座位号________ 学校________ 年级________ 姓名________

密 封 线 内 禁 止 答 题

2015 年华杯赛高年级组最后两套题 （二）

考生须知	1．本试卷共 4 页，14 题 2．本试卷满分 150 分，考试时间 90 分钟 3．在试卷密封线内填写姓名、年级、学校、座位号

一、 填空题：（每小题 10 分）

1．【解析】因为$1+2=\frac{1}{2}(2\times3)$，$1+2+3=\frac{1}{2}(3\times4)$，$\cdots$，$1+2+3+\cdots+10=\frac{1}{2}(10\times11)$，所以，原式

$$=1+2\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{10\times11}\right)=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}.$$

【答案】$\frac{20}{11}$．

2．【解析】由摄氏度与华氏度的换算关系及题目条件可得：摄氏度+华氏度=摄氏度+摄氏度$\times\frac{9}{5}+32=60$，即，摄氏度$\times\frac{14}{5}=28$，也就是摄氏度$=10$．所以在10摄氏度时，华氏度的值为50，二者之和为60．

【答案】10．

3．【解析】a，b，c均不为0．$m=\frac{\overline{abc}}{abc}=\frac{100a+10b+c}{abc}=\frac{100}{bc}+\frac{10}{ac}+\frac{1}{ab}\le100+10+1=111$，验算可知，$\frac{111}{1\times1\times1}=\frac{111}{1}=111$，$111$可以达到，所以$m$的最大值为$111$．

【答案】111．

4．【解析】可以观察出2^n，$n=1$，2，$\cdots$的个位数规律为2，4，8，6这四个数依次重复循环，因为$6972593\equiv1\pmod 4$，故$2^{6972593}$的个位数是2，于是该质数的个位数是1．

【答案】1．

5．【解析】设三角形三边长分别为a，b，c，可设$a\ge b\ge c$．如果$a\ge5$，则$b+c=10-a\le5\le a$，此与三角形任意两边和大于第三边矛盾．如果$a\le3$，则$a+b+c\le9$．因此有$a=4$，$b+c=6$，于是只有两种可能：$a=4$，$b=4$，$c=2$；$a=4$，$b=3$，$c=3$．

【答案】2．

6．【解析】当A队比B队的人数至少多2人时，此时A队的队员X会与B队的每一位队员的都比赛一场；若把队员X调到B队，则队员X会与A队其余的队员都比赛一场．可知把队员X从A队调到B队后，比赛的总场数会增加．所以，当三队运动员人数相等或相差1时，比赛总场数最多．此时，三队运动员人数分别是10，10，9．所以，比赛的场数最多为$10\times10+10\times9+10\times9=280$（场）．

【答案】280．

7．【解析】设此数为x，则$\begin{cases}x+11=a^2\\x-8=b^2\end{cases}$，从而$a^2-b^2=(a-b)(a+b)=19$．于是$\begin{cases}a+b=19\\a-b=1\end{cases}$，$a=10$，$x=89$．

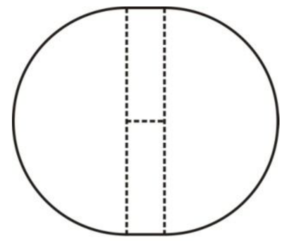
【答案】89．

8．【解析】从题中可知B水管注水3小时的量相当于A，C水管同时注水9小时的量，所以B单独注水$9+3=12$（小时）即可注满这个水池．

【答案】12．

二、解答下列各题（每题 10 分，要求写出简要过程）

9．【解析】羊能吃到草的面积为374m^2．根据题意可知羊能吃到草的区域如图$F3$−9 所示，该区域由两个半径为10m的半圆与一个长为3m、宽为20m的长方形组成．所以羊能吃到草的面积为$\pi\times10^2+3\times20=374\text{m}^2$．



图F3−9

10．【解析】甲车和乙车速度之比是$2:1$．设两车从出发到相遇所用时间为x小时，并用$v_{\text{甲}}$，$v_{\text{乙}}$分别表示两车的速度．由题意可得，$\begin{cases}v_{\text{甲}}x=16v_{\text{乙}}\\4v_{\text{甲}}=v_{\text{乙}}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}}=\frac{16}{x}\\\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}}=\frac{x}{4}\end{cases}$．解方程$\frac{16}{x}=\frac{x}{4}$得$x^2=64\Rightarrow x=8$．于是$\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}}=\frac{16}{8}=2:1$．

11．【解析】$DF=12\text{cm}$．设$DF=x$，则有$\frac{1}{2}\times(x+CD)\times(8+BC)-CD\times BC-\frac{1}{2}\times8\times AB-\frac{1}{2}\times x\times AD=28$．注意$AB=CD$，$AD=BC$，$CD\times BC=40$，由上式得到：$4x-20=28$，$x=12$（cm）．

12．【解析】有53922种选取方法．将1，2，$\cdots$，100按照除以3余i（$i=0$，1，2）分成以下三个集合：$S_1=\{1,4,\cdots,97,100\}$，$S_2=\{2,5,\cdots,98\}$，$S_0=\{3,6,\cdots,99\}$．则有$|S_1|=34$，$|S_2|=33$，$|S_0|=33$．假设选取的三个两两不同的正整数为$a$，$b$，$c$．那么$a$，$b$，$c$除以$3$的余数情形只可能是以下两种：

情形一：a，b，c除以3的余数相同．此时相当于是从同一个S_i中三个两两不同的正整数，$i=0$，1，2，故

共有$\frac{1}{6}(34\times33\times32)+\frac{1}{6}(33\times32\times31)+\frac{1}{6}(33\times32\times31)=16896$（种）取法．

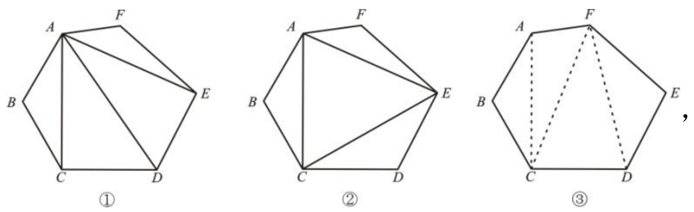
情形二：a，b，c除以3的余数两两不同．此时相当于是分别从S_1，S_2，S_3中各取一个正整数，故共有$34\times33\times33=37026$（种）取法．

综上可知，满足条件的正整数a，b，c的取法共有$16896+37026=53922$（种）．

三、解答下列各题（每题15分，共30分，要求写出详细过程）

13．【解析】从11边形的每个顶点可引出8条对角线，故11边形一共有$\frac{1}{2}(11\times8)=44$（条）对角线．过平面上任意一点$O$作与这些对角线分别平行的44条直线，它们将以$O$为圆心的圆周分成$44\times2=88$（个）角，其中最小的角的度数一定不超过这88个角度的和的平均值，即$\le\frac{360^\circ}{88}=\left(\frac{45^\circ}{11}\right)<5^\circ$．

14．【解析】共有14种不同的分割方式．由于这三条对角线的交点不得在六边形的内部，故只有以下3种类型的分割方式：



，

在类型①中，由于每个顶点都可以引出三条这样的对角线，所以这种类型对应6种分割方式工．在类型②中，这种分割方式对应三个不相邻的顶点，所以这种类型对应2种分割方式．在类型③中，这三条对角线形成了一条折线，而每个顶点都可以引出一条这样的折线，所以这种类型共对应6种分割方式．综上所述，共有$6+2+6=14$（种）不同的分割方式．

密 封 线 内 禁 止 答 题