组成$3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$（个）不同的五位数。

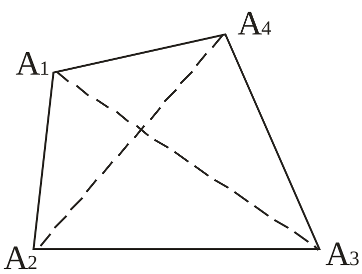
由于棒的规格相同，均匀，等分为五节。因此，一个数与它的反序数代表了一种涂法，即 12332 和 23321 代表同一种涂法。但是，有些反序数就是它自身，如 11111 和 12321，称这种数为自反数。自反数只要确定前三位，它就被确定了。因此一共有$3\times3\times3=27$(个)。

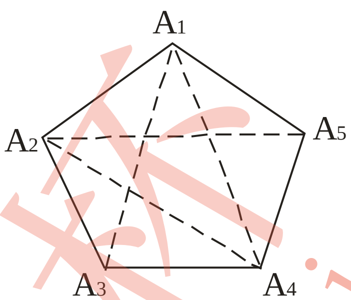
从 243 个五位数中减去 27 个自反数，还有$243-27=216$(个)数。在 216

个数中每个数与它的反序数都代表同一种涂法，即两个数决定一种涂法。所以这 216 个数决定了$216 \div 2 = 108$(种)涂色方法。

又因 27 个自反数代表 27 种涂色方法。因此，共有$108 + 27 = 135$（种）着色不同的圆棒。

9. “剖分”的意思即把正八边形分割成互不重叠的三角形（顶点是正八边形的顶点）。我们采用逆推方法来讨论。





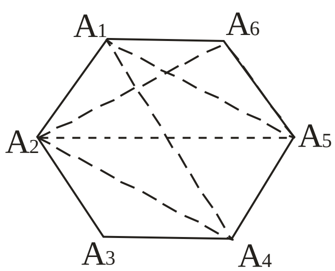
设凸 n 边形有a_n种不同的剖分方法。

（1）$n = 3$时，显然$a_3 = 1$。

（2）$n = 4$时，可以连结A_1A_3或A_2A_4。所以有 2 种剖分法（如图），即$a_4 = 1 + 1 = 2$。

（3）$n = 5$时，以$\Delta A_1A_2A_3$为一部分的分法有a_4种（即四边形$A_1A_3A_4A_5$的分法）；以$\Delta A_1A_2A_5$为一部分同样也有a_4种分法；以$\Delta A_1A_2A_4$为一部分的分法仅有一种。因此

$$a_5 = a_4 + a_4 += 2 + 2 + 1 = 5(种)。$$



（4）$n = 6$时，以$\Delta A_1A_2A_3$为一部分的分法有a_5种；以$\Delta A_1A_2A_6$为一部分的分法也有a_5种；以$\Delta A_1A_2A_4$为一部分的分法有a_4种，以$\Delta A_1A_2A_5$为一部分的分法有a_4种。因此

$a_6 = 2a_5 + 2a_4 = 2\times5 + 2\times2 = 14(\text{种})$。

（5）$n = 7$ 时，类似地有

$$a_7 = 2a_6 + 2a_5 + a_4 \times a_4$$
$$= 2\times14 + 2\times5 + 2\times2 = 42(\text{种})。$$

（6）$n = 8$时，类似地有

$$a_8 = 2a_7 + 2a_6 + 2a_4 \times a_5$$
$$= 2\times42 + 2\times14 + 2\times2\times5 = 132(\text{种})。$$

所以，一正八边形$A_1A_2\cdots A_8$共有 132 种不同剖分法。

10. （1）首先估计全园人数的上界，设小班、中班、大班的人数分别为 x，y，z。由题意：$y = 27$；因小班人数少于中班人数，所以$x \le 26$；又因大班比小班多 6 人，所以$z \le 32$。因此，全园人数$x + y + z \le 26 + 27 + 32 = 85(\text{人})$。

（2）求出中班每人分得的苹果数。假定大班每人拿出一个苹果，小班每人再多分一个苹果。这样，全园小朋友每人分得苹果一样多，即中班每人分得的苹果数。另外，还余 6 个苹果。因此

$$19 > \text{中班每人分得苹果数} = \frac{\text{苹果总数} - 6}{\text{全园人数}} > \frac{25\times50 - 6}{85} > 14.6。$$

所以中班每人分得苹果数只能是 15，16，17，18。

又因苹果总数的个位数 7，（苹果总数-6）的个位数 1，所以（全园人数 × 中班每人分得苹果数）的个位数是 1。

因此，中班每人分得苹果只能是 17 个。由此可知，大班每个分得苹果 18 个。

（3）计算全园人数。由于

$$\text{全园人数} = \frac{\text{苹果总数}-6}{17} > \frac{25\times50-6}{17} > 73。$$

所以$73 < \text{全园人数} \le 85$。

全因（全园人数 × 17）的个位数是 1。因此

全园人数 $= 83$，即 $x + y + z = 83$。

（4）求小班人数 x。由上

$$\begin{cases} z + x = 56 \\ z - x = 6 \end{cases}$$

解得　$x = 25$。

答：大班每人分得苹果 18 个。

小班人数为 25 人。

11. 问题要求构造出符合某些条件的数组。我们可采用逐步接近“目标”的办法。

不难发现由前 25 个自然数组成的数组：1，2，3，4，…，24，25，符合题目要求，但其和不是最小的。

先确定数组中的一些数。把数组中的数由小到大排起来，容易看出：1 后面的数一定是 2，2 后面的数可以是 3 或 4；3 后面的数可以是 4 或 5 或 6；4 后面的数可以是 6 或 8。最后一个数应为 25，把它们列出来：

1，2，3，4，___________，25；

1，2，3，5，___________，25；

1，2，3，6，___________，25；

1，2，3，5，__________，25；

1，2，3，6，__________，25；

1，2，3，4，8，__________，25。

因为 25 是奇数，它只能是另外两数之和。在“_____”处至少要再添加两个数，否则不能满足要求。还可推知添加的两个数之和不能小于 25，否则，25 与新添加的某一个数就不能满足题目条件。

由上述分析，先考虑数列

1，2，3，4，________，25。

由于 $25=5+20=6+19=7+18=8+17=9+16=10+15=11+14=12+13$

经检验表明，在“_____”处仅加两个数，不能满足题目要求。

再考察数列 1，2，3，5，______，25。容易看出添加 10，15 两数后，数组

1，2，3，5，10，15，25

符合题目要求，其和最小。和为

$1+2+3+5+10+15+25=61$。

12. 设原有红球、白球、黄球的个数分别为 x，y，z，且$x+y+z=100$。由于 100 不是 3 的倍数，因此 x，y，z 不是 3 的倍数，而且 x，y，z 被 3 除后的余数不能互不相同，否则 $x+y+z$为 3 的倍数。可见 x，y，z 中有两个被 3 除的余数相同，另一个被 3 除的余数与它们不同。

设 y，z 被 3 除后的余数相同，x 被 3 除后余数与它们不同。

如果$y = z$，那么可以用一白、一黄改涂为两个红球的方法，经过有限次操作，把所有的球都涂成了红色。

如果$y \neq z$，不妨假定$y < z$，于是$z - y$必是 3 的倍数，进行“一白一黄变二红”的改色，直到把白球用完，这时只有红球和黄球两种，且黄球数$z - y$是 3 的倍数。我们再把三个黄球和一个红球组成一组。对这一组进行改色，办法是：

先用一红一黄变二白，这时四个球是二白二黄。再把二白二黄改为四红。于是每三个黄球和一个红球都可以变为四个红球。

由于黄球个数$z - y$是 3 的倍数，且是有限的，而红球越改越多，所以经过有限次改色后，总可使这 100 个球全涂成红色。