

2015 年华杯赛高年级组最后两套题 (一)

考生须知	1. 本试卷共 4 页, 14 题 2. 本试卷满分 150 分, 考试时间 90 分钟 3. 在试卷密封线内填写姓名、年级、学校、座位号
------	---

一、填空题: (每小题 10 分)

1. 【解析】设 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = A$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = B$. 所以, 原式等于 $A \times \left(B + \frac{1}{5}\right) - \left(A + \frac{1}{5}\right) \times B = \frac{1}{5}$.

【答案】 $\frac{1}{5}$.

2. 【解析】设弟弟当年 x 岁, 则哥哥现在 $2x$ 岁, 由于“哥哥当年的年龄与弟弟现在的年龄相同”, 有 $2x$ 减去相隔年等于 x 加上相隔年, 所以 $2x - x$ 是现在与当年相隔年的 2 倍, 即相隔年是 $\frac{x}{2}$ 年, 所以弟弟

现在的年龄为 $\frac{3x}{2}$, 由已知得 $\frac{3x}{2} + 2x = 49$, 解方程得 $x = 14$, 所以哥哥现在 28 岁.

【答案】28.

3. 【解析】两位数的完全平方数有 16, 25, 36, 49, 64, 81, 可知 $1+6=2+5=7$, $4+9=13$ 与 $6+4=10$ 都不是完全平方数, 而 $3+6=8+1=9=3^2$ 为完全平方数, 故知只有 36 和 81 满足它的两个数码之和也恰好是完全平方数. 因此, 所有这样的两位数之和为 $36+81=117$.

【答案】117.

4. 【解析】因为 $A = 15984 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 37$, $B = 48951 = 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 37$, 所以 $A \times B = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 37 \times 37$. 又因为 $n^2 = A \times B$, 所以 $n = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 37 = 27972$, 从而 n 的各位数码之和为 27.

【答案】27.

5. 【解析】由已知可得, 甲每天喝咖啡的量为 $\frac{1}{12}$ 罐, 乙每天喝咖啡的量为 $\frac{1}{60}$ 罐; 甲每天喝茶的量为 $\frac{1}{30}$ 斤,

乙每天喝茶的量为 $\frac{1}{20}$ 斤. 甲先用 30 天喝完 1 斤茶叶, 此时咖啡还剩 $\frac{1}{2}$ 罐, 两人一起喝 5 天喝完,

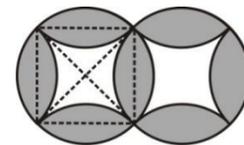
所以, 共需 35 天喝完咖啡和茶叶.

【答案】35.

6. 【解析】如图 F3-8 所示, 连接 AB, BC, CD, DA, AC, BD , 由题意可知 $ABCD$ 为正方形, 且 $AC = BD = 20\text{cm}$. 因此, 正方形 $AB-CD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times AC \times BD = 200 \text{ cm}^2$. 设图中每块阴影

部分的面积为 S , 由图形的对称性可知, 圆的面积减去正方形 $ABCD$ 的面积等于 $2S$. 因此, $2S = 3.24 \times 10^2 - 200 = 114 \text{ cm}^2$, 即 $S = 57 \text{ cm}^2$. 所以, 阴影部分的面积是 $7S = 399 \text{ cm}^2$.

【答案】399.



图F3-8

7. 【解析】40 幅作品的排列方式有 $1 \times 40, 2 \times 20, 4 \times 10, 5 \times 8$ 四种: 1×40 所需要的图钉为 $(1+1) \times (40+1) = 82$ (枚), 2×20 所需要的图钉为 $(2+1) \times (20+1) = 63$ (枚), 4×10 所需要的图钉为 $(4+1) \times (10+1) = 55$ (枚), 5×8 所需要的图钉为 $(5+1) \times (8+1) = 54$ (枚). 故最少需要 54 枚图钉.

【答案】54.

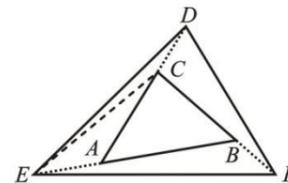
8. 【解析】3 人可以, 例如语文成绩分别排 1, 2, 3, 数学成绩排成 3, 2, 1, 此时满足题意. 下面说明多于 3 人不成, 因为只有三个等级, 所以多于 3 人的同学中至少有 2 人语文成绩相同, 这 2 人的数学成绩一定不同, 此时其中数学成绩高的同学比另一人成绩好, 矛盾!

【答案】3.

二、解答下列各题 (每题 10 分, 要求写出简要过程)

9. 【解析】最小的自然数最小是 1936. 最大的自然数能被 17 整除, 设为 $17k$, 又知这个数除以 15 余 3, 即 $17k = (15+2) \times k = 15k + 2k$ 除以 15 余 3, 此时 k 最小是 9, 这个最大数最小是 $17 \times 9 = 153$, 所以, 最大的自然数应具有形式: $153 + 17 \times 15a = 153 + 255a$. 由于是三个连续的自然数, 所以, 最小的自然数应具有形式: $151 + 255a$, 要求它能被 11 整除, 而 $151 + 255a = 11 \times 13 + 8 + (11 \times 23 + 2)a = 11 \times 13 + 11 \times 23a + 8 + 2a$. 所以最小的 $a = 7$, 因此, 这个最小的自然数最小是 $151 + 255 \times 7 = 1936$.

10. 【解析】 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{13}{4}$. 如图 F3-6 所示, 连接 EC , 设 $S_{\triangle DCE} = x$, 则 $S_{\triangle ACE} = 2x$, $S_{\triangle ACB} = 4x$, 所以 $\triangle DAE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{3}{4}$. 同理, $\triangle BEF$ 和 $\triangle DCF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比均为 $\frac{3}{4}$, 所以 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{13}{4}$.



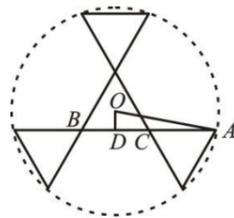
图F3-6

11. 【解析】可以，共有两组分组方法，分别是(1, 5, 12)和(2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11)，(2, 4, 8)和(1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12)。假设第一组中3从小到大为 a, b, c 。由12的和是78，可知另外的9个数的和为 $78-(a+b+c)$ ，所以有 $78-(a+b+c)=abc$ ，即 $abc+(a+b+c)=78$ 。当 $a=1$ 时， $bc+b+c=77$ ，解得 $b=5, c=12$ ；当 $a=2$ 时， $2bc+b+c=76$ ，解得 $b=4, c=8$ ；当 $a=3$ 时， $3bc+b+c=75$ ，无满足题意的解；综上，可以得到上述答案。

12. 【解析】总共有12种摆放方法，如果两种摆放方式经绕中心旋转认为是一样的，则只有3种不同的摆放方式。第一行，1, 2, 3有6种摆放的方法。针对第一行的每一种安排，第二行有两种安排方法。第三行的安排根据要求，只能有一种方法。共有12种。下面说明每种摆放的方式旋转后都不会与原来的摆法相同，只需考虑旋转90度，180度，270度三种情况。(1)旋转90度后，如果与原来的摆放方式一致，那么同一行两端的数就是一样，矛盾！所以旋转90度后得到的摆放方式不一样。(2)旋转180度后，如果与原来的摆放方式一样，则中间一列的上下两个数相同，矛盾，因此旋转180度后，两个摆放方式不一样。(3)同理可说明旋转270度后，得到的摆放方式与原来的不一样。这说明，每种摆放方式，旋转3次，都不会一样，所以，总共有12种，如果两种摆放方式经绕中心旋转认为是一样的，则只有3种不同的摆放方式。

三、解答下列各题（每题15分，共30分，要求写出详细过程）

13.



图F3-10

【解析】最大圆的面积为 263.76cm^2 。如图F3-10所示，由于此风车的对称中心即为风车旋转一周扫过的最大圆的圆心，令此圆的半径为 OA 。设 O 到 BC 边的距离为 $OD=h\text{cm}$ ，由题目可知， $AD=9\text{cm}$ 且 $6^2=12h^2$ ，即 $h^2=3$ 。由勾股定理可得： $OA^2=OD^2+AD^2=3+81=84$ 。所以风车旋转一周扫过的最大圆的面积为 $\pi \times OA^2=3.14 \times 84=263.76\text{cm}^2$ 。

14. 【解析】最多能连1014051条。

(1) 若2013个点在一直线上，则用这2014个点两两连直线可连 $2013+1=2014$ 条。

(2) 若至多2012个点在一直线上，那么这条线外至少有2个点，于是可以从2014个点中取到不在一条直线上的6个点，且至少有3点在同一条直线上（否则，任一条直线上至多2个点，这6个点就不只分布在两条直线上），记为 A, B, C ，所在直线为 L 。另外取2点 D, E ，直线 DE 记为 M ，不是 L 。对于任意另外一点 X ，6个点 A, B, C, D, E, X 一定分布在2条直线上，由抽屉原理，其中一条上有 A, B, C 中2点，由于2点唯一决定一条直线，这2条直线有一条就是 L ，另一条上有 D 和 E ，所以就是 M 。因此， X 必在 L 或 M 上，或就是二者交点，这就是说，平面上2014个点分布在两条直线 L 和 M 上。若 L, M 的交点是2014个点之一，那么两两连直线的条数不多于 $1006 \times 1007 + 2 = 1013044$ ，若 L, M 的交点不是2014个点之一，那么两两连直线的条数不多于 $1007 \times 1007 + 2 = 1014051$ 。综上，用这2014个点两两连直线，最多能连1014051条。