2015年华杯赛模拟考考试试卷答案 高年级组

一、　填空题：（每小题10分）

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	第七题	第八题
答案	0	6	115和161	64	4	4	20	8569

二、解答下列各题（每题10分，要求写出简要过程）

9、【解析】$x=\frac{1}{2}$．设$y=3x-\frac{1}{2}$，则$\left[x+1\right]=3x-\frac{1}{2}$变为$\left[\frac{y}{3}+\frac{7}{6}\right]=y$，这里$y$是整数．有不等式：

$\frac{y}{3}+\frac{7}{6}-1<\left[\frac{y}{3}+\frac{7}{6}\right]\le\frac{y}{3}+\frac{7}{6}$，即$\frac{y}{3}+\frac{1}{6}<y\le\frac{y}{3}+\frac{7}{6}$，$\frac{1}{6}<y\le\frac{7}{6}$，所以$y=1$，得到：$x=\frac{1}{2}$．

【答案】$\frac{1}{2}$．

10.【解析】这串字符共由11个字母组成．若编码后一开始的数码为0，则此数码必代表C；若编码后一开始的数码为1，且下一个字母也为1，则这两个连续的1必代表B；若编码后一开始的数码为1、下一个字母为0且第三个数码为1，则这三个连续的数码必代表A．利用此规则，可知题中的字符串可唯一地分隔开来：“11，101，0，101，11，11，0，0，11，0，101”对应的字符串为“$BACABBCCBCA$”，共有11个字母．

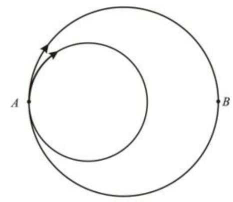
【答案】11个．

11.【解析】商的最小值是7．注意到7只有自己可被7整除，故7必须在被除数上，因此商不小于7．剩下的数$1\times2\times3\times4\times5\times6\times8\times9\times10=2^8\times3^4\times5^2$，故可以让第二组的乘积等于$2^4\times3^2\times5^1$，例如，$\frac{3\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times4\times9\times10}=7$，故商的最小值为$7$．

【答案】7.

12.【解析】商的最小值是7．注意到7只有自己可被7整除，故7必须在被除数上，因此商不小于7．剩下的数$1\times2\times3\times4\times5\times6\times8\times9\times10=2^8\times3^4\times5^2$，故可以让第二组的乘积等于$2^4\times3^2\times5^1$，例如，$\frac{3\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times4\times9\times10}=7$，故商的最小值为$7$．

【答案】7.



图F3-7

三、解答下列各题（每题15分，共30分，要求写出详细过程）

13.【解析】当小圆上的甲虫爬了376.8厘米时，两只甲虫首次相距最远．圆内的任意两点，以直径两端点的距离最远．如果沿小圆爬行的甲虫爬到A点，沿大圆爬行的甲虫恰好爬到B点，两甲虫的距离最远，见图$F3$-7．小圆周长为$\pi\times30=30\pi$（厘米），大圆周长为$\pi\times48=48\pi$（厘米），半圆周长为24π厘米．30与24的最小公倍数为120，$120\div30=4$，$120\div24=5$．所以，小圆周上甲虫爬了至少4圈时，大圆上甲虫爬了5个$\frac{1}{2}$圆周长，即爬到了B点，这时两只甲虫相距最远．计算可得小圆周上甲虫爬了376.8厘米．

【答案】376.8厘米．

14.【解析】对正整数n以及正整数a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n}，如果$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$是一个奇数且$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$的部分和中至多有n个两两不同的奇数，我们则称$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$是一个长度为n的“坏和”．那么我们即是要证明“坏和”是不存在的．下面我们假设“坏和”存在，然后推出矛盾．假设“坏和”是存在的，那么一定存在长度最短的“坏和”，即存在正整数m，使得不存在长度小于m的“坏和”，但存在长度为m的“坏和”．假设$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$是一个长度为m的“坏和”，那么必然有$m>1$，因为当$m=1$时，a_1+a_2是奇数，则a_1和a_2中必有一个奇数，此时a_1+a_2的部分和中恰有$1+1=2$（个）不同的奇数；下面我们分两种情形讨论：情形一：如果$a_1+a_2+\cdots+a_{2m-2}$，$a_3+a_4+\cdots+a_{2m}$，$a_2+a_3+\cdots+a_{2m-1}$这三个正整数有一个是奇数，假设$a_1+a_2+\cdots+a_{2m-2}$是奇数，那么由于$m-1<m$，因此$a_1+a_2+\cdots+a_{2m-2}$不是“坏和”，故$a_1+a_2+\cdots+a_{2m-2}$的部分和中至少有m个两两不同的奇数，再加上一个比它们都大的奇数$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$，我们得出的$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$的部分和中至少有$m+1$个两两不同的奇数，这与$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$是“坏和”矛盾同理另外两种情况也可推出矛盾．情形二：如果$a_1+a_2+\cdots+a_{2m-2}$，$a_3+a_4+\cdots+a_{2m}$，$a_2+a_3+\cdots+a_{2m-1}$这三个正整数都是偶数，那么一定有$m>2$，否则若$m=2$，我们有a_1+a_2，a_3+a_4都是偶数，这与$a_1+a_2+a_3+a_4$是奇数矛盾．那么$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$的部分和中有以下三类奇数：

（1）设$A=a_3+a_4+\cdots+a_{2m-2}$，那么$(a_1+a_2+\cdots+a_{2m-2})+(a_2+a_3+\cdots+a_{2m-1})+(a_3+a_4+\cdots+a_{2m})=(a_1+a_{2m})+2(a_2+a_{2m-1})+3A$是偶数，又$a_1+a_{2m}=(a_1+a_2+\cdots+a_{2m-1}+a_{2m})-(a_2+\cdots+a_{2m-1})$是奇数，所以必有$A$是奇数．因为$m-2<m$，所以$A=a_3+\cdots+a_{2m-2}$不是“坏和”，因此$a_3+\cdots+a_{2m-2}$的部分和中至少有$m-1$个两两不同的奇数；

（2）由于$(a_2+a_3+\cdots+a_{2m-2})+(a_3+\cdots+a_{2m-2}+a_{2m-1})=(a_3+\cdots+a_{2m-2})+(a_2+a_3+\cdots+a_{2m-2}+a_{2m-1})$是一个奇数，因此$(a_2+a_3+\cdots+a_{2m-2})$和$a_3+\cdots+a_{2m-2}+a_{2m-1}$中必有一个是奇数；

（3）$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$是奇数．

综上可知，$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$的部分和至少有$m+1$个两两不同的奇数，这与$a_1+a_2+\cdots+a_{2m}$是“坏和”矛盾，到此，我们证明了“坏和”是不存在的．