

第十六届“中环杯”四年级(初赛)解析

1. 计算题: $(20.15+40.3) \times 33+20.15=$ _____

【分析】原式 $= (20.15+20.15 \times 2) \times 33+20.15$
 $= 20.15 \times 33+20.15 \times 66+20.15$
 $= 20.15 \times (33+66+1)$
 $= 2015$

2. 用 1、2、3、4 这四个数字构成一个四位数 \overline{abcd} , 要求:

(1) $a、b、c、d$ 互不相同; (2) b 比 $a、d$ 都大, c 也比 $a、d$ 都大. 这样的四位数有_____

【分析】 $b、c=3$ 或 $4, a、d=1$ 或 2 , 有
若 $a=1, d=2$, 有 1342 或 1432
若 $a=2, d=1$, 有 2341 或 2431
共有 4 个.

3. 一个长方体的六个面的面积之积为 14641, 则该长方体的体积为_____

【分析】设长方体的长宽高分别为 $a、b、c$,
则有 $abgcgcgacgbcgcgc = 14641$
 $(a^2b^2c^2)^2 = 14641$
 $a^2b^2c^2 = 121$
 $(abc)^2 = 121$
 $abc = 11$

4. 小明通过 2、0、1、6 这四个数字构成了一个数列 (不断地将 2、0、1、6 这四个数字按照这个顺序加在数后面): 2, 20, 201, 2016, 20162, 201620, 2016201, 20162016, 201620162, ..., 这个数列中, 质数有_____个.

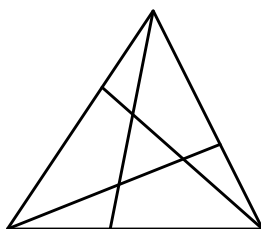
【分析】只有第一个 2 是质数, 以后出现的数都不是质数, 所以质数有 1 个.

5. 甲、乙两车同时从 $A、B$ 两地沿相同的方向行驶. 甲车如果每小时行驶 50 千米, 则 6 小时可以追上前方的乙车; 如果每小时行驶 80 千米, 则 2 小时可以追上前方的乙车. 由此可知, 乙车的速度是_____千米/时.

【分析】设乙车速度为 x 千米/时, 由追及问题的路程差=速度差 \times 时间,
得 $(50-x) \times 6 = (80-x) \times 2$

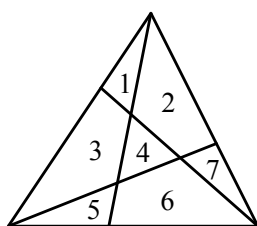
$$\begin{aligned} 300 - 6x &= 160 - 2x \\ 140 &= 4x \\ x &= 35 \end{aligned}$$

6.右图中有_____个三角形.



【分析】分类枚举，如图，

- 1 个小三角形构成的有 4 个；
- 2 个小三角形构成的有 6 个：13, 24, 27, 34, 46, 56；
- 3 个小三角形构成的有 3 个：127, 135, 567；
- 4 个小三角形构成的有 3 个：1234, 3456, 2467；
- 7 个小三角形构成的有 1 个；
- 共有 $4 + 6 + 3 + 3 + 1 = 17$ (个) .



7.已知四位数 \overline{ABCD} 满足下面的性质： \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 都是完全平方数（完全平方数是指能表示为某个整数平方的数，比如 $4=2^2, 81=9^2$ ，则我们就称 4、81 为完全平方数）.所有满足这个性质的四位数之和为_____.

【分析】满足条件的平方数为有：

\overline{AB}	\overline{BC}	\overline{CD}
16	64	49
36	64	49
81	16	64

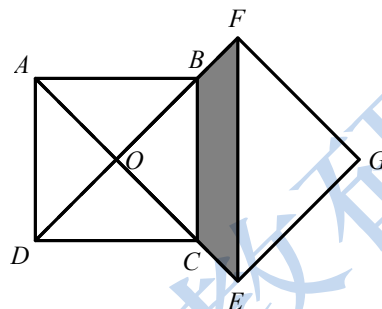
$$\begin{aligned} \therefore \overline{ABCD} &= 1649 \text{ 或 } 3649 \text{ 或 } 8764 \\ \therefore \text{和为} &1649 + 3649 + 8764 = 13462 \end{aligned}$$

8.对于自然数 a ， $S(a)$ 表示 a 的数码和（比如 $S(123) = 1+2+3=6$ ）.如果一个自然数 n 的各个数码都互不相同，并且 $S(3n) = 3S(n)$ ，则 n 的最大值为_____.

【分析】 $Q S(3n) = 3S(n)$

∴ 3 乘以 n 时不能进位，则 n 中最大的数字只能为 3，故 n 最大为 3210.

9. 如图， $ABCD$ 和 $EGFO$ 都是正方形，其中点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心， $EF \parallel BC$. 若 BC 、 EF 的长度都是正整数，并且四边形 $BCEF$ 的面积为 3.25，则 $S_{ABCD} - S_{EGFO} =$ _____ (S_{EGFO} 表示 $EGFO$ 的面积，以此类推).



【分析】设 $BC = a$ ， $EF = b$ ，则有

$$S_{\text{阴}} = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 3.25$$

$$b^2 - a^2 = 13$$

$$\therefore (b + a)(b - a) = 13$$

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 6 \end{cases}$$

$$S_{ABCD} - S_{EGFO} = 36 - 7 \times 7 \div 2 = 11.5$$

10. 下图的乘法算式，最后结果为 _____

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times \quad \square \square 5 \\ \hline \square \quad 1 \square \\ \square \quad 0 \square \\ 2 \quad \square \\ \hline \square \quad \square \square \square \end{array}$$

【分析】结果如下：

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 195 \\ \hline 115 \\ 207 \\ 23 \\ \hline 4485 \end{array}$$

11. 神庙里有一把古老的秤，对于重量小于 1000 克的物体，这把秤会显示其正确的重量；对于重量大于等于 1000 克的物体，这把秤会显示出一个大于等于 1000 的随机数。

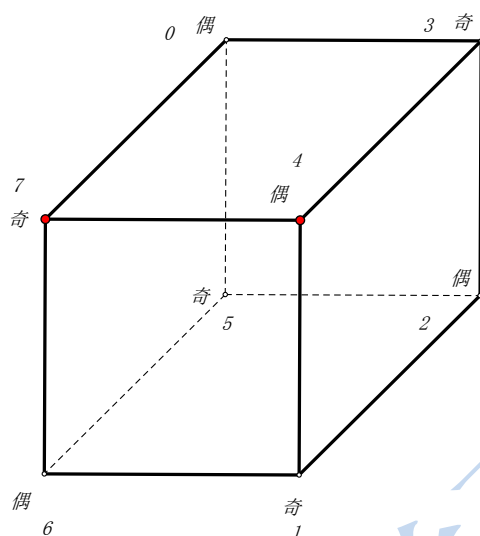
小明有五个物品，题目各自的重量都小于 1000 克，我们分别用 P 、 Q 、 R 、 S 表示它们的重量。将这五个物品两两配对放到秤上进行称重，得到下面的结果：

$Q+S=1200$ (克)、 $R+T=2100$ (克)、 $Q+T=800$ (克)、 $Q+R=900$ (克)、 $P+T=700$ (克) .那么这五个物品的重量从重到轻的顺序为_____.

【分析】 $Q+T=800$ □; $Q+R=900$ □; $P+T=700$ □; $Q+S=1200$ □; $R+T=2100$ □;
由□□得: $R>T$; 由□□得: $Q>P$; 由□□得: $S>R$; 由□□得: $T>Q$;所以: $S>R>T>Q>P$

12.将 0、1、2、3、4、5、6、7 写在一个正方体的八个顶点上(每个顶点写一个数,所有的数都只能使用一次),要求每条边上的两个数之和都是素数.则一个面上的四个数之和最大为_____.

【分析】要每条边上的两个数之和都是素数,则这相邻的两个数必然是一奇一偶,可先确定 0, 必与 3、5、7 相邻, 剩余 2、4、6 枚举即可, 如图, 最大的和为 $1+4+6+7=18$.



13.已知三个不同的质数 p 、 q 、 r 满足 $pqr=190\overbrace{L}^{n\uparrow 9} 062$, 定义 $f(n)$ 表示自然数 n 的数码和(比如: $f(3)=3$, $f(246)=2+4+6$), $f(13332)=1+3+3+3+2=12$), 则 $f(p)+f(q)+f(r)-f(pqr)=$ _____

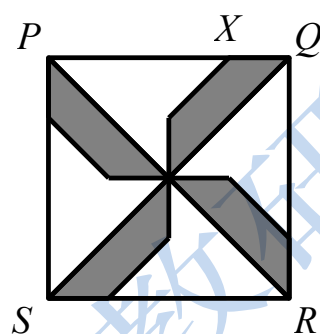
【分析】

$$\begin{aligned} pqr &= 190\overbrace{L}^{n\uparrow 9} 062 - 100 \\ &= 19 \times 10^{n+2} - 38 \\ &= 19 \times (10^{n+2} - 2) \\ &= 19 \times 2 \times (5 \times 10^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

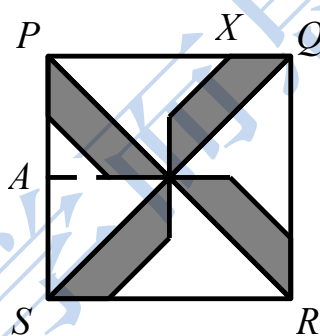
所以: pqr 为: $2, 19, 5 \times 10^{n+1} - 1$ (即 $49\overbrace{L}^{n+1} 9$)

原式 $= 2 + 1 + 9 + 4 + 9 + 9n - (1 + 8 + 9n + 6 + 2) = 8$

14. 四个完全相同的等腰梯形如下图进行放置，题目的下底构成了一个正方形的两条对角线. 若 $PX=3XQ$ ，阴影部分面积÷整个正方形面积=_____

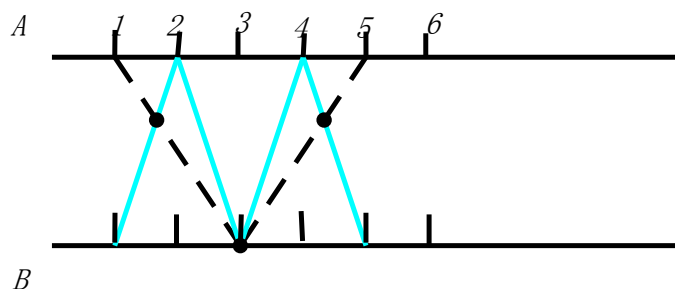


【分析】如图，设 $PA=1$ ，则 $AR=3$ ， $PB=2$ ，一个阴影的面积为： $2 \times 2 \div 2 - 1 \times 1 \div 2 = 1.5$
阴影部分面积÷整个正方形面积 $= 1.5 \times 4 \div (4 \times 4) = 0.375$.



15. 乙两人分别从 A 、 B 两地同时出发，在 A 、 B 两地之间不断往返行进. 当甲第 5 次到达 B 地的时候，乙恰好第 9 次回到了 B 地. 则当甲第 2015 次到达 B 地时，两人一共相遇了_____次（迎面碰到和追上都算相遇，如果最后同时到达 B 地，也算一次相遇）.

【分析】当甲第 5 次到 B 时，甲走了 9 个全程，此时乙走了 18 个全程；所以乙的速度是甲的 2 倍，那走一个全程甲的速度是乙的 2 倍，设乙走一个全程用时为 1，则甲走全程用时为 2 画一个柳卡图：



那甲第 2015 次到 B 时,走了 $1+2014\times 2=4029$ 个全程,时间为 $4029\times 2=8058$, $8058\div 4=2014\dots 2$
 $2014\times 3+2=6044$ (次)

16.在 $\square\square+\square\square=\square\square\square$ 的每个方框中填入一个 0、1、2、...、9 中的数字 (方框内数字允许相同,任何数最高位不能为 0),使得算式成立,有_____种填数方法.

【分析】

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg}$$

$$\overline{ab} = 10, \overline{cd} \text{ 可取 } 90 \text{ 到 } 99 : 10 \text{ 个}$$

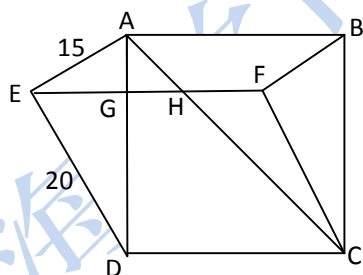
$$\overline{ab} = 11, \overline{cd} \text{ 可取 } 89 \text{ 到 } 99 : 11 \text{ 个}$$

M

$$\overline{ab} = 99, \overline{cd} \text{ 可取 } 10 \text{ 到 } 99 : 90 \text{ 个}$$

$$(10+90)\times 81\div +90\times 9=4860 \text{ (个)}$$

17.如下图所示,三角形 AED 为直角三角形,两条直角边的长度分别为 $AE=15$, $DE=20$.以 AD 为边作正方形 ABCD,以 AB, AE 为边作平行四边形 ABFE, EF 交 AD 边于点 G, AC 与 FG 交于点 H.则三角形 AGH 与三角形 CFH 的面积之差 (大面积减去小面积) 为_____.



【分析】有勾股定理可以算出: $AD=25$, 所以正方形的边长为 25, 根据三角形 ADE 的面积可以算出 $EG=12$, 所以 $GF=13$, 同时在 AEG 中用勾股定理算出 $AG=9$, $GD=16$, 三角形 ADC 的面积 $=25\times 25\div 2=312.5$, 梯形 CDGF $= (13+25)\times 16\div 2=304$; 三角形 AGH 与三角形 CFH 的面积之差 $=$ 三角形 ADC $-$ 梯形 CDGF $=312.5-304=8.5$.

18.四个不同的质数 a, b, c, d 满足下面的性质:

- (1) $a+b+c+d$ 还是一个质数;
- (2) a, b, c, d 中某两个数之和还是一个质数;
- (3) a, b, c, d 中某三个数之和还是一个质数.

满足条件的 $a+b+c+d$ 的最小值为_____.

【分析】有 $a+b+c+d$ 为质数知必有 2, 不妨设 $a=2$, 由于某三个数的和为质数, 只能是 $b+c+d$ 为质数, 所以可以从最小的尝试, 得到答案为 2, 3, 7, 19 或 2, 5, 7, 17.
最后可得 $a+b+c+d$ 的最小值为 31.

19. 一个 3×3 的方格中, 每个 1×1 的小方格内都要填一个数, 其中右上角的数已经填好了, 为 30 (如图). 接下来填的数需要满足下列条件:

(1) 每个数都能整除与它相邻的上方格内的数 (如果与它相邻的上方方格不存在, 自然不用满足这个条件); (2) 每个数都能整除与它相邻的右面方格内的数 (如果与它相邻的右面方格不存在, 自然不用满足这个条件). 不同的填法有_____种.

		30

【分析】考虑质因子 2: 由于某格有 2, 他的上方格和右方格必有 2, 可设三列从上到下分别为 a, b, c 个 2, 其中 $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$.

a	b	c
↓	↓	↓
		30

$a=0$ 时, $b=0$, c 取 0—3 共 4 种;

$b=1$, c 取 1—3 共 3 种;

$b=2$, c 取 2—3 共 2 种;

$b=3$, c 取 3 共 1 种;

所以, 共 $4+3+2+1=10$ 种.

同理, $a=1$ 时, $b=1, 2, 3$, c 共 $1+2+3=6$ 种;

$a=2$ 时, $b=2, 3$, c 共 $1+2=3$ 种;

$a=3$ 时, $b=3$, c 共 1=6 种;

所以共有 $10+6+3+1=20$ 种.

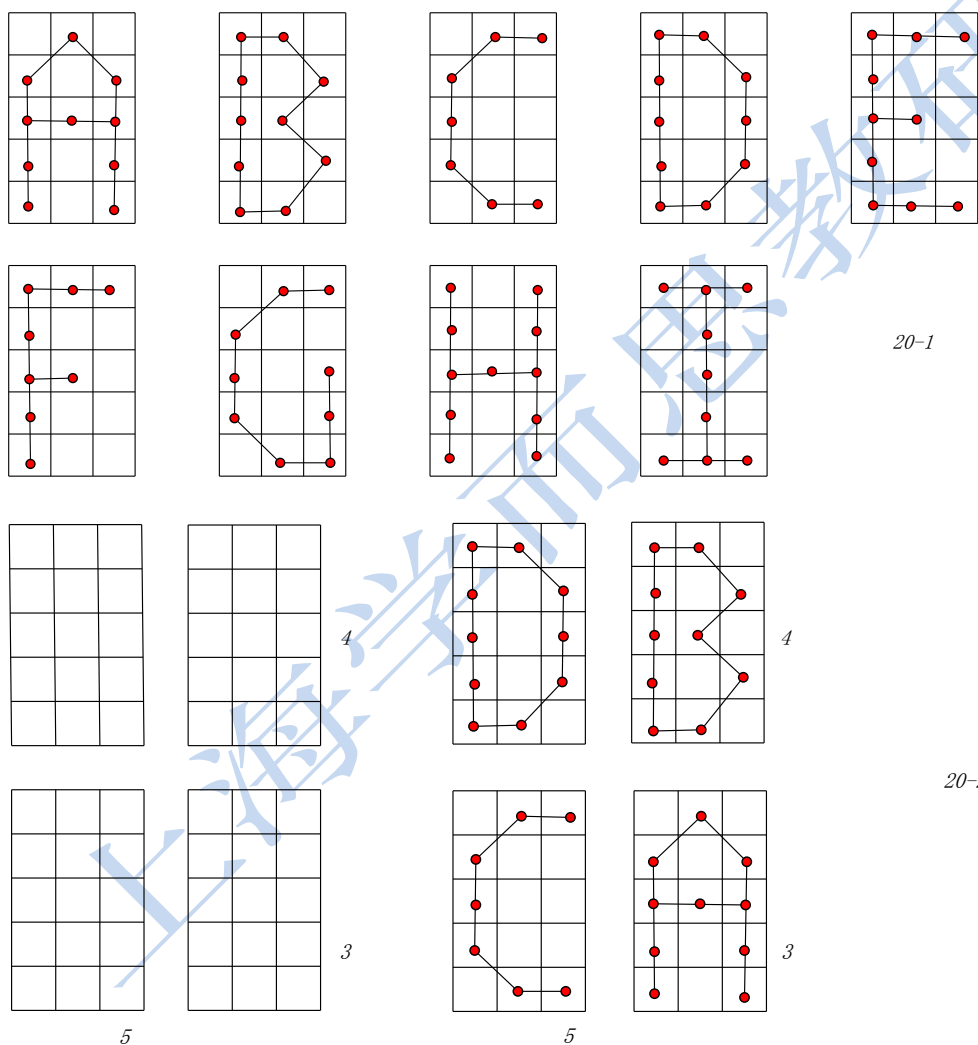
同理, 考虑质因子 3 和 5, 也都为 20 种.

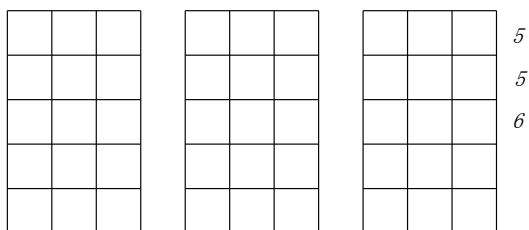
所以, 共有 $20 \times 20 \times 20 = 8000$ 种.

20.我们可以用 5x3 的方格表来表示字母 A-I，如图 20-1 所示.

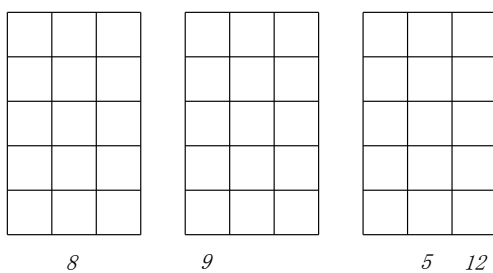
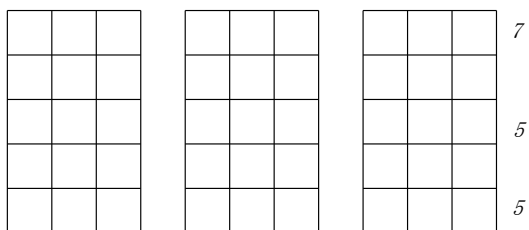
将 A-D 填入图 20-2 的表中，需要满足：左表中右边的数字表示这一行中圆点个数，下边的数字表示这一列中圆点个数，填好后的结果如右表所示.

现在，将 A-I 填入图 20-3 的表中（每个字母能且只能使用一次），使其符合前面描述的要求（只要将字母写入表格即可，不用画圆点）.





20-3



【分析】

<i>B</i>	<i>A</i>	<i>G</i>
<i>F</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>E</i>	<i>I</i>	<i>H</i>