



## 第十六届“中环杯”中小学生思维能力训练活动

## 六年级选拔赛

2015年12月19日16:00~17:30

## 【第1题】

计算： $\frac{1}{7} \times \frac{8}{5} + \frac{1}{35} \times \frac{10}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 【分析与解】

$$\text{原式} = \frac{8}{35} + \frac{1}{35} \times \frac{10}{3} + \frac{12}{35} = \frac{1}{35} \times \frac{10}{3} + \frac{20}{35} = \frac{10}{35} \times \left( \frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{2}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$$

## 【第2题】

一项工作，甲单独完成需要6天，乙单独完成需要3天，那么甲、乙合作需要          天完成这项工作。

## 【分析与解】

工程问题。

设工作总量为“1”；

$$\text{甲工作效率为 } 1 \div 6 = \frac{1}{6};$$

$$\text{乙工作效率为 } 1 \div 3 = \frac{1}{3};$$

$$\text{甲、乙合作需要 } 1 \div \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = 2 \text{ 天完成这项工作。}$$

## 【第3题】

某校六(1)班里的男生数量与女生数量之比为8:5。某天，有12个男生代表六(1)班出去参加足球比赛了，班里剩下的男生数量与女生数量相等。则六(1)班里一共有          个学生。

## 【分析与解】

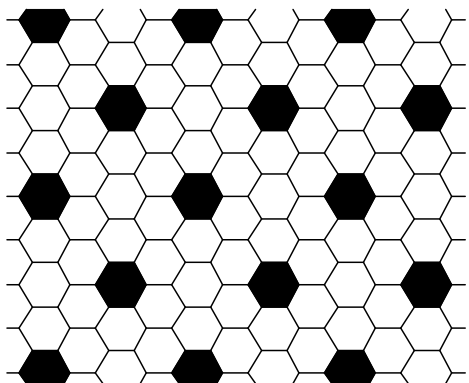
某校六(1)班里的男生数量与女生数量之比为8:5；

设男生有 $8x$ 人，女生有 $5x$ 人；由题意，得 $8x - 12 = 5x$ ；解得 $x = 4$ ；六(1)班里一共有 $8 \times 4 + 5 \times 4 = 52$ 个学生。



## 【第4题】

如图是由黑色正六边形和白色正六边形组成，整个图形往各个方向不断地重复下去，整个平面上黑色正六边形数量占总体的 \_\_\_\_\_ %。



## 【分析与解】

相邻两列，一列中每4个正六边形中有1个黑色正六边形和3个白色正六边形，另一列全是白色正六边形；

故整个平面上黑色正六边形数量占总体的  $(1 \div 4) \div 2 = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$ 。

## 【第5题】

将分数  $\frac{1}{1024000}$  化为有限小数，小数点后一共有 \_\_\_\_\_ 个数码。

## 【分析与解】

因为  $1024000 = 1024 \times 1000 = 2^{10} \times 10^3 = 2^{10} \times (2 \times 5)^3 = 2^{13} \times 5^3$ ；

所以  $\frac{1}{1024000} = \frac{1}{2^{13} \times 5^3}$ ；

其中分母质因数2的指数为13，质因数5的指数为3

故将分数  $\frac{1}{1024000}$  化为有限小数，小数点后一共有13个数码。

事实上， $\frac{1}{1024000} = \frac{1}{2^{13} \times 5^3} = \frac{5^{10}}{2^{13} \times 5^{13}} = \frac{9765625}{10^{13}} = 0.0000009765625$ 。

## 【第6题】

将“+”、“-”号填入下面算式的空格内：

$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6$ ，可以得到 \_\_\_\_\_ 种不同的值。

## 【分析与解】

每个方框填+号，算式的最大值为  $+1+2+3+4+5+6=21$ ；

每个方框填-号，算式的最大值为  $-1-2-3-4-5-6=-21$ ；

而无论方框里填+或-，算式结果的奇偶性不变；

显然，-21到21的所有奇数都能取到；

即算式结果可以是-21、-19、-17、...、19、21；

将“+”、“-”号填入算式的空格内： $\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6$ ，可以得到  $[21 - (-21)] \div 2 + 1 = 22$  种不同的值。





## 【第7题】

在一个森林中，青蛙都是绿色或者蓝色的。从去年到今年，蓝色青蛙的数量增加了60%，绿色青蛙的数量减少了60%。今年蓝色青蛙与绿色青蛙的数量比与去年绿色青蛙与蓝色青蛙的数量比相同。那么，今年青蛙的总数量比去年减少\_\_\_\_\_ %。

## 【分析与解】

设去年蓝色青蛙有  $x$  只，去年绿色青蛙有  $y$  只；

则今年蓝色青蛙有  $(1+60\%)x=1.6x$  只，今年绿色青蛙有  $(1-60\%)y=0.4y$  只；

根据“今年蓝色青蛙与绿色青蛙的数量比与去年绿色青蛙与蓝色青蛙的数量比相同”列方程，得  $1.6x:0.4y=y:x$ ；

$$4x^2 = y^2;$$

因为  $x>0$ 、 $y>0$ ；

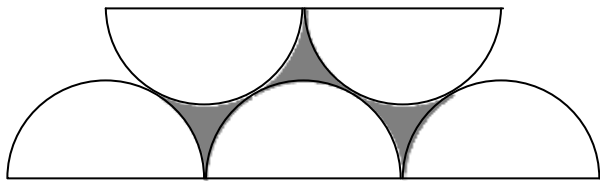
所以  $2x=y$ ；

所以  $x:y=1:2$ ；

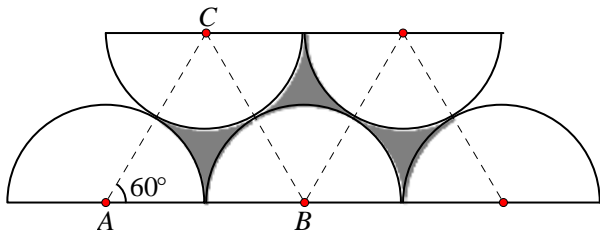
今年青蛙的总数量比去年减少  $\frac{(1+2)-(1.6 \times 1 + 0.4 \times 2)}{1+2} = \frac{1}{5} = 20\%$ 。

## 【第8题】

如图是五个半圆互相外切（如果两个圆只有一个公共点，并且两圆圆心的距离等于两圆半径之和，就称这两个圆外切），每个半圆的半径为2，那么阴影部分的周长为\_\_\_\_\_（答案保留  $\pi$ ）。



## 【分析与解】



如图所示，分别联结互相外切的半圆的圆心；

因为  $AB=BC=CA=2r$ ；

所以  $\triangle ABC$  是等边三角形；

所以  $\angle BAC=60^\circ$ ；

所以一块阴影的一段弧的弧长为  $l = \frac{n}{180} \pi r = \frac{60}{180} \times \pi \times 2 = \frac{2}{3} \pi$ ；

阴影部分的周长为  $\frac{2}{3} \pi \times 3 \times 3 = 6\pi$ 。





## 【第9题】

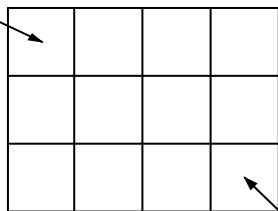
从一个 $3 \times 4$ 的正方形网格的左上角走到右下角，要求满足下面两个条件：

(1)每次走动都走到相邻的小正方形内（所谓相邻就是指有一条公共边的两个小正方形）。

(2)所有小正方形都走到过，并且只能走到一次（左上角的小方格除了出发的时候，不能再次进入；右下角的小方格除了到达的时候，也不能重复进入）。

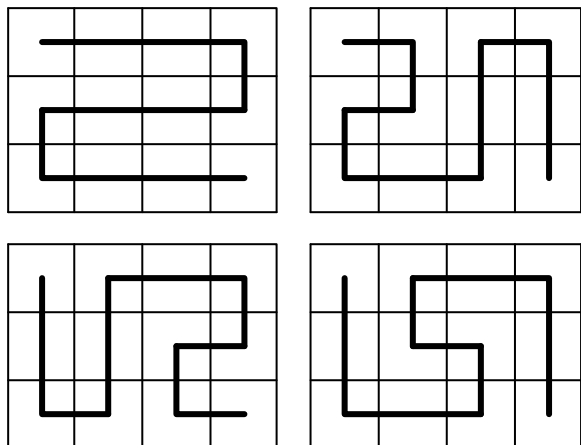
不同的走法共有\_\_\_\_\_种。

左上角



右下角

## 【分析与解】



如图所示，不同的走法共有4种。

## 【第10题】

如果将 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \dots \times \frac{99}{3} \times \frac{100}{4}$ 化成 $\frac{q}{p}$ 的形式，其中 $p$ 、 $q$ 为互质的正整数， $p$ 的值为\_\_\_\_\_。

## 【分析与解】

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \dots \times \frac{99}{3} \times \frac{100}{4} = \frac{100!}{3^{50} \times 4^{50}} = \frac{100!}{3^{50} \times 2^{100}};$$

$$100 \div 2 = 50, 50 \div 2 = 25, 25 \div 2 = 12 \dots 1, 12 \div 2 = 6, 6 \div 2 = 3, 3 \div 2 = 1 \dots 1;$$

故 $100!$ 分解质因数，质因数2的个数为 $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ ；

$$100 \div 3 = 33 \dots 1, 33 \div 3 = 11, 11 \div 3 = 3 \dots 2, 3 \div 3 = 1;$$

故 $100!$ 分解质因数，质因数3的个数为 $33 + 11 + 3 + 1 = 48$ 个；

所以 $100!$ 可以写成 $2^{97} \times 3^{48} \times N$ 的形式，其中正整数 $N$ 不含质因数2和3；

$$\text{故 } \frac{q}{p} = \frac{2^{97} \times 3^{48} \times N}{3^{50} \times 2^{100}} = \frac{N}{2^3 \times 3^2} = \frac{N}{72};$$

所以 $p = 72$ 。





【第 11 题】

四种瓷砖的尺寸为  $300\text{mm} \times 300\text{mm}$ 、 $300\text{mm} \times 600\text{mm}$ 、 $600\text{mm} \times 600\text{mm}$ 、 $600\text{mm} \times 900\text{mm}$ 。每种瓷砖使用的块数相同，拼成了一个大正方形。那么大正方形的边长至少为 \_\_\_\_\_ 毫米。

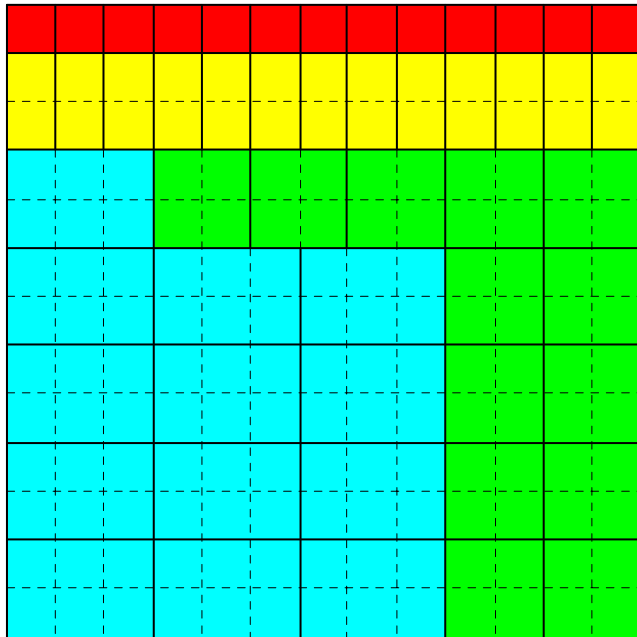
【分析与解】

四种瓷砖各用 1 块，面积为  $300^2 \times (1 + 2 + 4 + 6) = 300^2 \times 13$  平方毫米；

显然，再至少乘以 13，面积才是以平方毫米为单位的平方数；

这样大正方形的面积为  $(300^2 \times 13) \times 13 = 3900^2$  平方毫米；

如图所示，这样的情况是可以做到的。



故大正方形的边长至少为 3900 毫米。





## 【第12题】

已知  $34! = \overline{295232799CD96041408476186096435AB000000}$ ，则  $A+B+C+D = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 【分析与解】

$34 \div 2 = 17$ ， $17 \div 2 = 8 \cdots 1$ ， $8 \div 2 = 4$ ， $4 \div 2 = 2$ ， $2 \div 2 = 1$ ；

$34!$  分解质因数，质因数 2 的个数为  $17+8+4+2+1=32$  个；

$34 \div 5 = 6$ ， $6 \div 5 = 1 \cdots 1$ ；

$34!$  分解质因数，质因数 5 的个数为  $6+1=7$  个；

故  $34!$  的末尾有 7 个连续的零，即  $B=0$ ；

$\frac{34!}{10^7}$  是 8 的倍数， $\overline{35A}$  是 8 的倍数， $A=2$ ；

$34!$  既是 9 的倍数，又是 11 的倍数；

所以  $34!$  是  $[9, 11] = 99$  的倍数；

所以  $2+95+23+27+99+\overline{CD}+96+04+14+08+47+61+86+09+64+35+20+00+00+00 = \overline{CD} + 690$  是 99 的倍数；

所以  $\overline{CD} + 6 + 90 = \overline{CD} + 96$  是 99 的倍数；

所以  $\overline{CD} + 96 = 99$ ；

所以  $\overline{CD} = 03$ ；

即  $C=0$ ， $D=3$ ；

故  $A+B+C+D = 2+0+0+3 = 5$ 。

## 【第13题】

小明将四舍五入法进行了修改（仅限于本题）：对于任意的一个有限小数，先对最后一位进行四舍五入，然后对四舍五入后的结果再次进行四舍五入，直到变成一个自然数为止。比如： $2014.456 \rightarrow 2014.46 \rightarrow 2014.5 \rightarrow 2015$ 。存在一个分数  $M$ ，满足下面的性质：任何大于  $M$  的数，经过小明处理后都变成大于等于 90 的数。则  $M$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 【分析与解】

对于一位有限小数，小明处理后都变成大于等于 90 的数，最小是 89.5；

对于两位有限小数，小明处理后都变成大于等于 90 的数，最小是 89.45；

对于三位有限小数，小明处理后都变成大于等于 90 的数，最小是 89.445；

....

对于  $n$  位有限小数，小明处理后都变成大于等于 90 的数，最小是  $89.\underbrace{44 \cdots 4}_{n-1 \text{ 个 } 4}5$ ；

故我们考虑有限小数  $89.\underbrace{44 \cdots 4}_{n-1 \text{ 个 } 4}5$  ( $n$  为正整数) 均满足  $89.\underbrace{44 \cdots 4}_{n-1 \text{ 个 } 4}5 > M$ ；

故  $M$  的最小值为  $89.44 \cdots = 89.\dot{4} = 89\frac{4}{9}$ 。





## 【第 14 题】

将 108 个数  $a_1, a_2, \dots, a_{108}$  写在一个圆周上, 使得任意 20 个相邻数之和均为 1000。若  $a_1 = 1$ 、 $a_{19} = 19$ 、

$a_{50} = 50$ , 则  $a_{100} =$  \_\_\_\_\_。

## 【分析与解】

根据题意,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 1000$ ,  $a_2 + a_3 + \dots + a_{21} = 1000$ ;

所以  $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = a_2 + a_3 + \dots + a_{21}$ ;

所以  $a_1 = a_{21}$ ;

同理,  $a_{21} = a_{41}$ 、 $a_{41} = a_{61}$ 、 $a_{61} = a_{81}$ 、 $a_{81} = a_{101}$ 、 $a_{101} = a_{13}$ 、 $a_{13} = a_{33}$ 、 $a_{33} = a_{53}$ 、 $a_{53} = a_{73}$ 、 $a_{73} = a_{93}$ 、 $a_{93} = a_5$ ;

所以  $a_1 = a_5$ ;

故  $a_k = a_{k+4}$ ;

其中  $(108, 20) = 4$ ;

所以  $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times 5 = 1000$ ;

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 200$ ;

其中  $a_1 = 1$ 、 $a_{19} = a_3 = 19$ 、 $a_{50} = a_2 = 50$ ;

所以  $a_{100} = a_4 = 200 - 1 - 19 - 50 = 130$ 。





## 【第15题】

$$\text{已知} \begin{cases} A = \frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{50 \times 99} \\ B = \frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \cdots + \frac{1}{100 \times 51} \end{cases}, \text{ 则 } \frac{B}{A} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

## 【分析与解】

我们将用到如下著名的等式（这个等式叫 *Botez* 公式，最早由 *N.Botez* 在 1872 年证明）。

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

$$\text{事实上, } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

$$A = \frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{50 \times 99} = \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} \right) \times 2$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \times 2 = \left( \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} \right) \times 2;$$

$$B = \frac{1}{51 \times 100} + \frac{1}{52 \times 99} + \frac{1}{53 \times 98} + \cdots + \frac{1}{100 \times 51} = \left( \frac{151}{51 \times 100} + \frac{151}{52 \times 99} + \frac{151}{53 \times 98} + \cdots + \frac{151}{100 \times 51} \right) \times \frac{1}{151}$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{51} + \frac{1}{100} \right) + \left( \frac{1}{52} + \frac{1}{99} \right) + \left( \frac{1}{53} + \frac{1}{98} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{51} \right) \right] \times \frac{1}{151} = \left( \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} \right) \times \frac{2}{151};$$

$$\text{则 } \frac{B}{A} = \frac{\left( \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} \right) \times \frac{2}{151}}{\left( \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} \right) \times 2} = \frac{1}{151}.$$

## 【第16题】

如果一个数  $n$  具有以下性质： $17 \times n$  与  $17 \times n + 17$  的百位数字不同，我们就称其为“中环数”。那么在  $10 \leq n \leq 500$  这个范围内，“中环数”有          个。

## 【分析与解】

当  $10 \leq n \leq 500$  时，

$$17 \times 10 \leq 17 \times n \leq 17 \times 500, \text{ 即 } 170 \leq 17 \times n \leq 8500;$$

$$17 \times 10 + 17 \leq 17 \times n + 17 \leq 17 \times 500 + 17, \text{ 即 } 187 \leq 17 \times n + 17 \leq 8517;$$

而  $17 \times n$  与  $17 \times n + 17$  相差 17，即百位数字最多差 1；

即当  $(17 \times n, 17 \times n + 17) = (\overline{1\Box\Box}, \overline{2\Box\Box}), (\overline{2\Box\Box}, \overline{3\Box\Box}), \dots, (\overline{84\Box\Box}, \overline{85\Box\Box})$  时， $n$  为中环数；

故只要考虑 170 ~ 8500 中，百位数字变化了多少次即可；

$$85 - 1 + 1 = 69 = 84 \text{ 次}.$$







## 【第 17 题】

已知  $\frac{1}{71}$  用小数表示的时候，其循环节有 35 位，那么循环节最后三位为 \_\_\_\_\_（如果最后三位为 1、2、3，那么答案写为 123）。

## 【分析与解】

因为  $\frac{1}{71}$  用小数表示的时候，其循环节有 35 位；

$$\text{所以设 } \frac{1}{71} = \frac{M}{\underbrace{99\cdots 9}_{35\text{个}9}};$$

$$71M = \underbrace{99\cdots 9}_{35\text{个}9};$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ \times \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times \quad 9 \end{array}$$

$$\hline \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 639 \quad \quad \quad 639$$

$$\hline \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 99$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ \times \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ \times 169 \end{array}$$

$$\hline 639 \quad 639 \quad 639 \quad 639 \quad 639$$

$$6 \quad , \quad 6 \quad , \quad 426 \quad , \quad 426 \quad , \quad 426 \quad ;$$

$$\hline 99 \quad 99 \quad 99 \quad 999 \quad \begin{array}{r} 1 \\ 999 \end{array}$$

故  $M$  的末三位为 169；

即循环节最后三位为 169。





## 【第18题】

一个三位数  $N$  小于其最大的三个因数之和(不包括  $N$  本身), 并且  $N$  是17的倍数。这样的  $N$  有 \_\_\_\_\_ 个。

## 【分析与解】

设  $N$  除了1以外的最小的3个因数为  $a$ 、 $b$ 、 $c$  ( $a < b < c$ );

则  $N$  除了  $N$  本身以外最大的3个因数为  $\frac{N}{a}$ 、 $\frac{N}{b}$ 、 $\frac{N}{c}$  ( $\frac{N}{a} > \frac{N}{b} > \frac{N}{c}$ );

$N$  小于其最大的三个因数之和(不包括  $N$  本身), 即  $N < \frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c}$ ;

所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ ;

当  $a \geq 3$  时,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , 矛盾;

所以  $a = 2$ ;

所以  $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ ,  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}$ ;

当  $b \geq 4$  时,  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ , 矛盾;

所以  $b = 3$ ;

所以  $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{c} > \frac{1}{6}$ ,  $c < 6$ ,  $c = 4$  或  $c = 5$ 。

当  $(a, b, c) = (2, 3, 4)$  时,  $N$  含因数2、3、4;

同时  $N$  是17的倍数;

所以  $N$  是  $[2, 3, 4, 17] = 204$  的倍数;

$999 \div 204 = 4 \cdots 183$ , 这种情况有4个。

当  $(a, b, c) = (2, 3, 5)$  时,  $N$  含因数2、3、5;

同时  $N$  是17的倍数;

所以  $N$  是  $[2, 3, 5, 17] = 510$  的倍数;

$999 \div 510 = 1 \cdots 489$ , 这种情况有1个(同时510也不是4的倍数)。

综上所述, 符合题意的  $N$  的有  $4 + 1 = 5$  个。





【第19题】

7个小矮人围坐在一个圆桌上，白雪公主将一些糖果分给他们，要求：

- (1)每个小矮人至少得到一粒糖果；
- (2)任意两个小矮人得到的糖果数量都不同；
- (3)任意两个相邻小矮人得到的糖果数量的最大公因数都大于1；
- (4)七个小矮人得到的糖果数量的最大公因数为1。

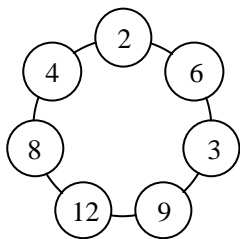
那么白雪公主至少需要准备 \_\_\_\_\_ 粒糖果才能满足要求。

【分析与解】

2的倍数：2、4、6、8、10、12，……；

3的倍数：3、6、9、12，……；

我们从2的倍数和3的倍数中，选出7个数，可以构造出一种满足题意的方法：



另一方面，若其中有5，则与5相邻的两个数最小是10和15；

而 $5+10+15=30$ 比已选7个数中最大的3个数的和 $12+9+8=29$ 还要大；

同样的，选7也不是和最小的。

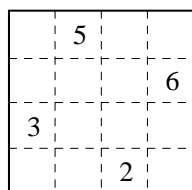
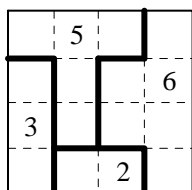
故白雪公主至少需要准备 $2+4+8+12+9+3+6=44$ 粒糖果才能满足要求。



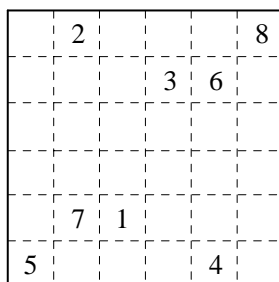


## 【第 20 题】

图  $a$  中包含了一些数字，用一些轴对称图形去分割图  $a$ （在平面内，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合，这样的图形叫做轴对称图形），使得每个轴对称图形中恰好包含一个数字，并且这个数字表示这个轴对称图形所包含的小方格的个数（如图  $b$  所示）。

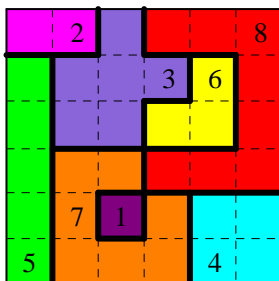
图  $a$ 图  $b$ 

请根据这个规则，对图  $c$  进行分割，并在图  $c$  画出正确的分割线。

图  $c$ 

## 【分析与解】

答案如图所示。



更多杯赛信息敬请关注家长帮社区 <http://jzb.com/bbs/sh/>

家长帮 | 社区

上海学而思 外联竞赛部

韩天



第十六届“中环杯”中小学生思维能力训练活动

六年级选拔赛

城隍喵

