

**2017 年济南市**

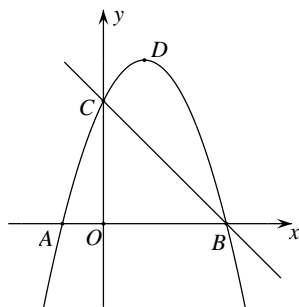
**一模压轴题模拟汇总（含答案）**

# 2017 年济南市区一模试题模拟汇总（压轴题）

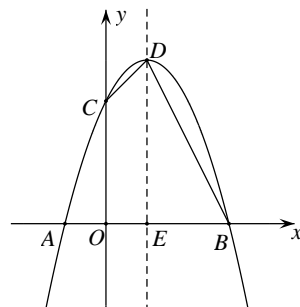
## 代数综合

1、（2017 历下一模）如图 1，抛物线  $y=ax^2+bx+3(a \neq 0)$  与  $x$  轴交于点  $A$ 、点  $B$ （点  $A$  在点  $B$  左侧），与  $y$  轴交于点  $C$ ，点  $D$  为抛物线的顶点，已知点  $A$ 、点  $B$  的坐标分别为  $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 。

- （1）求抛物线的解析式；
- （2）在直线  $BC$  上方的抛物线上找一点  $P$ ，使  $\triangle PBC$  的面积最大，求  $P$  点的坐标；
- （3）如图 2，连接  $BD$ 、 $CD$ ，抛物线的对称轴与  $x$  轴交于点  $E$ ，过抛物线上一点  $M$  作  $MN \perp CD$ ，交直线  $CD$  于点  $N$ ，求当  $\angle CMN = \angle BDE$  时点  $M$  的坐标。



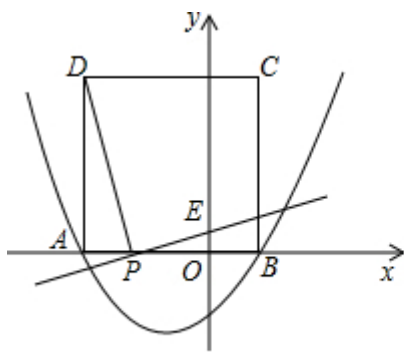
第 28 题图 1



第 28 题图 2

2、（2017 市中一模）（本题满分 9 分）如图，二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{3}{2}$  的图象与  $x$  轴交于  $A(-3, 0)$  和  $B$ ，以  $AB$  为边在  $x$  轴上方做正方形，点  $P$  是  $x$  轴上一动点，连接  $DP$ ，过点  $P$  作  $DP$  的垂线与  $y$  轴交于点  $E$ 。

- （1）请直接写出点  $D$  的坐标：\_\_\_\_\_；
- （2）当点  $P$  在线段  $AO$ （点  $P$  不与  $A$ 、 $O$  重合）上运动至何处时，线段  $OE$  的长有最大值，求出这个最大值；
- （3）是否存在这样的点  $P$ ，使  $\triangle PED$  是等腰三角形？若存在，请求出点  $P$  的坐标及此时  $\triangle PED$  与正方形  $ABCD$  重叠部分的面积；若不存在，请说明理由。

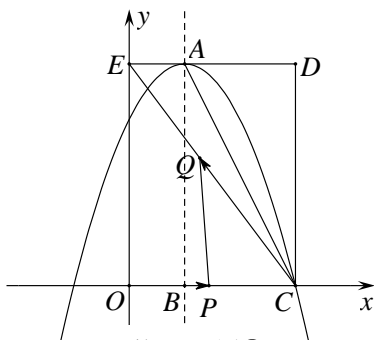


备用图

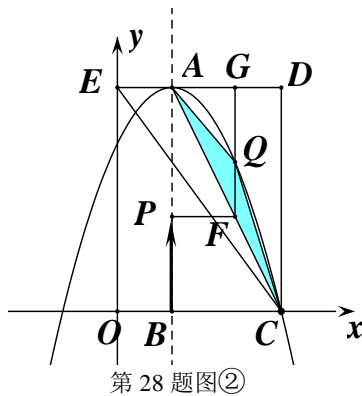
3、（2017 天桥一模）（本小题满分 9 分）如图，在平面直角坐标系中，矩形  $OCDE$  的三个顶点分别是  $C(3, 0)$ ， $D(3, 4)$ ， $E(0, 4)$ 。点  $A$  在  $DE$  上，以  $A$  为顶点的抛物线过点  $C$ ，且对称轴  $x=1$  交  $x$  轴于点  $B$ 。连接  $EC$ ， $AC$ 。点  $P$ ， $Q$  为动点，设运动时间为  $t$  秒。

- （1）直接写出点  $A$  坐标，并求出该抛物线的函数表达式。
- （2）在图①中，若点  $P$  在线段  $OC$  上从点  $O$  向点  $C$  以 1 个单位/秒的速度运动，同时，点  $Q$  在线段  $CE$  上从点  $C$  向点  $E$  以 2 个单位/秒的速度运动，当一个点到达终点时，另一个点随之停止运动。当  $t$  为何值时， $\triangle PCQ$  为直角三角形？
- （3）在图②中，若点  $P$  在对称轴上从点  $B$  开始向点  $A$  以 2 个单位/秒的速度运动，过点  $P$  作  $PF \perp AB$ ，交

AC 于点 F, 过点 F 作  $FG \perp AD$  于点 G, 交抛物线于点 Q, 连接 AQ, CQ. 当 t 为何值时,  $\triangle ACQ$  的面积最大? 最大值是多少?



第 28 题图①

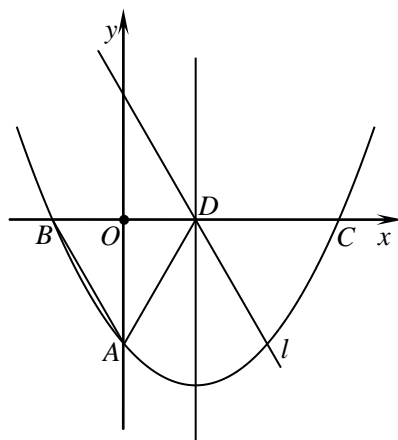


第 28 题图②

4、(2017 槐荫一模). (本小题满分 9 分)如图, 抛物线  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + c$  与 y 轴交于点  $A(0, -\sqrt{3})$ , 与 x 轴交于 B、C 两点, 其对称轴与 x 轴交于点 D, 直线  $l \parallel AB$  且过点 D.

(1)求 AB 所在直线的函数表达式; (2)请你判断  $\triangle ABD$  的形状并证明你的结论;

(3)点 E 在线段 AD 上运动且与点 A、D 不重合, 点 F 在直线 l 上运动, 且  $\angle BEF = 60^\circ$ , 连接 BF, 求出  $\triangle BEF$  面积的最小值.



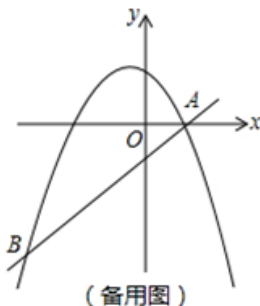
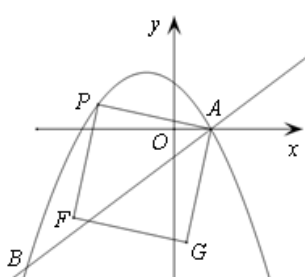
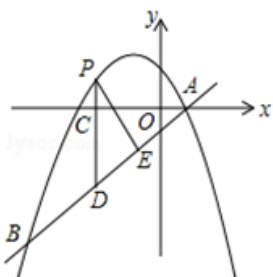
5、(2017 历城一模) (本小题满分 9 分)如图, 在平面直角坐标系中, 直线  $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$  与抛物线  $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$  交于 A、B 两点, 点 A 在 x 轴上, 点 B 的横坐标为 -8.

(1) 求该抛物线的解析式;

(2) 点 P 是直线 AB 上方的抛物线上一动点 (不与点 A、B 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 C, 交直线 AB 于点 D, 作  $PE \perp AB$  于点 E.

①设  $\triangle PDE$  的周长为 m, 点 P 的横坐标为 x, 当  $\triangle PDE$  周长 m 最大时, 求点 P 的坐标, 并求出 m 的最大值;

②连接 PA, 以 PA 为边作图示一侧的正方形 APFG (逆时针方向作正方形 APFG). 随着点 P 的运动, 正方形的大小、位置也随之改变. 当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时, 直接写出对应的点 P 的坐标.



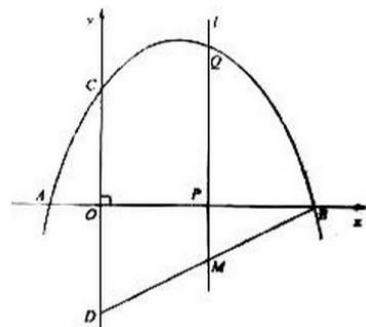
(备用图)

6、(2017 高新区一模)(本小题满分 9 分)如图,抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$  与  $x$  轴交于点  $A$ , 点  $B$ , 与  $y$  轴交于点  $C$ , 点  $D$  与点  $C$  关于  $x$  轴对称, 点  $P$  是  $x$  轴上的一个动点. 设点  $P$  的坐标为  $(m, 0)$ , 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线  $l$  交抛物线于点  $Q$ .

(1) 求直线  $BD$  的解析式;

(2) 当点  $P$  在线段  $OB$  上运动时, 直线  $l$  交  $BD$  于点  $M$ , 试探究  $m$  为何值时, 四边形  $CQMD$  是平行四边形;

(3) 在点  $P$  的运动过程中, 是否存在点  $Q$ , 使  $\triangle BDQ$  是以  $BD$  为直角边的直角三角形? 若存在, 求出点  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

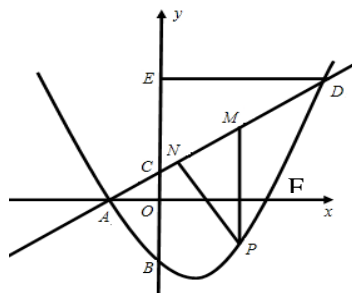


7、(2017 长清一模)(本小题满分 9 分)如图,抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴分别交于点  $A(-2, 0)$  点  $F(5, 0)$ . 直线  $y = kx + \frac{3}{2}$  过点  $A$  与  $y$  轴交于点  $C$ , 与抛物线的另一个交点是  $D$ .

(1) 求抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  与直线  $y = kx + \frac{3}{2}$  的解析式;

(2) 设点  $P$  是直线  $AD$  下方的抛物线上一动点(不与点  $A$ 、 $D$  重合), 过点  $P$  作  $y$  轴的平行线, 交直线  $AD$  于点  $M$ , 作  $DE \perp y$  轴于点  $E$ . 探究: 是否存在这样的点  $P$ , 使四边形  $PMEC$  是平行四边形? 若存在请求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 在(2)的条件下, 作  $PN \perp AD$  于点  $N$ , 设  $\triangle PMN$  的周长为  $m$ , 点  $P$  的横坐标为  $x$ , 求  $m$  与  $x$  的函数关系式, 并求出  $m$  的最大值.



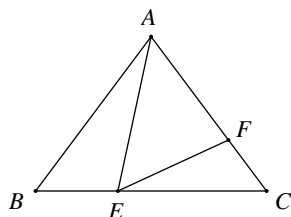
## 几何综合

1、(2017 历下一模)如图, 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $CA = CB = 5$ ,  $BA = 6$ , 点  $E$  是线段  $AB$  上的动点(不与端点重合), 点  $F$  是线段  $AC$  上的动点, 连接  $CE$ 、 $EF$ , 若在点  $E$ 、点  $F$  的运动过程中, 始终保证  $\angle CEF = \angle B$ .

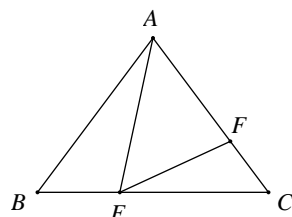
(1) 求证:  $\angle AEF = \angle BCE$ ;

(2) 当以点  $C$  为圆心, 以  $CF$  为半径的圆与  $AB$  相切时, 求  $BE$  的长;

(3) 探究: 在点  $E$ 、 $F$  的运动过程中,  $\triangle CEF$  可能为等腰三角形吗? 若能, 求出  $BE$  的长; 若不能, 请说明理由.



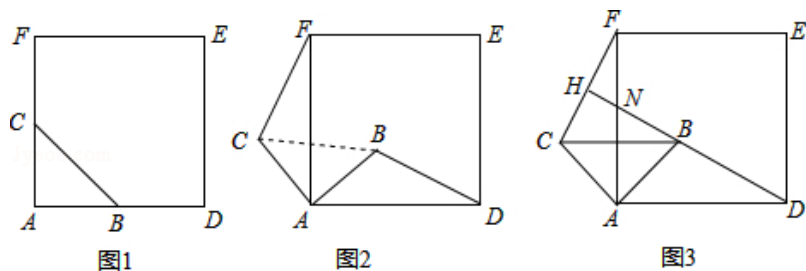
第 27 题图



第 27 题备用图

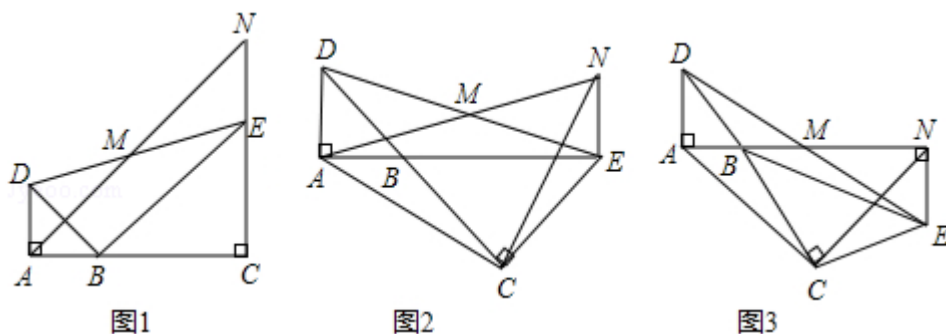
2、(2017 市中一模)(本题满分 9 分)如图,  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  是有公共顶点的等腰直角三角形,  $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ , 点  $P$  为射线  $BD$ ,  $CE$  的交点.





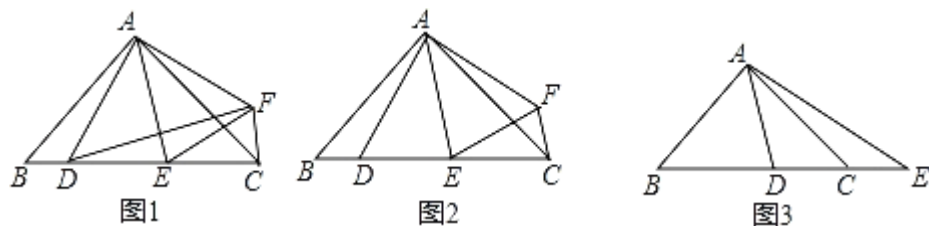
6、(2017 高新区一模) (本小题满分 9 分) 如图, 已知 $\triangle BAD$  和 $\triangle BCE$  均为等腰直角三角形,  $\angle BAD = \angle BCE = 90^\circ$ , 点  $M$  为  $DE$  的中点, 过点  $E$  与  $AD$  平行的直线交射线  $AM$  于点  $N$ .

- (1) 当  $A, B, C$  三点在同一直线上时 (如图 1), 求证:  $M$  为  $AN$  的中点;
- (2) 将图 1 中的 $\triangle BCE$  绕点  $B$  旋转, 当  $A, B, E$  三点在同一直线上时 (如图 2), 求证:  $\triangle ACN$  为等腰直角三角形;
- (3) 将图 1 中 $\triangle BCE$  绕点  $B$  旋转到图 3 位置时, (2) 中的结论是否仍成立? 若成立, 试证明之, 若不成立, 请说明理由.



7、(2017 长清一模) (本小题满分 9 分) 在 $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 2\angle DAE = 2\alpha$ .

- (1) 如图 1, 若点  $D$  关于直线  $AE$  的对称点为  $F$ , 求证:  $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ ;
- (2) 如图 2, 在 (1) 的条件下, 若  $\alpha = 45^\circ$ , 求证:  $DE^2 = BD^2 + CE^2$ ;
- (3) 如图 3, 若  $\alpha = 45^\circ$ , 点  $E$  在  $BC$  的延长线上, 则等式  $DE^2 = BD^2 + CE^2$  还能成立吗? 请说明理由.



# 参考答案

## 代数综合

1、(2017 历下一模)

解：(1) 将  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点代入  $y = ax^2 + bx + 3$  得：
 
$$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \dots\dots 1 \text{ 分}$$

解得：
 
$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \therefore \text{抛物线的表达式为：} y = -x^2 + 2x + 3 \dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 由题意设  $P(x, -x^2 + 2x + 3)$ ，过点  $P$  作  $x$  轴的垂线，交直线  $BC$  于点  $Q$ ，

直线  $CB$  解析式：  $y = -x + 3$ ， 则  $Q(x, -x + 3) \therefore PQ = -x^2 + 2x + 3 - (-x + 3) = -x^2 + 3x$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} PQ \cdot OB = \frac{1}{2} (-x^2 + 3x) \times 3 = -\frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{2} x \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore a = -\frac{3}{2} < 0$ ，  $\therefore$  当  $x = \frac{3}{2}$  时，  $S_{\triangle BCD}$  取最大值，此时  $P(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}) \dots\dots 5 \text{ 分}$

(3)  $\therefore$  抛物线  $y = -(x-3)(x+1) = -x^2 + 2x + 3$  与  $y$  轴交于点  $C$ ，

$\therefore C$  点坐标为  $(0, 3)$ ， 顶点  $(1, 4)$ ，  $E(1, 0) \therefore \tan \angle BDE = \frac{BE}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

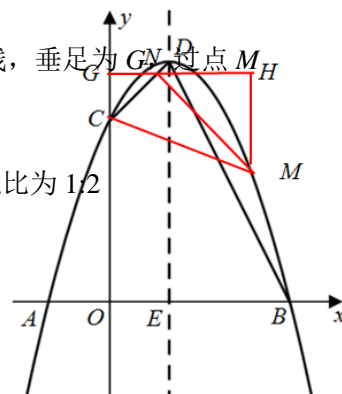
(I) 当点  $M$  在对称轴右侧时. i) 若点  $N$  在射线  $CD$  上，如图，过点  $N$  作  $y$  轴的垂线，垂足为  $G$ ，过点  $M$  作  $GN$  的垂线，垂足为  $H$ ，则  $\triangle CNG$ ，  $\triangle MNH$  均为等腰直角三角形，

$\therefore \angle CMN = \angle BDE$ ，  $\therefore \tan \angle CMN = \tan \angle BDE = \frac{1}{2} = \frac{CN}{MN} \therefore \triangle CNG$ ，  $\triangle MNH$  相似比为 1:2

设  $CG = a$ ， 则  $NG = a$ ，  $NH = NH = 2a$ ，  $\therefore M(3a, 3+a-2a)$ ， 即  $M(3a, 3-a)$ ，

代入  $y = -x^2 + 2x + 3$  得：  $-(3a)^2 + 2 \times 3a + 3 = 3 - a$

解得：  $a_1 = 0$  (舍去)，  $a_2 = \frac{7}{9}$  此时  $M(\frac{7}{3}, \frac{20}{9}) \dots\dots 7 \text{ 分}$



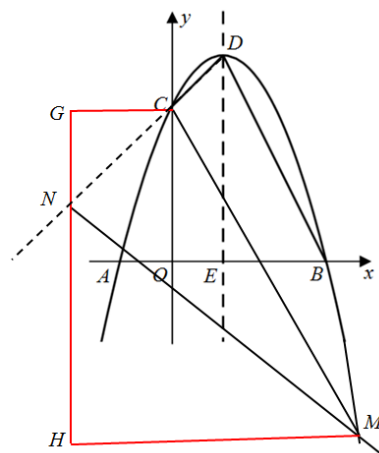
ii) 若点  $N$  在射线  $DC$  上，如图，过点  $N$  作  $x$  轴的垂线  $l$ ，分别过点  $M$ 、 $C$  作  $GN$  的垂线，垂足为  $H$ 、 $G$ ，则  $\triangle CNG$ ，  $\triangle MNH$  均为等腰直角三角形，

$\therefore \angle CMN = \angle BDE$ ，  $\therefore \tan \angle CMN = \tan \angle BDE = \frac{1}{2} = \frac{CN}{MN} \therefore \triangle CNG$ ，  $\triangle MNH$

设  $CG = a$ ， 则  $NG = a$ ，  $NH = NH = 2a$ ，  $\therefore M(a, 3-a-2a)$ ， 即  $M(a, 3-3a)$

代入  $y = -x^2 + 2x + 3$  得：  $-a^2 + 2a + 3 = 3 - 3a$  解得：  $a_1 = 0$  (舍去)，  $a_2 = 5$

此时  $M(5, -12)$



(II) 当点  $M$  在对称轴左侧时,  $\because \angle CMN = \angle BDE < 45^\circ$ ,  $\therefore \angle MCN > 45^\circ$ , 而抛物线左侧任意一点  $K$ , 都有  $\angle KCN < 45^\circ$ ,  $\therefore$  点  $M$  不存在. 综上所述, 点  $M$  坐标为  $(\frac{7}{3}, \frac{20}{9})$  或  $(5, -12)$ . .....9 分

2、(2017 市中一模) 解: (1) 将点  $A(-3, 0)$  代入二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{3}{2}$

得:  $0 = \frac{1}{2} \times (-3)^2 + b \times (-3) - \frac{3}{2}$   $b = 1$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$   $B(1, 0)$  ..... 2 分

(2) 设  $PA = t$ ,  $OE = l$  由  $\angle DAP = \angle POE = \angle DPE = 90^\circ$  得  $\triangle DAP \sim \triangle POE$ .  $\therefore \frac{4}{3-t} = \frac{t}{l}$

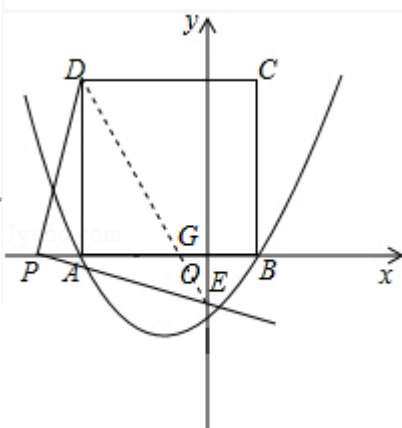
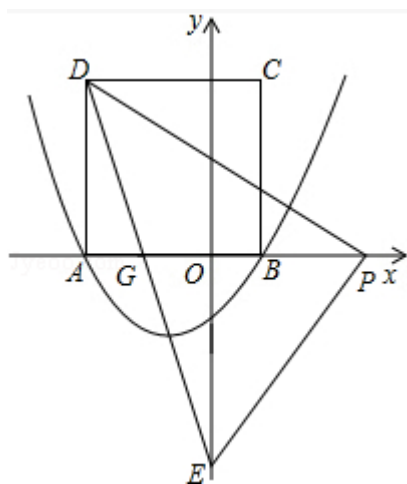
$\therefore l = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t = -\frac{1}{4}(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{16}$   $\therefore$  当  $t = \frac{3}{2}$  时,  $l$  有最大值  $\frac{9}{16}$

即  $P$  为  $AO$  中点时,  $OE$  的最大值为  $\frac{9}{16}$ ; ..... 5 分

(3) 存在. ①点  $P$  点在  $y$  轴左侧时,  $DE$  交  $AB$  于点  $G$ ,  $P$  点的坐标为  $(-4, 0)$ ,  $\therefore PA = OP - AO = 4 - 3 = 1$ , 由  $\triangle PAD \cong \triangle EOP$  得  $OE = PA = 1$   $\because \triangle ADG \sim \triangle OEG$   $\therefore AG : GO = AD : OE = 4 : 1$   $\therefore AG = \frac{4}{5}AO = \frac{12}{5}$

$\therefore$  重叠部分的面积  $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$

②当  $P$  点在  $y$  轴右侧时,  $P$  点的坐标为  $(4, 0)$ , 此时重叠部分的面积为  $\frac{712}{77}$  ..... 9 分



3、(2017 天桥一模) (1) 解:  $A(1, 4)$ , .....1 分

$\because$  抛物线顶点  $A(1, 4)$ ,

$\therefore$  设抛物线解析式为  $y = a(x-1)^2 + 4$ , .....2 分

$\because$  过  $C(3, 0)$ ,  $\therefore 0 = a(3-1)^2 + 4$ , 解得  $a = -1$

$\therefore y = -(x-1)^2 + 4 = -x^2 + 2x + 3$ . .....3 分

(2) 依题意得:  $OC = 3$ ,  $OE = 4$ , 在  $Rt\triangle OCE$  中,  $\angle COE = 90^\circ$ ,

$\therefore CE = \sqrt{OC^2 + OE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ . .....4 分

当  $\angle QPC = 90^\circ$  时,  $\because \cos \angle QCP = \frac{PC}{CQ} = \frac{OC}{CE}$ ,  $\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{3}{5}$ , 解得  $t = \frac{15}{11}$ ; .....5 分

当  $\angle PQC = 90^\circ$  时,  $\because \cos \angle QCP = \frac{CQ}{CP} = \frac{OC}{CE}$ ,  $\therefore \frac{2t}{3-t} = \frac{3}{5}$ , 解得  $t = \frac{9}{13}$ .



∴当  $t = \frac{15}{11}$  或  $t = \frac{9}{13}$  时,  $\triangle PCQ$  为直角三角形. ....6 分

(3) ∵  $A(1, 4)$ ,  $C(3, 0)$ , ∴可求得直线  $AC$  的解析式为  $y = -2x + 6$ . ....7 分

∵  $P(1, 2t)$ , 将  $y = 2t$  代入  $y = -2x + 6$  中, 得  $x = 3 - t$ , ∴  $Q$  点的横坐标为  $3 - t$ ;

将  $x = 3 - t$  代入  $y = -(x - 1)^2 + 4$  中, 得  $y = -t^2 + 2t$ , ∴  $Q$  点的纵坐标为  $-t^2 + 2t$ ,

∴  $QF = (-t^2 + 2t) - 2t = -t^2 + 2t$ , ....8 分

$$\therefore S_{\triangle ACQ} = S_{\triangle AFQ} + S_{\triangle CFQ} = \frac{1}{2} FQ \cdot AG + \frac{1}{2} FQ \cdot DG$$

$$= \frac{1}{2} FQ (AG + DG) = \frac{1}{2} FQ \cdot AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(-t^2 + 2t) = -(t - 1)^2 + 1.$$

∴当  $t = 1$  时,  $S_{\triangle ACQ}$  最大, 最大值为 1. ....9 分

4、(2017 槐荫一模) (1) 将点  $A(0, -\sqrt{3})$  代入抛物线解析式中, 得  $c = -\sqrt{3}$ , ∴  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$

当  $y = 0$  时,  $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = 0$  化简得  $x^2 - 2x - 3 = 0$  ∴  $(x + 1)(x - 3) = 0$  ∴  $x_1 = -1, x_2 = 3$

∴点  $B(-1, 0)$ , 点  $C(3, 0)$  ....1 分

设直线  $AB$  的表达式为  $y = kx + b$ , ∵图象经过点  $A(0, -\sqrt{3})$ , 点  $B(-1, 0)$ ,

代入得  $\begin{cases} -k + b = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$  ∴直线  $AB$  的表达式为  $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$  ....2 分

(2)  $\triangle ABD$  是等边三角形, (结论不单独给分) ∵点  $B(-1, 0)$ , 点  $D(1, 0)$  ∴  $OB = OD = 1$ ,

∵  $OA$  是公共边,  $\angle BOA = \angle DOA = 90^\circ$ , ∴  $\triangle BOA \cong \triangle DOA$ , ....3 分

$$\therefore BA = DA, \tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \therefore \angle ABO = 60^\circ,$$

∴  $\triangle ABD$  是等边三角形. ....4 分

(3) 过点  $E$  作  $EG \parallel x$  轴, 交  $AB$  于点  $G$ , ....5 分

∵  $\triangle ABD$  是等边三角形 ∴  $\angle BAD = \angle ABD = \angle ADB = 60^\circ$  ∴  $\angle AEG = \angle AGE = 60^\circ$

∴  $\triangle AEG$  是等边三角形, ∴  $AE = AG$  ....6 分

∴  $DE = BG$  ∵  $AB \parallel l$  ∴  $\angle EDF = \angle BGE = 120^\circ$  ∴  $\angle GBE + \angle GEB = 60^\circ$ ,  $\angle DEF + \angle GEB = 60^\circ$ ,

∴  $\angle GBE = \angle DEF$  ∴  $\triangle BEG \cong \triangle EFD$  ∴  $BE = EF$

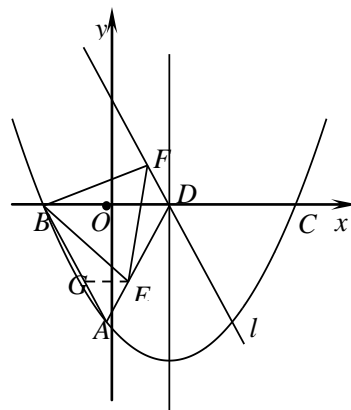
又 ∵  $\angle BEF = 60^\circ$  ∴  $\triangle BEF$  是等边三角形 ....7 分

∴  $S_{\triangle BEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} BE^2$  当  $BE \perp AD$  时,  $BE$  的长度最小, 则  $\triangle BEF$  的面积取最小值, 8 分

此时,  $BE = AB \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ,

$\triangle BEF$  面积的最小值  $= \frac{\sqrt{3}}{4} BE^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  ....9 分

5、(2017 历城一模) 解: (1) 令  $y = 0$ , 则  $\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0$ , 解得  $x = 2$ ,



27 题图

$$x = -8 \text{ 时, } y = \frac{3}{4} \times (-8) - \frac{3}{2} = -\frac{15}{2}, \therefore \text{点 A (2, 0), B} \\ (-8, -\frac{15}{2}),$$

把点 A、B 代入抛物线得, 
$$\begin{cases} -\frac{1}{4} \times (-2)^2 + 2b + c = 0 \\ -\frac{1}{4} \times (-8)^2 - 8b + c = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

解得 
$$\begin{cases} b = -\frac{3}{4} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

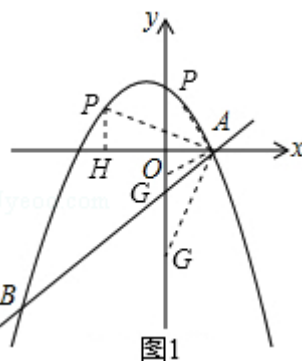


图1

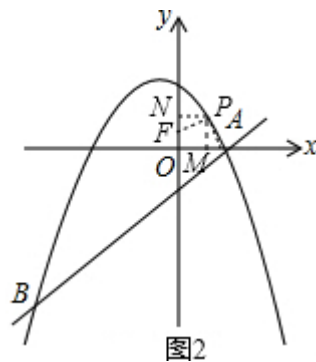


图2

所以, 该抛物线的解析式  $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ ; .....3 分

(2) ①  $\because$  点 P 在抛物线上, 点 D 在直线上,  $\therefore PD = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} - (\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ ,

$\because PE \perp AB, \therefore \angle DPE + \angle PDE = 90^\circ$ , 又  $\because PD \perp x$  轴,  $\therefore \angle BAO + \angle PDE = 90^\circ, \therefore \angle DPE = \angle BAO$ ,

$\because$  直线解析式  $k = \frac{3}{4}, \therefore \sin \angle BAO = \frac{3}{5}, \cos \angle BAO = \frac{4}{5}, \therefore PE = PD \cos \angle DPE = \frac{4}{5}PD, DE = PD \sin \angle DPE = \frac{3}{5}PD$ ,

$\therefore \triangle PDE$  的周长为  $m = PD + \frac{3}{5}PD + \frac{4}{5}PD = \frac{12}{5}PD = \frac{12}{5}(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4) = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{48}{5}$ ,

即  $m = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{48}{5}$ ,

$\because m = -\frac{3}{5}(x^2 + 6x + 9) + 15, \therefore$  当  $x = -3$  时, 最大值为 15; .....6 分

②  $\because$  点 A (2, 0),  $\therefore AO = 2$ , (i) 点 G 在 y 轴上时, 过点 P 作  $PH \perp x$  轴于 H, 在正方形 APFG 中,  $AP = AG$ ,  $\angle PAG = 90^\circ, \therefore \angle PAH + \angle OAG = 90^\circ, \angle AGO + \angle OAG = 90^\circ, \therefore \angle PAH = \angle AGO$ ,

在  $\triangle APH$  和  $\triangle GAO$  中, 
$$\begin{cases} \angle PAH = \angle AGO \\ \angle AHP = \angle GOA = 90^\circ \\ AP = AG \end{cases}, \therefore \triangle APH \cong \triangle GAO \text{ (AAS)},$$

$\therefore PH = AO = 2, \therefore$  点 P 的纵坐标为 2,  $\therefore -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = 2$ , 整理得,  $x^2 + 3x - 2 = 0$ , 解得  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ ,

$\therefore$  点  $P_1 (\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 2), P_2 (\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, 2)$ ;

(ii) 点 F 在 y 轴上时, 过点 P 作  $PM \perp x$  轴于 M, 作  $PN \perp y$  轴于 N, 在正方形 APFG 中,  $AP = FP, \angle APF = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle APM + \angle MPF = 90^\circ, \angle FPN + \angle MPF = 90^\circ, \therefore \angle APM = \angle FPN$ ,

在  $\triangle APM$  和  $\triangle FPN$  中, 
$$\begin{cases} \angle APM = \angle FPN \\ \angle AMP = \angle FNP = 90^\circ \\ AP = FP \end{cases}, \therefore \triangle APM \cong \triangle FPN \text{ (AAS)}, \therefore PM = PN,$$

$\therefore$  点 P 的横坐标与纵坐标相等,  $\therefore -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = x$ , 整理得,  $x^2 + 7x - 10 = 0$ ,

解得  $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{89}}{2}, x_2 = \frac{-7 - \sqrt{89}}{2}$  (舍去),  $\therefore$  点  $P_3 (\frac{-7 + \sqrt{89}}{2}, \frac{-7 + \sqrt{89}}{2})$

综上所述, 存在点  $P_1(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 2)$ ,  $P_2(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, 2)$ ,  $P_3(\frac{-7+\sqrt{89}}{2}, \frac{-7+\sqrt{89}}{2})$ . .....9 分

6、(2017 高新区一模) 解: (1)  $\because$  点 D 与点 C 关于 x 轴对称,  $\therefore D(0, -2)$ . .....1 分

设直线 BD 为  $y=kx-2$ , 把  $B(4, 0)$  代入, 得  $0=4k-2 \therefore k=\frac{1}{2}$ .

$\therefore$  BD 的解析式为:  $y=\frac{1}{2}x-2$ . .....3 分

(2)  $\because P(m, 0), \therefore M(m, m-2), Q(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)$

若四边形 CQMD 为平行四边形,  $\because QM \parallel CD, \therefore QM=CD=4$

当 P 在线段 OB 上运动时,  $QM=(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)-(\frac{1}{2}m-2)=-\frac{1}{2}m^2+m+4=4$ , .....5 分

解得  $m=0$  (不合题意, 舍去),  $m=2$ .  $\therefore m=2$ . .....6 分

(3) 设点 Q 的坐标为  $(m, -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)$ ,  $BQ^2=(m-4)^2+(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)^2$ ,

$BQ^2=m^2+[-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2]^2$ ,  $BD^2=20$ .

①当以点 B 为直角顶点时, 则有  $DQ^2=BQ^2+BD^2 \therefore m^2+[-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2]^2=(m-4)^2+(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)^2+20$  解得  $m_1=3, m_2=4 \therefore$  点 Q 的坐标为  $(4, 0)$  (舍去),  $(3, 2)$ . .....7 分

②当以 D 点为直角顶点时, 则有  $DQ^2=BQ^2+BD^2 \therefore (m-4)^2+(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)^2=m^2+[-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2]^2+20$  解得  $m_1=-1, m_2=8 \therefore$  点 Q 的坐标为  $(-1, 0), (8, -18)$ .  
即所求点 Q 的坐标为  $(3, 2), (-1, 0), (8, -18)$ . .....9 分

7、(2017 长清一模) 解析: (1) 抛物线的解析式是  $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$ . .....2 分

$\because$  直线  $y=kx+\frac{3}{2}$  经过点 A  $(-2, 0)$ ,  $\therefore -2k+\frac{3}{2}=0$ , 解得:  $k=\frac{3}{4}$ .

$\therefore$  直线的解析式是  $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ . .....3 分

(2) 存在. 设 P 的坐标是  $(x, \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2})$ , 则 M 的坐标是  $(x, \frac{3}{4}x+\frac{3}{2})$ ,

$\therefore PM=\left(\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4$ . .....4 分

解方程  $\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4 \\ y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2} \end{cases}$  得:  $\begin{cases} x=8 \\ y=\frac{15}{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ .  $\because$  点 D 在第三象限,  $\therefore$  点 D 的坐标是  $(8, \frac{15}{2})$ .

由  $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$  令  $x=0$  得点 C 的坐标是  $(0, \frac{3}{2}) \therefore CE=\frac{15}{2}-\frac{3}{2}=6$ . .....5 分

∵ PM//y 轴, ∴ 要使四边形 P MEC 是平行四边形, 必有 PM=CE, 即  $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 6$ .

解这个方程得:  $x_1=2, x_2=4$ . 当  $x=2$  时,  $y=-3$ ; 当  $x=4$  时,  $y=-\frac{3}{2}$ .

∴ 直线 AD 上方的抛物线上存在这样的点 P, 使四边形 P MEC 是平行四边形, 点 P 的坐标是 (2,

-3) 和  $(4, -\frac{3}{2})$ . .....6 分

(3) 在 Rt△CDE 中, DE=8, CE=6 由勾股定理得: DC=10. ∴ △CDE 的周长是 24.

∵ PM//y 轴, ∴ ∠PMN=∠DCE. ∵ ∠PNM=∠DEC, ∴ △PMN ∽ △CDE. ....7 分

$\frac{\triangle PMN \text{ 的周长}}{\triangle CDE \text{ 的周长}} = \frac{PM}{DC}$ , 即  $\frac{m}{24} = \frac{-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4}{10}$ .

化简整理得: m 与 x 的函数关系式是:  $m = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{18}{5}x + \frac{48}{5} = -\frac{3}{5}(x-3)^2 + 15$  .....8 分.

∵  $-\frac{3}{5} < 0$ , ∴ m 有最大值, 当  $x=3$  时, m 的最大值是 15. ....9 分

## 几何综合

1、(2017 历下一模) (1) 证明: ∵ ∠B + ∠BCE = ∠CEA = ∠CEF + ∠FEA ∠CEF = ∠B  
∴ ∠AEF = ∠BCE .....2 分

(2) 设 ⊙C 与 BA 切于点 M, 则 CM=CF, CM⊥BA ∵ CA=CB, CM⊥BA ∴ BM=AM =  $\frac{AB}{2} = 3$

Rt△AMC 中, AC=5, AM=3, ∴ CF=CM=4 ∴ AF=1 .....3 分

∵ CA=CB ∴ ∠B=∠C

由 (1) 知 ∠AEF=∠BCE ∴ △AEF ∽ △BCE ∴  $\frac{EA}{BC} = \frac{AF}{BE}$  设 BE 长为 x, 则 EA 长为 6-x.

$\frac{6-x}{5} = \frac{1}{x}$  .....4 分

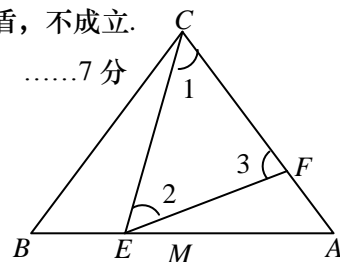
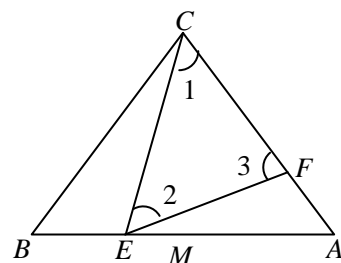
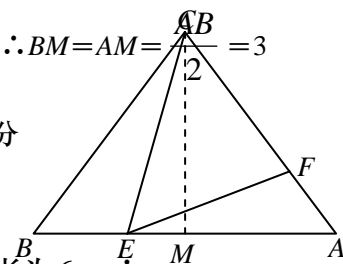
解得:  $x_1=1, x_2=5$

答: BE 的长为 1 或 5. ....5 分

(3) 可能. ①当 CE=CF 时, ∠3=∠2=∠A ∴ EF//AB, 此时 E 与 B 重合, 与条件矛盾, 不成立.

②当 CF=EF 时, 又 ∵ △AEF ∽ △BCE ∴ △AEF ≅ △BCE ∴ AE=BC=5 ∴ BE=AB-5=1 .....7 分

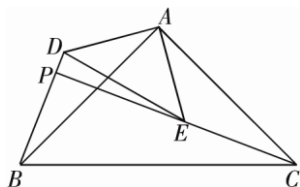
③当 CF=EF 时, ∠1=∠2=∠A=∠B ∴ △FCE ∽ △CBA ∴  $\frac{EF}{AC} = \frac{CE}{AB}$  ∴  $\frac{EF}{CE} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{6}$



$$\because \triangle AEF \sim \triangle BCE \therefore \frac{EA}{BC} = \frac{EF}{CE} = \frac{5}{6} \quad \therefore EA = \frac{5}{6}BC = \frac{5}{6} \times 5 = \frac{25}{6} \therefore EB = AB - \frac{25}{6} = \frac{11}{6}$$

答：当  $BE$  的长为 1 或  $\frac{11}{6}$  时， $\triangle CFE$  为等腰三角形。 .....9 分

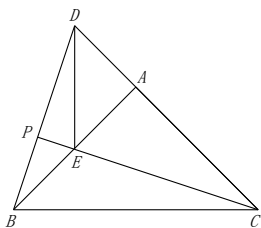
2、（2017 市中一模）（1）证明： $\because \triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  是等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $\therefore AB = AC$ ， $AD = AE$ 。 $\angle DAB = 90^\circ - \angle BAE = \angle EAC$ 。 $\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC$ 。 $\therefore BD = CE$ 。



（2）解：①当点  $E$  在  $AB$  上时， $BE = AB - AE = 1$ 。 $\because \angle EAC = 90^\circ$ ， $\therefore CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{5}$ 。

同（1）可证  $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ 。 $\therefore \angle DBA = \angle ECA$ 。 $\because \angle PEB = \angle AEC$ ， $\therefore \triangle PEB \sim \triangle AEC$ 。 $\therefore \frac{PB}{AC} = \frac{BE}{CE}$ 。 $\therefore$

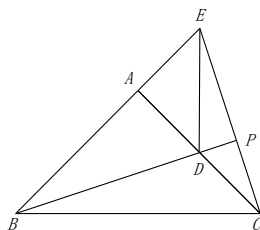
$$\frac{PB}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \therefore PB = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



②当点  $E$  在  $BA$  延长线上时， $BE = 3$ 。 $\because \angle EAC = 90^\circ$ ， $\therefore CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{5}$ 。

同（1）可证  $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ 。 $\therefore \angle DBA = \angle ECA$ 。 $\because \angle BEP = \angle CEA$ ， $\therefore \triangle PEB \sim \triangle AEC$ 。

$$\therefore \frac{PB}{AC} = \frac{BE}{CE} \therefore \frac{PB}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}} \therefore PB = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 综上, } PB = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$



（3） $PB$  长的最小值是  $\sqrt{3} - 1$ ，最大值是  $\sqrt{3} + 1$ 。

3、（2017 天桥一模）解：（1） $\angle PBD = 45^\circ$ ； .....1 分

点  $D$  的坐标为  $(t, t)$ 。 .....3 分

（2）解：由题意，可得  $AP = OQ = 1 \times t = t$ ， $\therefore AO = PQ$ 。 $\because$  四边形  $OABC$  是正方形， $\therefore AO = AB$ ， $\therefore AB = PQ$ 。 $\because DP \perp BP$ ， $\therefore \angle BPD = 90^\circ$ 。 $\therefore \angle BPA = 90^\circ - \angle DPQ = \angle PDQ$ 。

又  $\because \angle BAP = \angle PQD = 90^\circ, \therefore \triangle PAB \cong \triangle DQP. \therefore AP = DQ = t, PB = PD.$

显然  $PB \neq PE$ , 分两种情况:

(i) 若  $EB = EP$ , 则  $\angle EPB = \angle EBP = 45^\circ$ ; 此时点  $P$  与  $O$  点重合,  $t = 4$ . .....4 分

(ii) 若  $BE = BP$ , 则  $\triangle PAB \cong \triangle ECB. \therefore CE = PA = t$ . .....5 分

如图 1, 过  $D$  点作  $DF \perp OC$  于点  $F$ , 易知四边形  $OQDF$  为正方形, 则  $DF = OF = t, EF = 4 - 2t$ .

$\because DF \parallel BC, \therefore \triangle BCE \sim \triangle DFE, \therefore \frac{CE}{EF} = \frac{BC}{DF}, \therefore \frac{t}{4-2t} = \frac{4}{t}$ . 解得  $t = -4 \pm 4\sqrt{2}$  (负根舍去).  $\therefore t = 4\sqrt{2} - 4$ .

综上, 当  $t = 4\sqrt{2} - 4$  或  $4$  时,  $\triangle PBE$  为等腰三角形. ....6 分

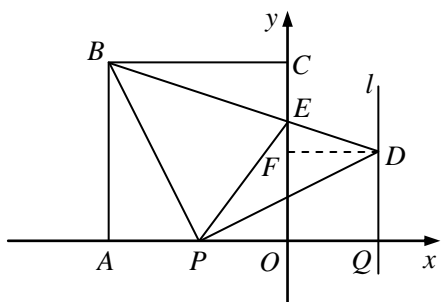


图 1

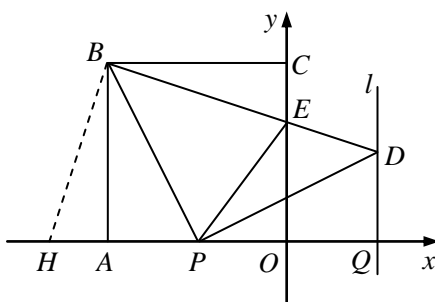


图 2

(3)  $\triangle POE$  周长不随时间  $t$  的变化而变化. ....7 分

如图 2 所示, 将  $\triangle BCE$  绕点  $B$  按顺时针方向旋转  $90^\circ$ , 得到  $\triangle BAH$ , 则  $BE = BH, CE = AH, \angle EBH = 90^\circ$ .

$\because \angle EBP = 45^\circ, \therefore \angle PBH = 45^\circ, \therefore \angle PBH = \angle EBP$ . 又  $\because BP = BP, \therefore \triangle PBE \cong \triangle PBH$ . ....8 分

$\therefore PE = PH$ , 即  $PE = PH = AH + AP = CE + AP$ .

$\therefore \triangle POE$  周长  $= OP + OE + PE = OP + OE + CE + AP = OA + OC = 4 + 4 = 8$ . ....9 分

4、(2017 槐荫一模) 证明:  $\because BD$  绕点  $B$  逆时针旋转  $30^\circ$  至  $BE$ ,

$\therefore \angle DBE = 30^\circ, BD = BE, \therefore \angle BDE = \angle BED = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$  .....1 分

在正方形  $ABCD$  中,  $BD$  是对角线,  $\therefore \angle ADB = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle EDF = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ , .....2 分

在  $\triangle DEF$  中,  $\angle DFE = 180^\circ - \angle EDF - \angle FED = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ, \therefore \angle DFE = \angle DEF$

$\therefore DE = DF$  .....3 分

(2) 证明: 过点  $E$  作  $EG \perp BD$  于点  $G$ ,

$\because \angle DBE = 30^\circ, \therefore EG = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} BD$  .....4 分

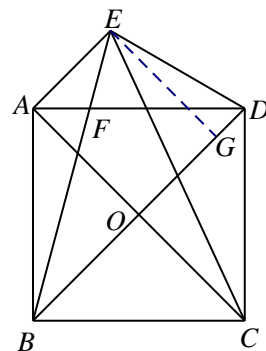
在正方形  $ABCD$  中,  $AC, BD$  是对角线,  $\therefore AC = BD, OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BD, AC \perp BD$

$\therefore EG = OA$  且  $EG \parallel OA, \therefore$  四边形  $AOGE$  是平行四边形,

$\therefore$  四边形  $AOGE$  是矩形 .....5 分

$\therefore AE \parallel BD$  .....6 分

(3) 解: 设  $EG = x$ , 则  $BE = BD = AC = 2EG = 2x$ , .....7 分



28 题图

Rt $\triangle BEG$  中,  $BG = \sqrt{BE^2 - EG^2} = \sqrt{3}x$ ,  $\therefore OG = BG - BO = (\sqrt{3} - 1)x$ ,

在矩形  $AOGE$  中,  $\angle EAO = 90^\circ$ , .....8 分

$AE = OG = (\sqrt{3} - 1)x$   $\therefore \tan \angle ACE = \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$  .....9 分

5、(2017 历城一模) 解: (1)  $BD = CF$ . 理由如下: 由题意得,  $\angle CAF = \angle BAD = \theta$ ,

在  $\triangle CAF$  和  $\triangle BAD$  中, 
$$\begin{cases} CA = BA \\ \angle CAF = \angle BAD, \therefore \triangle CAF \cong \triangle BAD, \\ FA = DA \end{cases}$$

$\therefore BD = CF$ ; .....3 分

(2) ①由 (1) 得  $\triangle CAF \cong \triangle BAD$ ,  $\therefore \angle CFA = \angle BDA$ ,

$\therefore \angle FNH = \angle DNA$ ,  $\angle DNA + \angle NAD = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle CFA + \angle FNH = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle FHN = 90^\circ$ , 即  $BD \perp CF$ ; .....6 分

②连接  $DF$ , 延长  $AB$  交  $DF$  于  $M$ , (方法多样, 视情况合理得分)

$\therefore$  四边形  $ADEF$  是正方形,  $AD = 3\sqrt{2}$ ,  $AB = 2$ ,  $\therefore AM = DM = 3$ ,  $BM = AM - AB = 1$ ,

$\therefore \triangle ABC$  绕点  $A$  逆时针旋转  $45^\circ$ ,  $\therefore \angle BAD = 45^\circ$ ,  $\therefore AM \perp DF$ ,  $\therefore DB = \sqrt{DM^2 + BM^2} = \sqrt{10}$ ,

$\therefore \angle MAD = \angle MDA = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle AMD = 90^\circ$ , 又  $\angle DHF = 90^\circ$ ,  $\angle MDB = \angle HDF$ ,  $\therefore \triangle DMB \sim \triangle DHF$ ,

$\therefore \frac{DM}{DH} = \frac{DB}{DF}$ , 即  $\frac{3}{DH} = \frac{\sqrt{10}}{6}$ , 解得,  $DH = \frac{9\sqrt{10}}{5}$ . .....9 分

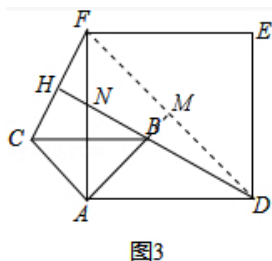


图3

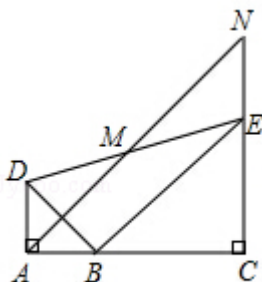


图1

6、(2017 高新区一模) (1) 证明: 如图 1,

$\therefore EN \parallel AD$ ,  $\therefore \angle MAD = \angle MNE$ ,  $\angle ADM = \angle NEM$ .  $\therefore$  点  $M$  为  $DE$  的中点,  $\therefore DM = EM$ .

在  $\triangle ADM$  和  $\triangle NEM$  中,  $\therefore \begin{cases} \angle MAD = \angle MNE \\ \angle ADM = \angle NEM \\ DM = EM \end{cases}$ .  $\therefore \triangle ADM \cong \triangle NEM$ .  $\therefore AM = MN$ .  $\therefore M$  为  $AN$  的中点.

(2) 证明: 如图 2,  $\therefore \triangle BAD$  和  $\triangle BCE$  均为等腰直角三角形,  $\therefore AB = AD$ ,  $CB = CE$ ,  $\angle CBE = \angle CEB = 45^\circ$ .

$\therefore AD \parallel NE$ ,  $\therefore \angle DAE + \angle NEA = 180^\circ$ .  $\therefore \angle DAE = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle NEA = 90^\circ$ .  $\therefore \angle NEC = 135^\circ$ .

$\because A, B, E$  三点在同一直线上,  $\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle CBE = 135^\circ$ .  $\therefore \angle ABC = \angle NEC$ .

$\because \triangle ADM \cong \triangle NEM$  (已证),  $\therefore AD = NE$ .  $\because AD = AB$ ,  $\therefore AB = NE$ .

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle NEC$  中, 
$$\begin{cases} AB = NE \\ \angle ABC = \angle NEC \\ BC = EC \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle NEC. \therefore AC = NC, \angle ACB = \angle NCE. \therefore \angle ACN = \angle$$

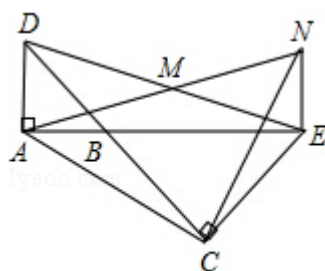


图2

$\angle BCE = 90^\circ$ .  $\therefore \triangle ACN$  为等腰直角三角形.

(3)  $\triangle ACN$  仍为等腰直角三角形.

证明: 如图 3, 此时  $A, B, N$  三点在同一条直线上.

$\because AD \parallel EN, \angle DAB = 90^\circ, \therefore \angle ENA = \angle DAN = 90^\circ$ .  $\because \angle BCE = 90^\circ, \therefore \angle CBN + \angle CEN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ .

$\because A, B, N$  三点在同一条直线上,  $\therefore \angle ABC + \angle CBN = 180^\circ. \therefore \angle ABC = \angle NEC$ .

$\because \triangle ADM \cong \triangle NEM$  (已证),  $\therefore AD = NE$ .  $\because AD = AB$ ,  $\therefore AB = NE$ .

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle NEC$  中, 
$$\begin{cases} AB = NE \\ \angle ABC = \angle NEC \\ BC = EC \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle NEC. \therefore AC = NC, \angle ACB = \angle NCE.$$

$\therefore \angle ACN = \angle BCE = 90^\circ$ .

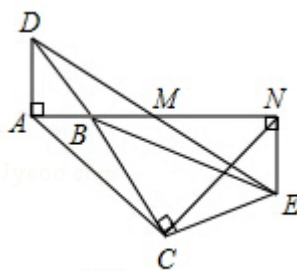


图3

$\therefore \triangle ACN$  为等腰直角三角形.

7、(2017 长清一模)【解答】证明: (1)  $\because$  点  $D$  关于直线  $AE$  的对称点为  $F$ ,

$\therefore \angle EAF = \angle DAE, AD = AF$ , 又  $\because \angle BAC = 2\angle DAE, \therefore \angle BAC = \angle DAF$ , .....2 分

$\because AB = AC, \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AF}, \therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC$ ; .....3 分

(2)  $\because$  点  $D$  关于直线  $AE$  的对称点为  $F, \therefore EF = DE, AF = AD$ ,

$\because \alpha = 45^\circ, \therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle CAD, \angle CAF = \angle DAE + \angle EAF - \angle CAD = 45^\circ + 45^\circ - \angle CAD = 90^\circ - \angle CAD$ ,

$\therefore \angle BAD = \angle CAF$ , 在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACF$  中, 
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAF \\ AD = AF \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF \text{ (SAS)}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore CF = BD, \angle ACF = \angle B, \because AB = AC, \angle BAC = 2\alpha, \alpha = 45^\circ$ ,

$\therefore \triangle ABC$  是等腰直角三角形,  $\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ, \therefore \angle ECF = \angle ACB + \angle ACF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ , .....5 分

在  $\text{Rt}\triangle CEF$  中, 由勾股定理得,  $EF^2 = CF^2 + CE^2$ , 所以,  $DE^2 = BD^2 + CE^2$ ; .....6 分



(3)  $DE^2=BD^2+CE^2$  还能成立. 理由如下: 作点 D 关于 AE 的对称点 F, 连接 EF、CF, 由轴对称的性质得,  $EF=DE$ ,  $AF=AD$ ,  $\because \alpha=45^\circ$ ,  $\therefore \angle BAD=90^\circ - \angle CAD$ ,

$\angle CAF=\angle DAE+\angle EAF - \angle CAD=45^\circ+45^\circ - \angle CAD=90^\circ - \angle CAD$ ,  $\therefore \angle BAD=\angle CAF$ ,

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACF$  中, 
$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAF, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF \text{ (SAS)}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分} \\ AD=AF \end{cases}$$

$\therefore CF=BD$ ,  $\angle ACF=\angle B$ ,  $\because AB=AC$ ,  $\angle BAC=2\alpha$ ,  $\alpha=45^\circ$ ,  $\therefore \triangle ABC$  是等腰直角三角形,

$\therefore \angle B=\angle ACB=45^\circ$ ,  $\therefore \angle ECF=\angle ACB+\angle ACF=45^\circ+45^\circ=90^\circ$ ,  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

在  $\text{Rt}\triangle CEF$  中, 由勾股定理得,  $EF^2=CF^2+CE^2$ , 所以,  $DE^2=BD^2+CE^2$ .  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

