

## 二次函数压轴题解题思路

### 一、基本知识

1 会求解析式

2. 会利用函数性质和图像

3. 相关知识：如一次函数、反比例函数、点的坐标、方程。图形中的三角形、四边形、圆及平行线、垂直。一些方法：如相似、三角函数、解方程。一些转换：如轴对称、平移、旋转。

### 二、典型例题：

#### （一）、求解析式

1. (2014•莱芜) 过  $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  作  $x$  轴的垂线，分别交直线  $y=4-x$  于  $C$ 、 $D$  两点。抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过  $O$ 、 $C$ 、 $D$  三点。(1) 求抛物线的表达式；

2. (2012•莱芜) 顶点坐标为  $(2, -1)$  的抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ，与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点。(1) 求抛物线的表达式；

练习：(2014 兰州) 把抛物线  $y=-2x^2$  先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度后，所得函数的表达式为 ( )

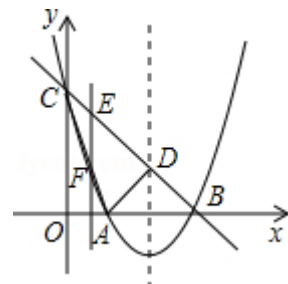
A.  $y=-2(x+1)^2+2$     B.  $y=-2(x+1)^2-2$     C.  $y=-2(x-1)^2+2$     D.  $y=-2(x-1)^2-2$

#### （二）、二次函数的相关应用

##### 第一类：面积问题

例题. (2012•莱芜) 如图，顶点坐标为  $(2, -1)$  的抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ )

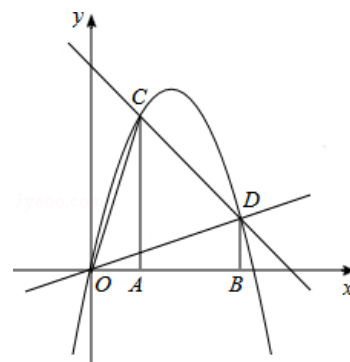
与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ，与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点。



(1) 求抛物线的表达式；(抛物线的解析式： $y=(x-2)^2-1=x^2-4x+3$ .)

(2) 设抛物线的对称轴与直线  $BC$  交于点  $D$ ，连接  $AC$ 、 $AD$ ，求  $\triangle ACD$  的面积；

2. (2014•莱芜) 如图, 过 A (1, 0)、B (3, 0) 作 x 轴的垂线, 分别交直线  $y=4-x$  于 C、D 两点. 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过 O、C、D 三点.

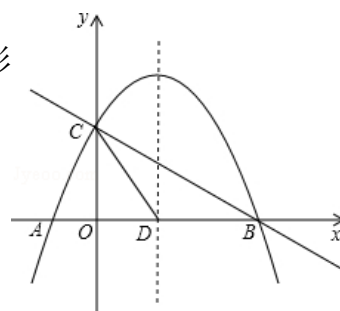


(1) 求抛物线的表达式; (抛物线的表达式为:  $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x$ .)

(3) 若  $\triangle AOC$  沿 CD 方向平移 (点 C 在线段 CD 上, 且不与点 D 重合),

在平移的过程中  $\triangle AOC$  与  $\triangle OBD$  重叠部分的面积记为 S, 试求 S 的最大值.

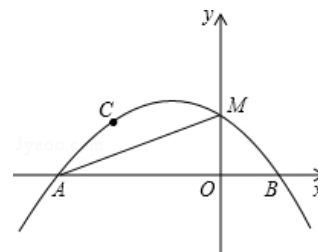
3. (2014•兰州) 如图, 抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + n$  与 x 轴交于 A、B 两点, 与 y 轴交于点 C, 抛物线的对称轴交 x 轴于点 D, 已知 A (-1, 0), C (0, 2). (1) 求抛物线的表达式; (3) 点 E 是线段 BC 上的一个动点, 过点 E 作 x 轴的垂线与抛物线相交于点 F, 当点 E 运动到什么位置时, 四边形 CDBF 的面积最大? 求出四边形 CDBF 的最大面积及此时 E 点的坐标.



## 第二类: 构造问题

### (1) 构造线段

(2013•莱芜) 如图, 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 经过点 A (-3, 0)、B (1, 0)、C (-2, 1), 交 y 轴于点 M. (1) 求抛物线的表达式;



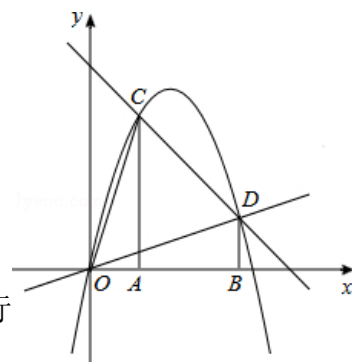
(2) D 为抛物线在第二象限部分上的一点, 作 DE 垂直 x 轴于点 E, 交线段 AM 于点 F, 求线段 DF 长度的最大值, 并求此时点 D 的坐标;

### (2) 构造相似三角形

(2013•莱芜) 如图, 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 经过点 A (-3, 0)、B (1, 0)、C (-2, 1), 交 y 轴于点 M. (1) 求抛物线的表达式; (抛物线的表达式为  $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1$ .) (3) 抛物线上是否存在一点 P, 作 PN 垂直 x 轴于点 N, 使得以点 P、A、N 为顶点的三角形与  $\triangle MAO$  相似? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

### (3) 构造平行四边形

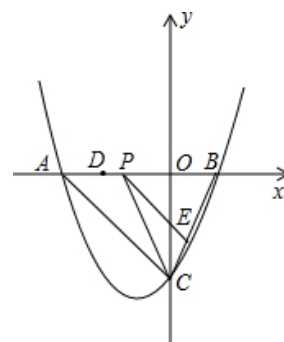
(2014•莱芜) 如图, 过 A (1, 0)、B (3, 0) 作 x 轴的垂线, 分别交直线  $y=4-x$  于 C、D 两点. 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过 O、C、D 三点. (1) 求抛物线的表达式;



(2) 点 M 为直线 OD 上的一个动点, 过 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N, 问是否存在这样的点 M, 使得以 A、C、M、N 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求此时点 M 的横坐标; 若不存在, 请说明理由;

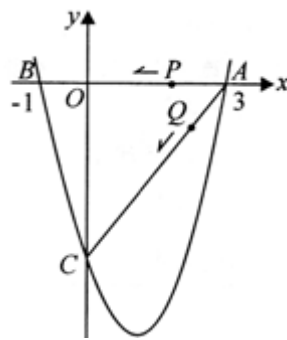
### (4) 构造等腰三角形

(2013•泰安) 如图, 抛物线  $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$  与 y 轴交于点 C (0, -4), 与 x 轴交于点 A, B, 且 B 点的坐标为 (2, 0) (1) 求该抛物线的解析式.



(2) 若点 P 是 AB 上的一动点, 过点 P 作  $PE \parallel AC$ , 交 BC 于 E, 连接 CP, 求  $\triangle PCE$  面积的最大值. (3) 若点 D 为 OA 的中点, 点 M 是线段 AC 上一点, 且  $\triangle OMD$  为等腰三角形, 求 M 点的坐标.

**练习：**（2014 遵义）如图，二次函数  $y = \frac{4}{3}x^2 + bx + c$  的图象与交于  $A$



$(3, 0)$ 、 $B(-1, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ．若点  $P$ ， $Q$  同时从  $A$  点出发，都以每秒 1 个单位长度的速度分别沿  $AB$ ， $AC$  边运动，其中一点到达端点时，另一点也随即停止运动．（1）求该二次函数的解析式及点  $C$  的坐标．

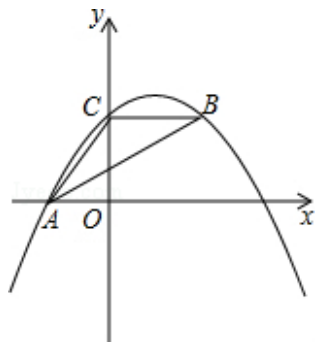
（2）当点  $P$  运动到  $B$  点时，点  $Q$  停止运动，这时，在  $x$  轴上是否存在点

$E$ ，使得以  $A$ ， $E$ ， $Q$  为顶点的三角形是等腰三角形．若存在，请求出  $E$  点的坐标，若不存在，请说明理由．

（3）当  $P$ ， $Q$  运动到  $t$  秒时， $\triangle APQ$  沿  $PQ$  翻折，点  $A$  恰好落在抛物线上  $D$  点处，请判定此时四边形  $APDQ$  的形状，并求出  $D$  点坐标．

### （5）构造直角三角形

22. （2014•四川内江）如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过  $A(-3, 0)$ 、 $C(0, 4)$ ，点  $B$  在抛物线上， $CB \parallel x$  轴，且  $AB$  平分  $\angle CAO$ ．（1）求抛物线的解析式；

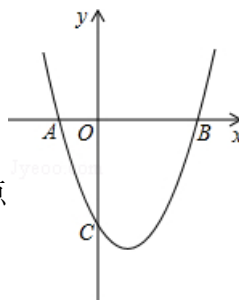


（2）线段  $AB$  上有一动点  $P$ ，过点  $P$  作  $y$  轴的平行线，交抛物线于点  $Q$ ，求线段  $PQ$  的最大值；

（3）抛物线的对称轴上是否存在点  $M$ ，使  $\triangle ABM$  是以  $AB$  为直角边的直角三角形？如果存在，求出点  $M$  的坐标；如果不存在，说明理由．

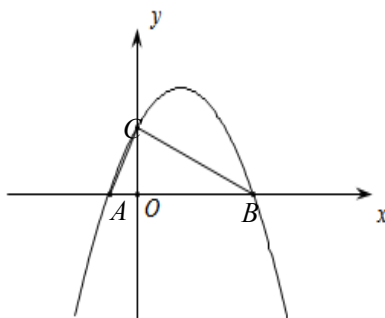
### (6) 构造角相等

(2014•娄底) 如图, 抛物线  $y=x^2+mx+(m-1)$  与  $x$  轴交于点  $A(x_1, 0)$ ,  $B(x_2, 0)$ ,  $x_1 < x_2$ , 与  $y$  轴交于点  $C(0, c)$ , 且满足  $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=7$ . (1) 求抛物线的解析式; (2) 在抛物线上能不能找到一点  $P$ , 使  $\angle POC=\angle PCO$ ? 若能, 请求出点  $P$  的坐标; 若不能, 请说明理由.



### (7) 构造梯形

(2011 莱芜) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(-2, -4)$ ,  $OB=2$ , 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过点  $A$ 、 $O$ 、 $B$  三点. (1) 求抛物线的函数表达式; (2) 若点  $M$  是抛物线对称轴上一点, 试求  $AM+OM$  的最小值; (3) 在此抛物线上, 是否存在点  $P$ , 使得以点  $P$  与点  $O$ 、 $A$ 、 $B$  为顶点的四边形是梯形. 若存在, 求点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

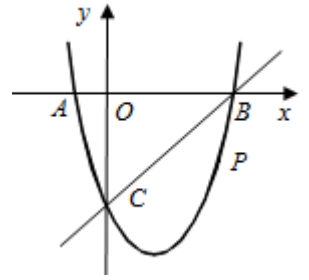


**练习:** (2010 临沂) 如图: 二次函数  $y=-x^2+ax+b$  的图象与  $x$  轴交于  $A(-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $B(2, 0)$  两点, 且与  $y$  轴交于点  $C$ . (1) 求该抛物线的解析式, 并判断  $\triangle ABC$  的形状; (2) 在  $x$  轴上方的抛物线上有一点  $D$ , 且  $A$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $B$  四点为顶点的四边形是等腰梯形, 请直接写出  $D$  点的坐标;

(3) 在此抛物线上是否存在点  $P$ , 使得以  $A$ 、 $C$ 、 $B$ 、 $P$  四点为顶点的四边形是直角梯形? 若存在, 求出  $P$  点的坐标; 若不存在, 说明理由.

### (8) 构造菱形

(2013•枣庄) 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数  $y=x^2+bx+c$  的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点,  $A$  点在原点的左侧,  $B$  点的坐标为  $(3, 0)$ , 与  $y$  轴交于  $C(0, -3)$  点, 点  $P$  是直线  $BC$  下方的抛物线上一动点. (1) 求这个二次函数的表达式.



(2) 连接  $PO$ 、 $PC$ , 并把  $\triangle POC$  沿  $CO$  翻折, 得到四边形  $POP'C$ , 那么是否存在点  $P$ , 使四边形  $POP'C$  为菱形? 若存在, 请求出此时点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(3) 当点  $P$  运动到什么位置时, 四边形  $ABPC$  的面积最大? 求出此时  $P$  点的坐标和四边形  $ABPC$  的最大面积.

### (9) 构造对称点

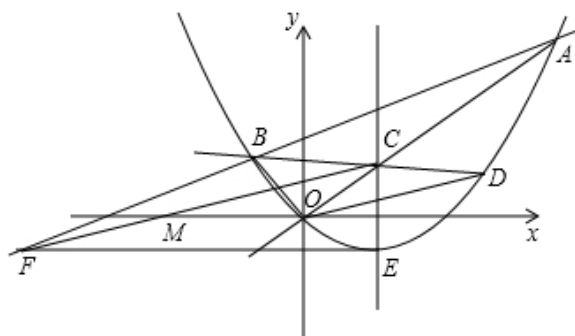
(2011 莱芜) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(-2, -4)$ ,  $OB=2$ , 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  经过点  $A$ 、 $O$ 、 $B$  三点. (1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 若点  $M$  是抛物线对称轴上一点, 试求  $AM+OM$  的最小值;

(3) 在此抛物线上, 是否存在点  $P$ , 使得以点  $P$  与点  $O$ 、 $A$ 、 $B$  为顶点的四边形是梯形. 若存在, 求点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

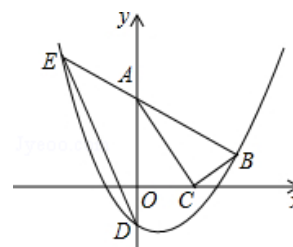
### (10) 构造平行线

- (2013•威海) 如图，在平面直角坐标系中，直线  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  与直线  $y = x$  交于点 A，点 B 在直线  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  上， $\angle BOA = 90^\circ$ 。抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点 A，O，B，顶点为点 E。(1) 求点 A，B 的坐标；
- (2) 求抛物线的函数表达式及顶点 E 的坐标；
- (3) 设直线  $y = x$  与抛物线的对称轴交于点 C，直线 BC 交抛物线于点 D，过点 E 作  $FE \parallel x$  轴，交直线 AB 于点 F，连接 OD，CF，CF 交 x 轴于点 M。试判断 OD 与 CF 是否平行并说明理由。



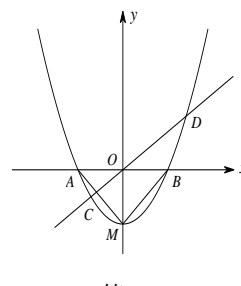
**练习:** (2014•山东烟台) 如图，在平面直角坐标系中， $Rt\triangle ABC$  的顶点 A，C 分别在 y 轴，x 轴上， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $OA = \sqrt{3}$ ，抛物线  $y = ax^2 - ax - a$  经过点  $B(2, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ，与 y 轴交于点 D。

- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 点 B 关于直线 AC 的对称点是否在抛物线上？请说明理由；
- (3) 延长 BA 交抛物线于点 E，连接 ED，试说明  $ED \parallel AC$  的理由。



### (11) 构造垂直

- (2014 宜宾市) 如图，已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  的顶点坐标为  $M(0, -1)$ ，与 x 轴交于 A、B 两点。(1) 求抛物线的解析式；(2) 判断  $\triangle MAB$  的形状，并说明理由；(3) 过原点的任意直线 (不与 y 轴重合) 交抛物线于 C、D 两点，连结 MC、MD，试判断 MC、MD 是否垂直，并说明理由。

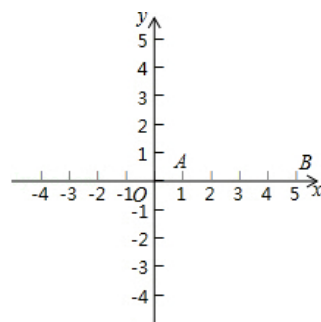


### (12) 构造圆

(2014 年淄博)如图，点 A 与点 B 的坐标分别是 (1, 0), (5, 0)，点 P 是该直角坐标系内的一个动点。(1) 使  $\angle APB=30^\circ$  的点 P 有 无数 个；

(2) 若点 P 在 y 轴上，且  $\angle APB=30^\circ$ ，求满足条件的点 P 的坐标；

(3) 当点 P 在 y 轴上移动时， $\angle APB$  是否有最大值？若有，求点 P 的坐标，并说明此时  $\angle APB$  最大的理由；若没有，也请说明理由。



### (13) 轴对称

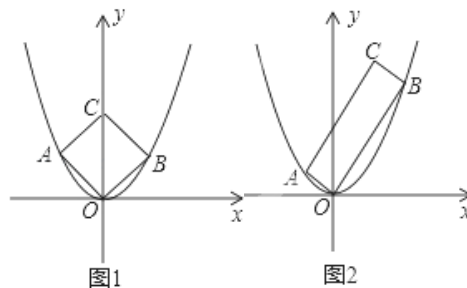
(2012 浙江丽水)在直角坐标系中，点 A 是抛物线  $y=x^2$  在第二象限上的点，连接 OA，过点 O 作  $OB \perp OA$ ，交抛物线于点 B，以 OA、OB 为边构造矩形 AOCB。

(1) 如图 1，当点 A 的横坐标为      时，矩形 AOCB 是正方形；

(2) 如图 2，当点 A 的横坐标为  $-\frac{1}{2}$  时，①求点 B 的坐

标；

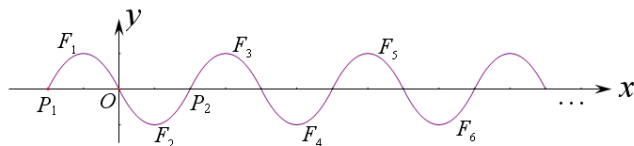
②将抛物线  $y=x^2$  作关于 x 轴的轴对称变换得到抛物线  $y=-x^2$ ，试判断抛物线  $y=-x^2$  经过平移变换后，能否经过 A, B, C 三点？如果可以，说出变换的过程；如果不可以，请说明理由。





## (14) 规律

(2014•江西抚州, 第23题, 10分) 如图, 抛物线  $y = ax^2 + 2ax$  ( $a < 0$ ) 位于  $x$  轴上方的图象记为  $F_1$ , 它与  $x$  轴交于  $P_1$ 、 $O$  两点, 图象  $F_2$  与  $F_1$  关于原点  $O$  对称,  $F_2$  与  $x$  轴的另一个交点为  $P_2$ , 将  $F_1$  与  $F_2$  同时沿  $x$  轴向右平移  $P_1P_2$  的长度即可得  $F_3$  与  $F_4$ ; 再将  $F_3$  与  $F_4$  同时沿  $x$  轴向右平移  $P_1P_2$  的长度即可得  $F_5$  与  $F_6$ ; ……按这样的方式一直平移下去即可得到一系列图象  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , 我们把这组图象称为“波浪抛物线”. (1) 当  $a = -1$  时,



① 求图象  $F_1$  的顶点坐标;

② 点  $H(2014, -3)$  不在 (填“在”或“不在”) 该“波浪抛物线”上; 若图象  $F_n$  的顶点  $T_n$  的横坐标为 201, 则图象  $F_n$  对应的解析式为  $y = (x - 201)^2 - 1$ , 其自变量  $x$

的取值范围为  $200 \leq x \leq 202$ . (2) 设图象  $F_m$ 、 $F_{m+1}$  的顶点分别为  $T_m$ 、 $T_{m+1}$  ( $m$  为正整数),  $x$  轴上一点  $Q$  的坐标为  $(12, 0)$ . 试探究: 当  $a$  为何值时, 以  $O$ 、 $T_m$ 、 $T_{m+1}$ 、 $Q$  四点为顶点的四边形为矩形? 并直接写出此时  $m$  的值.

### 答案与解析:

(1) 当  $a = -1$  时,

①  $y = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$ ,  $\therefore F_1$  的顶点是  $(-1, 1)$ ;

② 由①知: “波浪抛物线”的  $y$  值的取值范围是  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $\therefore$  点  $H(2014, -3)$  不在“波浪抛物线”上;

由平移知:  $F_2: y = (x-1)^2 - 1$ ,  $F_3: y = (x-3)^2 + 1$ ,  $\dots$ ,

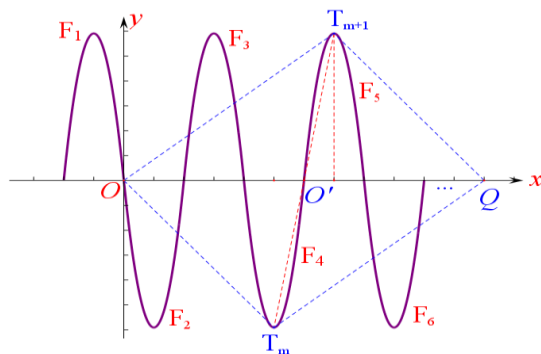
$\therefore F_n$  的顶点横坐标是 201,

$\therefore F_n$  的解析式是:  $y = (x-201)^2 - 1$ , 此时图象与  $x$  轴的两个交点坐标是  $(200, 0)$ 、 $(202, 0)$ ,  $\therefore 200 \leq x \leq 202$ .

(2) 如下图, 取  $OQ$  的中点  $O'$ , 连接  $T_m T_{m+1}$ ,

$\therefore$  四边形  $OT_m T_{m+1} Q$  是矩形

$\therefore T_m T_{m+1} = OQ = 12$ , 且  $T_m$ 、 $T_{m+1}$  经过  $O'$ ,



$$\therefore OT_{m+1}=6,$$

$$\because F_1: y = ax^2 + 2ax = a(x+1)^2 - a$$

$$\therefore T_{m+1} \text{ 的纵坐标为 } -a, \therefore (-a)^2 + 1^2 = 6^2,$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{35}, \text{ 已知 } a < 0,$$

$$\therefore a = -\sqrt{35} \therefore \text{当 } a = -\sqrt{35} \text{ 时,}$$

以以 0、 $T_m$ 、 $T_{m+1}$ 、Q 四点为顶点的四边形为矩形. 此时  $m=4$ .

解:

$$(1) \because \text{抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + n \text{ 经过 } A(-1, 0), C(0, 2). \text{ 解得: } \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = 2 \end{cases} \therefore \text{抛物线的解析}$$

$$\text{式为: } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2; (2) \because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2, \therefore y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}, \therefore \text{抛物线的对称轴是}$$

$$x = \frac{3}{2}. \therefore OD = \frac{3}{2}.$$

$\because C(0, 2), \therefore OC = 2$ . 在  $Rt\triangle OCD$  中, 由勾股定理, 得  $CD = \frac{5}{2}$ .  $\because \triangle CDP$  是以  $CD$  为腰的等腰三角形,

$\therefore CP_1 = CP_2 = CP_3 = CD$ . 作  $CH \perp x$  轴于  $H$ ,

$$\therefore HP_1 = HD = 2, \therefore DP_1 = 4. \therefore P_1\left(\frac{3}{2}, 4\right),$$

$$P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right);$$

$$(3) \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } 0 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \therefore x_1 = -1,$$

$$x_2 = 4, \therefore B(4, 0). \text{ 设直线 } BC \text{ 的解析式为}$$

$$y = kx + b, \text{ 由图象, 得 } \begin{cases} 2 = b \\ 0 = 4k + b \end{cases}, \text{ 解得:}$$

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为: } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

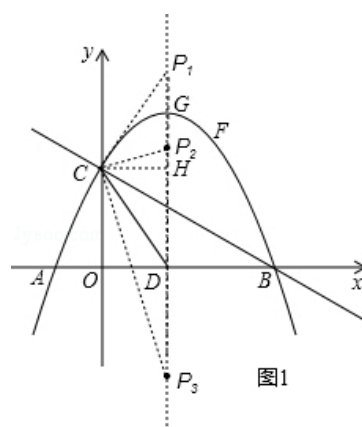


图1

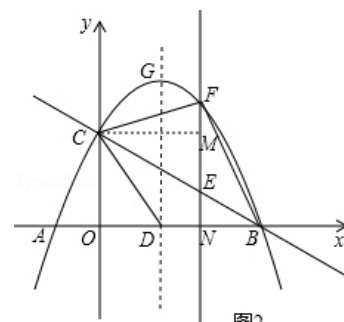


图2

$$\text{如图 2, 过点 } C \text{ 作 } CM \perp EF \text{ 于 } M, \text{ 设 } E\left(a, -\frac{1}{2}a^2 + 2\right), F\left(a, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2\right), \therefore EF = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2$$

$$- \left(-\frac{1}{2}a + 2\right) = -\frac{1}{2}a^2 + 2a \quad (0 \leq x \leq 4). \because S_{\text{四边形 } CDBF} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CEF} + S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}BD \cdot OC + \frac{1}{2}EF \cdot CM + \frac{1}{2}EF \cdot BN, =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 2 + \frac{1}{2}a \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a\right) + \frac{1}{2}(4-a) \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a\right), = -a^2 + 4a + \frac{5}{2} \quad (0 \leq x \leq 4). = -(a-2)^2 +$$

$$\frac{13}{2}$$

∴  $a=2$  时,  $S_{\text{四边形 CDBF 的面积最大}} = \frac{13}{2}$ , ∴  $E(2, 1)$ .

(2014•莱芜)

解: (1) 由题意, 可得  $C(1, 3)$ ,  $D(3, 1)$ . ∵ 抛物线过原点, ∴ 设抛物线的解析式为:  $y=ax^2+bx$ .

$$\therefore \begin{cases} a+b=3 \\ 9a+3b=1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{cases}, \therefore \text{抛物线的表达式为: } y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{13}{3}x.$$

(2) 存在.

设直线 OD 解析式为  $y=kx$ , 将  $D(3, 1)$  代入求得  $k=\frac{1}{3}$ , ∴ 直线 OD 解析式为  $y=\frac{1}{3}x$ .

设点 M 的横坐标为  $x$ , 则  $M(x, \frac{1}{3}x)$ ,  $N(x, -\frac{4}{3}x^2+\frac{13}{3}x)$ , ∴  $MN=|y_M - y_N| = |\frac{1}{3}x - (-\frac{4}{3}x^2+\frac{13}{3}x)| = |\frac{4}{3}x^2 - 4x|$ . 由题意, 可知  $MN \parallel AC$ , 因为以 A、C、M、N 为顶点的四边形为平行四边

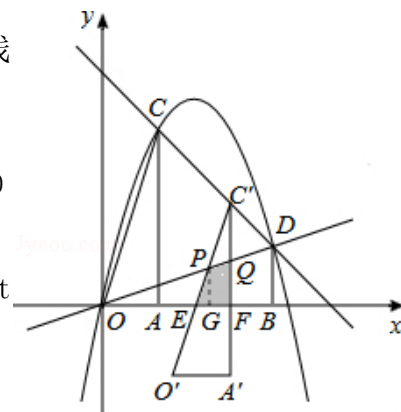
形, 则有  $MN=AC=3$ . ∴  $|\frac{4}{3}x^2 - 4x|=3$ . 若  $\frac{4}{3}x^2 - 4x=3$ , 整理得:  $4x^2 - 12x - 9=0$ , 解得:  $x=$

$\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$  或  $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$ ; 若  $\frac{4}{3}x^2 - 4x = -3$ , 整理得:  $4x^2 - 12x + 9=0$ , 解得:  $x=\frac{3}{2}$ .

∴ 存在满足条件的点 M, 点 M 的横坐标为:  $\frac{3}{2}$  或  $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$ .

(3) ∵  $C(1, 3)$ ,  $D(3, 1)$  ∴ 易得直线 OC 的解析式为  $y=3x$ , 直线 OD 的解析式为  $y=\frac{1}{3}x$ .

如解答图所示, 设平移中的三角形为  $\triangle A'O'C'$ , 点  $C'$  在线段 CD 上. 设  $O'C'$  与  $x$  轴交于点 E, 与直线 OD 交于点 P; 设  $A'C'$  与  $x$  轴交于点 F, 与直线 OD 交于点 Q. 设水平方向的平移距离为  $t$  ( $0 \leq t < 2$ ), 则图中  $AF=t$ ,  $F(1+t)$ ,  $Q(1+t, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t)$ ,  $C'(1+t, 3-t)$ .



解答图

设直线  $O'C'$  的解析式为  $y=3x+b$ , 将  $C'(1+t, 3-t)$  代入得:  $b=-4t$ , ∴ 直线  $O'C'$  的解析式为  $y=3x-4t$ .

∴  $E(\frac{4}{3}t, 0)$ . 联立  $y=3x-4t$  与  $y=\frac{1}{3}x$ , 解得  $x=\frac{3}{2}t$ , ∴  $P(\frac{3}{2}t, \frac{1}{2}t)$ .

过点 P 作  $PG \perp x$  轴于点 G, 则  $PG=\frac{1}{2}t$ .

∴  $S=S_{\triangle OFQ} - S_{\triangle OEP} = \frac{1}{2}OF \cdot FQ - \frac{1}{2}OE \cdot PG = \frac{1}{2}(1+t)(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}t \cdot \frac{1}{2}t = -\frac{1}{6}(t-1)^2 + \frac{1}{3}$  当  $t=1$  时,

$S$  有最大值为  $\frac{1}{3}$ . ∴  $S$  的最大值为  $\frac{1}{3}$ .

(2013•莱芜)

解：(1) 由题意可知  $\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ 4a-2b+c=1 \end{cases}$ . 解得  $\begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{2}{3} \\ c=1 \end{cases}$ .  $\therefore$  抛物线的表达式为  $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1$ .

(2) 将  $x=0$  代入抛物线表达式，得  $y=1$ .  $\therefore$  点 M 的坐标为  $(0, 1)$ . 设直线 MA 的表达式为  $y=kx+b$ ，则  $\begin{cases} b=1 \\ -3k+b=0 \end{cases}$ . 解得  $\begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}$ .  $\therefore$  直线 MA 的表达式为  $y=\frac{1}{3}x+1$ . 设点 D 的坐标为

$(x_0, -\frac{1}{3}x_0^2-\frac{2}{3}x_0+1)$ ，则点 F 的坐标为  $(x_0, \frac{1}{3}x_0+1)$ .  $DF=-\frac{1}{3}x_0^2-\frac{2}{3}x_0+1-(\frac{1}{3}x_0+1)=-\frac{1}{3}x_0^2-x_0=-\frac{1}{3}(x_0+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$ .

当  $x_0=-\frac{3}{2}$  时，DF 的最大值为  $\frac{3}{4}$ . 此时  $-\frac{1}{3}x_0^2-\frac{2}{3}x_0+1=\frac{5}{4}$ ，即点 D 的坐标为  $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ .

(3) 存在点 P，使得以点 P、A、N 为顶点的三角形与  $\triangle MAO$  相似. 设 P  $(m, -\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1)$ .

在  $Rt\triangle MAO$  中， $AO=3MO$ ，要使两个三角形相似，由题意可知，点 P 不可能在第一象限. ①设点 P 在第二象限时， $\therefore$  点 P 不可能在直线 MN 上， $\therefore$  只能  $PN=3NM$ ， $\therefore$

$-\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1=3(m+3)$ ，即  $m^2+11m+24=0$ . 解得  $m=-3$  (舍去) 或  $m=-8$ . 又  $-3 < m < 0$ ，

故此时满足条件的点不存在.

②当点 P 在第三象限时， $\therefore$  点 P 不可能在直线 MN 上， $\therefore$  只能  $PN=3NM$ ， $\therefore$

$-\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1=3(-m-3)$ ，即  $m^2+11m+24=0$ . 解得  $m=-3$  或  $m=-8$ .

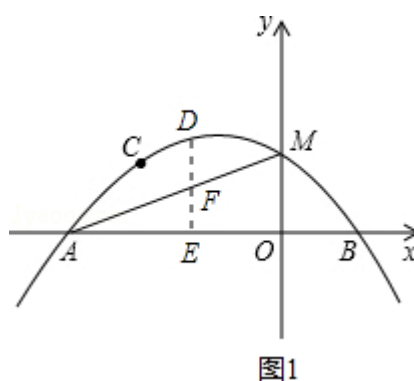
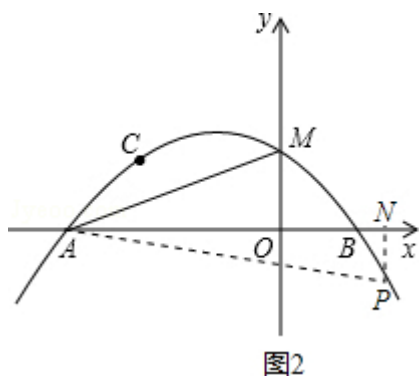
此时点 P 的坐标为  $(-8, -15)$ .

③当点 P 在第四象限时，若  $AN=3PN$  时，则  $-3(-\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1)=m+3$ ，即  $m^2+m-6=0$ . 解得

$m=-3$  (舍去) 或  $m=2$ . 当  $m=2$  时， $-\frac{1}{3}x_0^2-\frac{2}{3}x_0+1=-\frac{5}{3}$ . 此时点 P 的坐标为  $(2, -\frac{5}{3})$ .

若  $PN=3NA$ ，则  $-(-\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1)=3(m+3)$ ，即  $m^2-7m-30=0$ . 解得  $m=-3$  (舍去) 或  $m=10$ ，此时点 P 的坐标为  $(10, -39)$ .

综上所述，满足条件的点 P 的坐标为  $(-8, -15)$ 、 $(2, -\frac{5}{3})$ 、 $(10, -39)$ .



(2012•莱芜)

**解:** (1) 依题意, 设抛物线的解析式为  $y=a(x-2)^2-1$ , 代入  $C(0, 3)$  后, 得:  $a(0-2)^2-1=3$ ,  $a=1$

$\therefore$  抛物线的解析式:  $y=(x-2)^2-1=x^2-4x+3$ .

(2) 由 (1) 知,  $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ;

设直线  $BC$  的解析式为:  $y=kx+3$ , 代入点  $B$  的坐标后, 得:  $3k+3=0$ ,  $k=-1$

$\therefore$  直线  $BC$ :  $y=-x+3$ ; 由 (1) 知: 抛物线的对称轴:  $x=2$ , 则  $D(2, 1)$ ;  $\therefore AD^2=2$ ,  $AC^2=10$ ,  $CD^2=8$

即:  $AC^2=AD^2+CD^2$ ,  $\triangle ACD$  是直角三角形, 且  $AD \perp CD$ ;  $\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD \cdot CD=\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}=2$ .

(3) 由题意知:  $EF \parallel y$  轴, 则  $\angle FED=\angle OCB$ , 若  $\triangle OCB$  与  $\triangle FED$  相似, 则有:

①  $\angle DFE=90^\circ$ , 即  $DF \parallel x$  轴; 将点  $D$  纵坐标代入抛物线的解析式中, 得:  $x^2-4x+3=1$ , 解得  $x=2 \pm \sqrt{2}$ ;

当  $x=2+\sqrt{2}$  时,  $y=-x+3=1-\sqrt{2}$ ; 当  $x=2-\sqrt{2}$  时,  $y=-x+3=1+\sqrt{2}$ ;

$\therefore E_1(2+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ 、 $E_2(2-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ .

②  $\angle EDF=90^\circ$ ; 易知, 直线  $AD$ :  $y=x-1$ , 联立抛物线的解析式有:  $x^2-4x+3=x-1$ , 解得  $x_1=1$ 、 $x_2=4$ ; 当  $x=1$  时,  $y=-x+3=2$ ; 当  $x=4$  时,  $y=-x+3=-1$ ;  $\therefore E_3(1, 2)$ 、 $E_4(4, -1)$ ;

综上, 存在符合条件的点  $E$ , 且坐标为:  $(2+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ 、 $(2-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ 、

$(1, 2)$  或  $(4, -1)$ .

(2011 莱芜)

(1) 解得:  $a=-\frac{1}{2}$ ,  $b=1$ ,  $c=0$   $\therefore$  抛物线的函数表达式为  $y=-\frac{1}{2}x^2+x$ .

(2) 由  $y=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$ , 可得, 抛物线的对称轴为直线  $x=1$ , 且对称轴  $x=1$  是线段  $OB$  的垂直平分线, 连结  $AB$  交直线  $x=1$  于点  $M$ , 即为所求.  $\therefore MO=MB$ , 则  $MO+MA=MA+MB=AB$

作  $AC \perp x$  轴, 垂足为  $C$ , 则  $AC=4$ ,  $BC=4$ ,  $\therefore AB=4\sqrt{2}$   $\therefore MO+MA$  的最小值为  $4\sqrt{2}$ .

(3) ①若  $OB \parallel AP$ , 此时点  $A$  与点  $P$  关于直线  $x=1$  对称, 由  $A(-2, -4)$ , 得  $P(4, -4)$ , 则得梯形

OAPB。②若  $OA \parallel BP$ ，设直线  $OA$  的表达式为  $y=kx$ ，由  $A(-2, -4)$  得， $y=2x$ 。

设直线  $BP$  的表达式为  $y=2x+m$ ，由  $B(2, 0)$  得， $0=4+m$ ，即  $m=-4$ ， $\therefore$  直线  $BP$  的表达式

为  $y=2x-4$  由  $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+x \end{cases}$ ，解得  $x_1=-4$ ， $x_2=2$ （不合题意，舍去）当  $x=-4$  时， $y=-12$ ，

$\therefore$  点  $P(-4, -12)$ ，则得梯形  $OAPB$ 。③若  $AB \parallel OP$ ，设直线  $AB$  的表达式为  $y=kx+m$ ，则

$\begin{cases} -4=-2k+m \\ 0=2k+m \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} k=1 \\ m=-2 \end{cases}$ ， $\therefore AB$  的表达式为  $y=x-2$ 。 $\therefore$  直线  $OP$  的表达式为  $y=x$ 。由

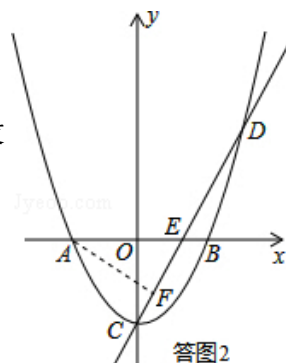
$\begin{cases} y=x \\ y=-\frac{1}{2}x^2+x \end{cases}$ ，得  $x^2=0$ ，解得  $x=0$ ，（不合题意，舍去），此时点  $P$  不存在。综上所述，存

在两点  $P(4, -4)$  或  $P(-4, -12)$  使得以点  $P$  与点  $O$ 、 $A$ 、 $B$  为顶点的四边形是梯形。

（2014•山东临沂）

解：（1）直线  $y=2x-1$ ，当  $x=0$  时， $y=-1$ ，则点  $C$  坐标为  $(0, -1)$ 。设抛物线解析式为  $y=ax^2+bx+c$ ， $\because$  点  $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(0, -1)$  在抛物线上，

$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ c=-1 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$ ， $\therefore$  抛物线的解析式为： $y=x^2-1$ 。



答图2

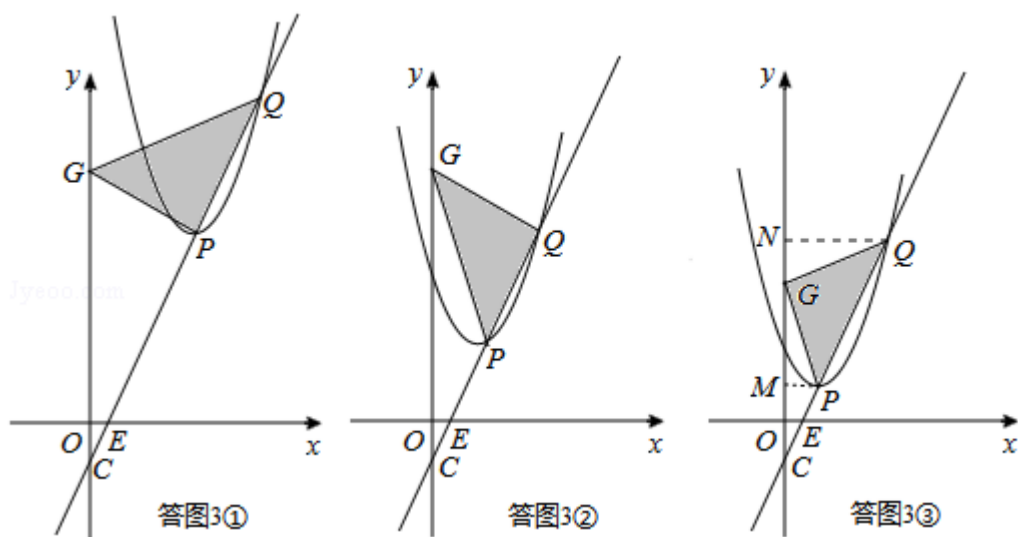
（2）如答图 2 所示，直线  $y=2x-1$ ，当  $y=0$  时， $x=\frac{1}{2}$ ；设直线  $CD$  交  $x$  轴于点  $E$ ，则  $E(\frac{1}{2}, 0)$ 。在  $Rt\triangle OCE$  中， $OC=1$ ， $OE=\frac{1}{2}$ ，由勾股定理得： $CE=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，设  $\angle OEC=\theta$ ，则  $\sin \theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$\cos \theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。过点  $A$  作  $AF \perp CD$  于点  $F$ ，则  $AF=AE \cdot \sin \theta=(OA+OE) \cdot \sin \theta=(1+\frac{1}{2}) \times \frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ， $\therefore$  点  $A$  到直线  $CD$  的距离为  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 。

（3） $\because$  平移后抛物线的顶点  $P$  在直线  $y=2x-1$  上， $\therefore$  设  $P(t, 2t-1)$ ，则平移后抛物线的解析式为  $y=(x-t)^2+2t-1$ 。联立

$\begin{cases} y=(x-t)^2+2t-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$ ，化简得： $x^2-(2t+2)x+t^2+2t=0$ ，解得： $x_1=t$ ， $x_2=t+2$ ，即点  $P$ 、点

$Q$  的横坐标相差 2， $\therefore PQ=\frac{2}{\cos \theta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2\sqrt{5}$ 。 $\triangle GPQ$  为等腰直角三角形，可能有以下情形：



i) 若点 P 为直角顶点, 如答图 3①所示, 则  $PG=PQ=2\sqrt{5}$ .  $\therefore CG = \frac{PG}{\sin \angle OCE} = \frac{PG}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 10$ ,

$\therefore OG = CG - OC = 10 - 1 = 9$ ,  $\therefore G(0, 9)$ ; ii) 若点 Q 为直角顶点, 如答图 3②所示, 则  $QG=PQ=2\sqrt{5}$ .

同理可得:  $Q(0, 9)$ ; iii) 若点 G 为直角顶点, 如答图 3③所示, 此时  $PQ=2\sqrt{5}$ , 则  $GP=GQ=\sqrt{10}$ .

分别过点 P、Q 作 y 轴的垂线, 垂足分别为点 M、N. 易证  $Rt\triangle PMG \cong Rt\triangle GNQ$ ,  $\therefore GN=PM$ ,  $GM=QN$ .

在  $Rt\triangle QNG$  中, 由勾股定理得:  $GN^2 + QN^2 = GQ^2$ , 即  $PM^2 + QN^2 = 10$  ①  $\because$  点 P、Q 横坐标相差 2,  $\therefore NQ = PM + 2$ ,

代入①式得:  $PM^2 + (PM + 2)^2 = 10$ , 解得  $PM = 1$ ,  $\therefore NQ = 3$ . 直线  $y = 2x - 1$ , 当  $x = 1$  时,  $y = 1$ ,  $\therefore P(1, 1)$ , 即  $OM = 1$ .  $\therefore OG = OM + GM = OM + NQ = 1 + 3 = 4$ ,  $\therefore G(0, 4)$ .

综上所述, 符合条件的点 G 有两个, 其坐标为  $(0, 4)$  或  $(0, 9)$ .

(2010 临沂)

(1) 根据题意, 将  $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $B(2, 0)$  代入  $y = -x^2 + ax + b$  中,  $\square$  得  $\begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + b = 0, \\ -4 + 2a + b = 0. \end{cases}$  解

这个方程, 得  $\begin{cases} a = \frac{3}{2}, \\ b = 1. \end{cases}$   $\therefore$  该抛物线的解析式为  $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ . 当  $x = 0$  时,  $y = 1$ .  $\therefore$  点 C 的坐

标为  $(0, 1)$ .  $\square \therefore$  在  $\triangle AOC$  中,  $\square AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . 在  $\triangle BOC$  中,  $\square$

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .  $AB = OA + OB = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ .  $\therefore AC^2 + BC^2 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4} = AB^2$ ,

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形. (2) 点  $D$  的坐标为  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

(3) 存在. 由 (1) 知,  $AC \perp BC$ .  $\square$  ①若以  $BC$  为底边, 则  $BC \parallel AP$ , 如图 5 所示.  $\square$  可求得直线  $BC$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ . 直线  $AP$  可以看作是由直线  $BC$  平移得到的,

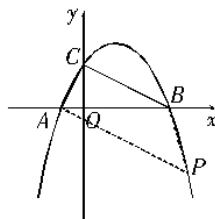


图 5

所以设直线  $AP$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + b$ . 把点  $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  代入

直线  $AP$  的解析式, 求得  $b = -\frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  直线  $AP$  的解析式为

$\because$  点  $P$  既在抛物线上, 又在直线  $AP$  上,  $\square \therefore$  点  $P$  的纵坐标

$-x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ . 解得  $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$  (不合题意, 舍

$x = \frac{5}{2}$  时,  $y = -\frac{3}{2}$ .  $\therefore$  点  $P$  的坐标为  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ . ②若以  $AC$  为底

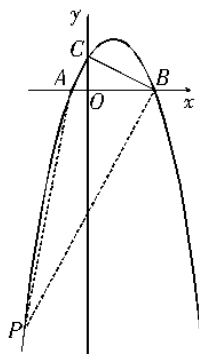


图 6

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ .

相等,  $\square$  即

去).  $\square$  当

边, 则  $BP \parallel AC$ ,

如图 6 所示.  $\square$  可求得直线  $AC$  的解析式为  $y = 2x + 1$ . 直线  $BP$  可以看作是由直线  $AC$  平移得到的,  $\square$  所以直线  $BP$  的解析式为  $y = 2x + b$ .  $\square$  把点  $B(2, 0)$  代入直线  $BP$  的解析式, 求得  $b = -4$ .

$\therefore$  直线  $BP$  的解析式为  $y = 2x - 4$ .  $\because$  点  $P$  既在抛物线上, 又在直线  $BP$  上.  $\square \therefore$  点  $P$  的纵坐标

相等,  $\square$  即  $-x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 2x - 4$ . 解得  $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 2$  (不合题意, 舍去).  $\square$  当  $x = -\frac{5}{2}$  时,

$y = -9$ .  $\therefore$  点  $P$  的坐标为  $\left(-\frac{5}{2}, -9\right)$ . 综上所述, 满足题目条件的点  $P$  为  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$  或  $\left(-\frac{5}{2}, -9\right)$ .

(2014 遵义)

$$(1) y = \frac{4}{3}(x+1)(x-3) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - 4 \quad C(0, -4)$$

(2) 存在分三种情况讨论如下:

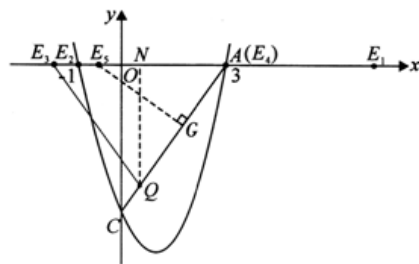
①以  $A$  为圆心,  $AQ$  为半径画弧, 交  $x$  轴于点  $E_1, E_2$ .  $AQ = 4$ ,  $OA$

$= 3$ ,  $OE_1 = 1$ ,  $AE_2 = 3 + 4 = 7$ .  $\therefore E_1(-1, 0), E_2(7, 0)$

②以  $Q$  为圆心,  $QA$  为半径画弧, 交  $x$  轴于  $E_3, E_4$  (与  $A$  点重合, 不合题意) 过  $Q$  作  $QN \perp x$

轴于点  $N$ , 则  $QN \parallel y$  轴,  $\frac{AN}{AO} = \frac{AQ}{AC}$  即  $\frac{AN}{3} = \frac{4}{5}$ ,  $\therefore AN = \frac{12}{5}$ ,

$ON = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$ ,  $NE_3 = NA = \frac{12}{5}$ ,  $\therefore OE_3 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ ,  $E_3\left(-\frac{9}{5}, 0\right)$ .



(第 27-2 答图)



③作  $AQ$  的中垂线交  $x$  轴于点  $E_5$ , 垂足为  $G$ ,  $\angle E_5AG = \angle CAO$ ,  $\angle AGE_5 = \angle COA = 90^\circ$ .  $\therefore$

$$\triangle E_5AG \sim \triangle CAO \therefore \frac{AE_5}{CA} = \frac{AG}{AO} \text{ 即 } \frac{AE_5}{5} = \frac{2}{3}, AE_5 = \frac{10}{3}, OE_5 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3} \therefore E_5(-\frac{1}{3}, 0)$$

综上, 这样的点有四个,  $E_1(-1, 0)$ ,  $E_2(7, 0)$ ,  $E_3(-\frac{9}{5}, 0)$ ,  $E_5(-\frac{1}{3}, 0)$ .

(3) (6分) 四边形  $APDQ$  是菱形.

解法一: 过  $D$  作  $DH \perp x$  轴于点  $H$ , 设运动的时间为  $t$  秒, 则

$$PD = PA = t.$$

$$\therefore PD \parallel AC, \therefore \angle DPH = \angle OAC, \angle DHP = \angle AOC = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle DHP \sim \triangle COA, \therefore \frac{DH}{CO} = \frac{DP}{AC} = \frac{HP}{OA},$$

$$\therefore AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ 即 } \frac{DH}{4} = \frac{t}{5} = \frac{HP}{3},$$

$$\therefore DH = \frac{4}{5}t, HP = \frac{3}{5}t, \therefore OP = 3 - t,$$

$$\therefore OH = \frac{3}{5}t - (3 - t) = \frac{8}{5}t - 3 \quad \therefore D(3 - \frac{8}{5}t, -\frac{4}{5}t) \quad \therefore \text{点 } D \text{ 在抛物线上,}$$

$$\therefore -\frac{4}{5}t = \frac{4}{3}(3 - \frac{8}{5}t + 1)(3 - \frac{8}{5}t - 3) \quad \text{解得 } t_1 = 0 \text{ (舍去)}, t_2 = \frac{145}{64}$$

$$3 - \frac{8}{5}t = 3 - \frac{8}{5} \times \frac{145}{64} = -\frac{5}{8}, -\frac{4}{5}t = -\frac{4}{5} \times \frac{145}{64} = -\frac{29}{16} \therefore D(-\frac{5}{8}, -\frac{29}{16})$$

(2014 娄底)

解 (1) 依题意:  $x_1 + x_2 = -m$ ,  $x_1 x_2 = m - 1$ ,  $\therefore x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 7$ ,  $\therefore (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 7$ ,  $\therefore (-m)^2 - (m - 1) = 7$ , 即  $m^2 - m - 6 = 0$ , 解得  $m_1 = -2$ ,  $m_2 = 3$ ,  $\therefore c = m - 1 < 0$ ,  $\therefore m = 3$  不合题意  $\therefore m = -2$  抛物线的解析式是  $y = x^2 - 2x - 3$ ;

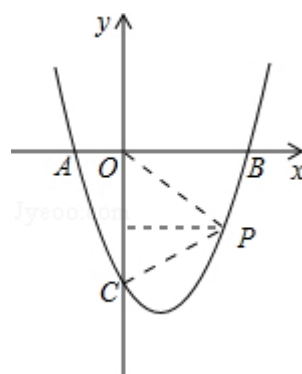
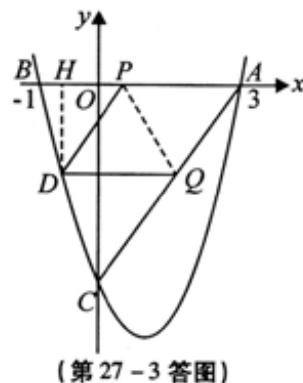
(2) 能如图, 设  $p$  是抛物线上的一点, 连接  $PO$ ,  $PC$ , 过点  $P$  作  $y$  轴的垂线, 垂足为  $D$ . 若  $\angle POC = \angle PCO$  则  $PD$  应是线段  $OC$  的垂直平分线  $\therefore C$  的坐标为  $(0, -3)$   $\therefore D$  的坐标为  $(0, -\frac{3}{2})$

$$\therefore P \text{ 的纵坐标应是 } -\frac{3}{2} \text{ 令 } x^2 - 2x - 3 = -\frac{3}{2}, \text{ 解得, } x_1 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

因此所求点  $P$  的坐标是  $(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}, -\frac{3}{2})$ ,  $(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}, -\frac{3}{2})$

(2014 年淄博)

(1) 以  $AB$  为边, 在第一象限内作等边三角形  $ABC$ , 以点  $C$  为圆心,  $AC$  为半径作  $\odot C$ , 交  $y$  轴于点  $P_1$ 、 $P_2$ . 在优弧  $AP_1B$  上任取一点  $P$ , 如图 1, 则  $\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$ .  $\therefore$  使  $\angle APB = 30^\circ$  的点  $P$  有无数个. 故答案为: 无数.



(2) ①当点 P 在 y 轴的正半轴上时, 过点 C 作  $CG \perp AB$ , 垂足为 G, 如图 1.  $\because$  点 A (1, 0), 点 B (5, 0),  $\therefore OA=1, OB=5. \therefore AB=4. \therefore$  点 C 为圆心,  $CG \perp AB, \therefore AG=BG=\frac{1}{2}AB=2. \therefore OG=OA+AG=3.$

$\because \triangle ABC$  是等边三角形,  $\therefore AC=BC=AB=4. \therefore CG=\sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$

$\therefore$  点 C 的坐标为  $(3, 2\sqrt{3})$ . 过点 C 作  $CD \perp y$  轴, 垂足为 D, 连接  $CP_2$ , 如图 1,  $\because$  点 C 的坐标为  $(3, 2\sqrt{3}), \therefore CD=3, OD=2\sqrt{3}.$

$\because P_1, P_2$  是  $\odot C$  与 y 轴的交点,  $\therefore \angle AP_1B = \angle AP_2B = 30^\circ.$

$\because CP_2=CA=4, CD=3, \therefore DP_2=\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}. \because$  点 C 为圆心,  $CD \perp P_1P_2,$

$\therefore P_1D=P_2D=\sqrt{7}. \therefore P_2(0, 2\sqrt{3} - \sqrt{7}). P_1(0, 2\sqrt{3} + \sqrt{7}).$

②当点 P 在 y 轴的负半轴上时, 同理可得:  $P_3(0, -2\sqrt{3} - \sqrt{7}). P_4(0, -2\sqrt{3} + \sqrt{7}).$

综上所述: 满足条件的点 P 的坐标有:  $(0, 2\sqrt{3} - \sqrt{7})$ 、 $(0, 2\sqrt{3} + \sqrt{7})$ 、 $(0, -2\sqrt{3} - \sqrt{7})$ 、 $(0, -2\sqrt{3} + \sqrt{7}).$

(3) 当过点 A、B 的  $\odot E$  与 y 轴相切于点 P 时,  $\angle APB$  最大.

①当点 P 在 y 轴的正半轴上时, 连接 EA, 作  $EH \perp x$  轴, 垂足为 H, 如图 2.  $\because \odot E$  与 y 轴相切于点 P,

$\therefore PE \perp OP. \because EH \perp AB, OP \perp OH, \therefore \angle EPO = \angle POH = \angle EHO = 90^\circ. \therefore$  四边形 OPEH 是矩形.

$\therefore OP=EH, PE=OH=3. \therefore EA=3. \because \angle EHA=90^\circ, AH=2, EA=3, \therefore EH=\sqrt{EA^2 - AH^2}$

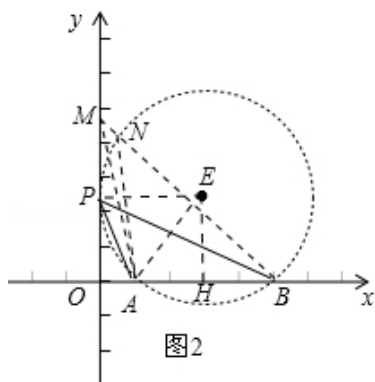
$=\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}. \therefore OP=\sqrt{5}. \therefore P(0, \sqrt{5}).$  ②当点 P 在 y 轴的负半轴上时, 同理可得:  $P(0, -\sqrt{5}).$

理由: ①若点 P 在 y 轴的正半轴上, 在 y 轴的正半轴上任取一点 M (不与点 P 重合), 连接 MA, MB, 交  $\odot E$  于点 N, 连接 NA, 如图 2 所示.  $\because \angle ANB$  是  $\triangle AMN$  的外角,

$\therefore \angle ANB > \angle AMB. \because \angle APB = \angle ANB, \therefore \angle APB > \angle AMB.$  ②若点 P 在 y 轴的负半轴上,

同理可证得:  $\angle APB > \angle AMB.$  综上所述: 当点 P 在 y 轴上移动时,  $\angle APB$  有最大值,

此时点 P 的坐标为  $(0, \sqrt{5})$  和  $(0, -\sqrt{5}).$

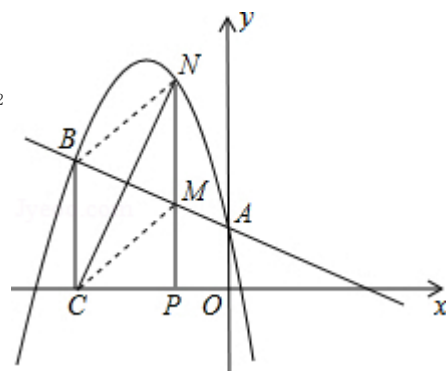


解：(1) 由题设可知 A (0, 1), B (-3,  $\frac{5}{2}$ ), 根据题意得：
 
$$\begin{cases} c=1 \\ 9a-3b+c=\frac{5}{2} \\ a-b+c=4 \end{cases}$$
 解得：
 
$$\begin{cases} a=-\frac{5}{4} \\ b=-\frac{17}{4} \\ c=1 \end{cases}$$

则二次函数的解析式是：
 
$$y = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + 1;$$

(2) 设 N (x,  $-\frac{5}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + 1$ ), 则 M、P 点的坐标分别是 (x,  $-\frac{1}{2}x + 1$ ), (x, 0).  $\therefore MN = PN - PM = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + 1 - (-\frac{1}{2}x + 1) = -\frac{5}{4}x^2 - \frac{15}{4}x = -\frac{5}{4}(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{45}{16}$ , 则当  $x = -\frac{3}{2}$  时, MN 的最大值为  $\frac{45}{16}$ ;

(3) 连接 MN、BN、BM 与 NC 互相垂直平分, 即四边形 BCMN 是菱形, 由于 BC // MN, 即 MN=BC, 且 BC=MC, 即  $-\frac{5}{4}x^2 - \frac{15}{4}x = \frac{5}{2}$ , 且  $(-\frac{1}{2}x + 1)^2 + (x + 3)^2 = \frac{25}{4}$ , 解得：x=1, 故当 N (-1, 4) 时,



MN 和 NC 互相垂直平分.

(2014•四川内江, 第 28 题, 12 分)

解：(1) 如图 1,  $\because A(-3, 0), C(0, 4), \therefore OA=3, OC=4$ .

$\because \angle AOC=90^\circ, \therefore AC=5. \because BC \parallel AO, AB$  平分  $\angle CAO, \therefore \angle CBA=\angle BAO=\angle CAB. \therefore BC=AC$ .

$\therefore BC=5. \because BC \parallel AO, BC=5, OC=4, \therefore$  点 B 的坐标为 (5, 4).  $\because A(-3, 0), C(0, 4), B$

(5, 4) 在抛物线  $y=ax^2+bx+c$  上,  $\therefore \begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ c=4 \\ 25a+5b+c=4 \end{cases}$  解得：
 
$$\begin{cases} a=-\frac{1}{6} \\ b=\frac{5}{6} \\ c=4 \end{cases}$$
 $\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 4$ .

$x^2+x+4$ .

(2) 如图 2, 设直线 AB 的解析式为  $y=mx+n$ ,  $\because A(-3, 0), B(5, 4)$  在直线 AB 上,  $\therefore$

$$\begin{cases} -3m+n=0 \\ 5m+n=4 \end{cases}$$

解得：
 
$$\begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=\frac{3}{2} \end{cases}$$
 $\therefore$  直线 AB 的解析式为  $y=x+1$ . 设点 P 的横坐标为 t ( $-3 \leq t \leq 5$ ), 则点 Q 的横坐标也为 t.

标也为 t.

$\therefore y_P=t+1, y_Q=-\frac{1}{6}t^2+\frac{5}{6}t+4. \therefore PQ=y_Q-y_P=-\frac{1}{6}t^2+\frac{5}{6}t+4-(t+1)=-\frac{1}{6}t^2+\frac{5}{6}t+4-t-1=-\frac{1}{6}t^2+\frac{5}{6}t+3-(t^2-2t-15)=-\frac{1}{6}[(t-1)^2-16]=-\frac{1}{6}(t-1)^2+2\frac{2}{3}$ .  $\because -\frac{1}{6}<0, -3 \leq t \leq 5, \therefore$  当  $t=1$  时, PQ 取到最大值, 最大值为  $2\frac{2}{3}$ .  $\therefore$  线段 PQ 的最大值为  $2\frac{2}{3}$ .

(3) ①当 $\angle BAM=90^\circ$ 时,如图3所示.

$$\text{抛物线的对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{5}{6}}{2 \times (-\frac{1}{6})} = \frac{5}{2}. \therefore x_H = x_G = x_M = \frac{5}{2}. \therefore y_G = \frac{11}{4}. \therefore GH = \frac{11}{4}.$$

$\because \angle GHA = \angle GAM = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle MAH = 90^\circ - \angle GAH = \angle AGM$ .  $\because \angle AHG = \angle MHA = 90^\circ$ ,  $\angle MAH = \angle AGM$ ,

$$\therefore \triangle AHG \sim \triangle MHA. \therefore \frac{GH}{AH} = \frac{AH}{MH}. \therefore \frac{\frac{11}{4}}{\frac{5}{2} - (-3)} = \frac{\frac{5}{2} - (-3)}{MH}. \text{解: } MH = 11. \therefore \text{点 M 的坐标为}$$

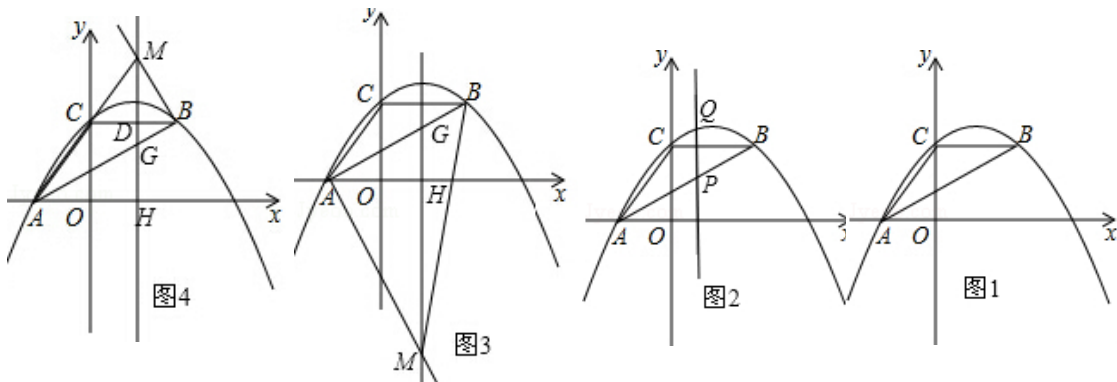
$(\frac{5}{2}, -11)$ . ②当 $\angle ABM=90^\circ$ 时,如图4所示.  $\because \angle BDG=90^\circ$ ,  $BD=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$ ,  $DG=4-\frac{11}{4}=\frac{5}{4}$ ,  $\therefore BG=$

$$\sqrt{BD^2 + DG^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (\frac{5}{4})^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}. \text{同理: } AG = \frac{11\sqrt{5}}{4}. \because \angle AGH = \angle MGB, \angle AHG = \angle MBG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AGH \sim \triangle MGB. \therefore \frac{AG}{MG} = \frac{GH}{GB}. \therefore \frac{\frac{11\sqrt{5}}{4}}{MG} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{4}}. \text{解得: } MG = \frac{25}{4}. \therefore MH = MG + GH = \frac{25}{4} + \frac{11}{4} = 9.$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为  $(\frac{5}{2}, 9)$ . 综上所述: 符合要求的点 M 的坐标为  $(\frac{5}{2}, 9)$  和  $(\frac{5}{2}, -11)$ .



(2014 宜宾市) 解: (1)  $\because$  抛物线  $y=x^2+bx+c$  的顶点坐标为  $M(0, -1)$ ,  $\therefore b=0, c=-1$ ,  $\therefore$  抛物线的解析式为:  $y=x^2-1$ .

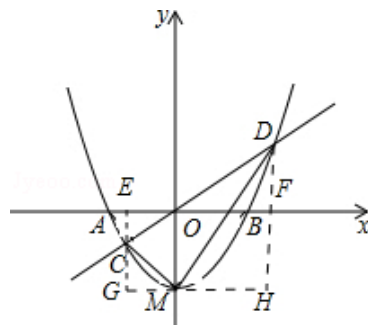
(2)  $\triangle MAB$  是等腰直角三角形, 由抛物线的解析式为:  $y=x^2-1$  可知  $A(-1, 0), B(1, 0)$ ,  $\therefore OA=OB=OC=1$ ,

$\therefore \angle AMO = \angle MAO = \angle BMO = \angle BOM = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle AMB = \angle AMO + \angle BMO = 90^\circ$ .  $\because y$  轴是对称轴,  $\therefore A, B$  为对称点,  $\therefore AM=BM$ ,  $\therefore \triangle MAB$  是等腰直角三角形.

(3)  $MC \perp MF$ ; 分别过  $C$  点,  $D$  点作  $y$  轴的平行线, 交  $x$  轴于

$E, F$ , 过  $M$  点作  $x$  轴的平行线交  $EC$  于  $G$ , 交  $DF$  于  $H$ , 设  $D(m, m^2-1), C(n, n^2-1)$ ,



$$\therefore OE = -n, CE = 1 - n^2, OF = m, DF = m^2 - 1, \because OM = 1,$$

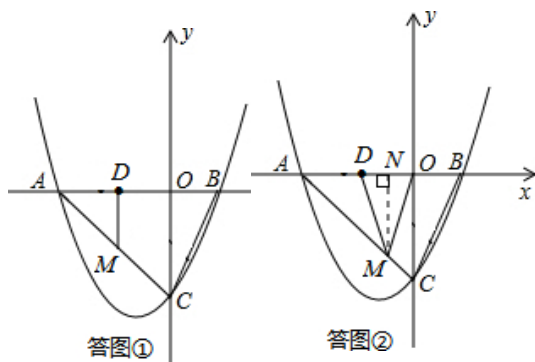
$$\therefore CG = n^2, DH = m^2, \because FG \parallel DH,$$

$$\therefore \frac{EC}{DF} = \frac{OE}{OF}, \text{ 即 } \frac{1 - n^2}{m^2 - 1} = \frac{-n}{m} \text{ 解得 } m = -\frac{1}{n}, \therefore \frac{CG}{GM} = \frac{n^2}{-n} = -n,$$

$$\frac{MH}{FH} = \frac{m}{m^2 - 1}, \therefore \frac{CG}{GM} = \frac{MH}{FH}, \because \angle CGM = \angle MHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CGM \sim \triangle MHD, \therefore \angle CMG = \angle MDH,$$

$$\because \angle MDH + \angle DMH = 90^\circ \therefore \angle CMG + \angle DMH = 90^\circ, \therefore \angle CMD = 90^\circ, \text{ 即 } MC \perp MF.$$



(2013·泰安)解:(1)把点  $C(0, -4), B(2, 0)$  分别代入  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  中, 得 
$$\begin{cases} c = -4 \\ \frac{1}{2} \times 2^2 + 2b + c = 0 \end{cases},$$

解得  $\begin{cases} b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$ .  $\therefore$  该抛物线的解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ . (2) 令  $y = 0$ , 即  $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$ , 解得  $x_1 = -4$ ,

$x_2 = 2, \therefore A(-4, 0), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 12$ . 设  $P$  点坐标为  $(x, 0)$ , 则  $PB = 2 - x$ .  $\because PE \parallel AC, \therefore \angle$

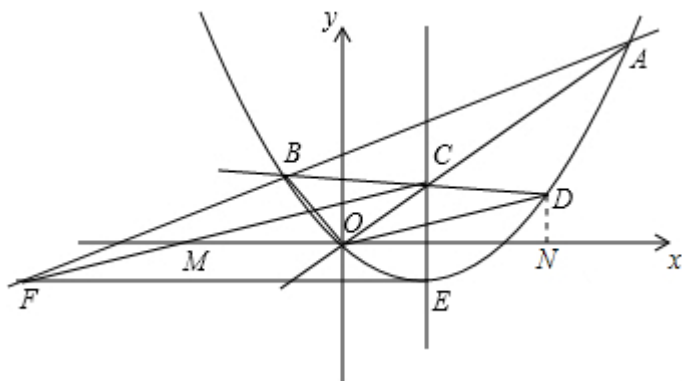
$BPE = \angle BAC, \angle BEP = \angle BCA, \therefore \triangle PBE \sim \triangle ABC, \therefore \frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{PB}{AB}\right)^2$ , 即  $\frac{S_{\triangle PBE}}{12} = \left(\frac{2-x}{6}\right)^2$ , 化简得:

$$S_{\triangle PBE} = \frac{1}{3}(2-x)^2. S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PCB} - S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2}PB \cdot OC - S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} \times (2-x) \times 4 - \frac{1}{3}(2-x)^2 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}(x+1)^2 + 3. \therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } S_{\triangle PCE} \text{ 的最大值为 } 3.$$

(3)  $\triangle OMD$  为等腰三角形, 可能有三种情形: (I) 当  $DM = DO$  时, 如答图①所示.  $DO = DM = DA = 2$ ,  $\therefore \angle OAC = \angle AMD = 45^\circ, \therefore \angle ADM = 90^\circ, \therefore M$  点的坐标为  $(-2, -2)$ ; (II) 当  $MD = MO$  时, 如答图②所示. 过点  $M$  作  $MN \perp OD$  于点  $N$ , 则点  $N$  为  $OD$  的中点,  $\therefore DN = ON = 1, AN = AD + DN = 3$ , 又  $\triangle AMN$  为等腰直角三角形,  $\therefore MN = AN = 3, \therefore M$  点的坐标为  $(-1, -3)$ ; (III) 当  $OD = OM$  时,  $\because \triangle OAC$  为

等腰直角三角形,  $\therefore$  点  $O$  到  $AC$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$ , 即  $AC$  上的点与点  $O$  之间的最小距离

为  $2\sqrt{2}$ .  $\because 2\sqrt{2} > 2, \therefore OD = OM$  的情况不存在. 综上所述, 点  $M$  的坐标为  $(-2, -2)$  或  $(-1, -3)$ .



(2013•威海)解:(1)由直线  $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$  与直

$$\text{线 } y=x \text{ 交于点 } A, \text{ 得 } \begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases},$$

$\therefore$  点 A 的坐标是 (3, 3).  $\because \angle BOA=90^\circ$ ,  $\therefore OB \perp OA$ ,  $\therefore$  直线 OB 的解析式为  $y=-x$ . 又  $\because$

$$\text{点 B 在直线 } y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \text{ 上, } \therefore \begin{cases} y=-x \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解}$$

得,  $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ ,  $\therefore$  点 B 的坐标是 (-1, 1). 综上所述, 点 A、B 的坐标分别为 (3, 3), (-1, 1).

(2) 由 (1) 知, 点 A、B 的坐标分别为 (3, 3), (-1, 1).  $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx+c$  过点 A,

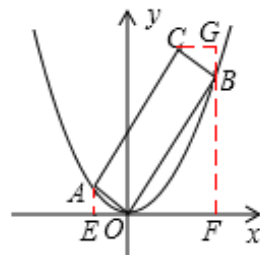
$$O, B, \therefore \begin{cases} 9a+3b+c=3 \\ c=0 \\ a-b+c=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}, \therefore \text{ 该抛物线的解析式为 } y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x, \text{ 或 } y=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{8}.$$

$\therefore$  顶点 E 的坐标是  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ ; (3) OD 与 CF 平行. 理由如下: 由 (2) 知, 抛物线的对

称轴是  $x=\frac{1}{2}$ .  $\because$  直线  $y=x$  与抛物线的对称轴交于点 C,  $\therefore C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . 设

直线 BC 的表达式为  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ), 把 B (-1, 1),  $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  代入,

$$\text{得 } \begin{cases} -k+b=12 \\ \frac{1}{2}k+b=\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}, \therefore \text{ 直线 BC 的解析式为 } y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}. \therefore \text{ 直线}$$



BC 与抛物线交于点 B、D,  $\therefore -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$ , 解得,  $x_1=\frac{4}{3}$ ,  $x_2=-1$ . 把  $x_1=\frac{4}{3}$  代入  $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ , 得  $y_1=\frac{2}{9}$ ,  $\therefore$  点 D 的坐标是  $(\frac{4}{3}, \frac{2}{9})$ . 如图, 作  $DN \perp x$  轴于点 N. 则  $\tan \angle DON = \frac{DN}{ON} = \frac{1}{6}$ .  $\because$

$FE \parallel x$  轴, 点 E 的坐标为  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ .  $\therefore$  点 F 的纵坐标是  $-\frac{1}{8}$ . 把  $y=-\frac{1}{8}$  代入  $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ , 得  $x=-\frac{13}{4}$ ,  $\therefore$  点 F 的坐标是  $(-\frac{13}{4}, -\frac{1}{8})$ ,  $\therefore EF = \frac{1}{2} + \frac{13}{4} = \frac{15}{4}$ .  $\because CE = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ ,  $\therefore \tan \angle CFE = \frac{CE}{EF} = \frac{1}{6}$ ,

$\therefore \angle CFE = \angle DON$ . 又  $\because FE \parallel x$  轴,  $\therefore \angle CMN = \angle CFE$ .  $\therefore \angle CMN = \angle DON$ ,  $\therefore OD \parallel CF$ , 即 OD 与 CF 平行.

(2012 浙江丽水 10 分)

解：(1)  $-1$ 。

(2) ①过点  $A$  作  $AE \perp x$  轴于点  $E$ ，过点  $B$  作  $BF \perp x$  轴于点  $F$ ，当  $x = -\frac{1}{2}$  时， $y = (-\frac{1}{2})^2 =$

$\frac{1}{4}$ ，即  $OE = \frac{1}{2}$ ， $AE = \frac{1}{4}$ 。∵  $\angle AOE + \angle BOF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

$\angle AOE + \angle EAO = 90^\circ$ ，∴  $\angle EAO = \angle BOF$ 。又∵  $\angle AEO = \angle BFO = 90^\circ$ ，

∴  $\triangle AEO \sim \triangle OFB$ 。∴  $\frac{OF}{BF} = \frac{AE}{EO} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ 。设  $OF = t$ ，则  $BF = 2t$ ，∴  $t^2 =$

$2t$ ，解得： $t_1 = 0$  (舍去)， $t_2 = 2$ 。∴ 点  $B(2, 4)$ 。

②过点  $C$  作  $CG \perp BF$  于点  $G$ ，∵  $\angle AOE + \angle EAO = 90^\circ$ ， $\angle FBO + \angle CBG = 90^\circ$ ， $\angle EAO = \angle FBO$ ，∴  $\angle EAO = \angle CBG$ 。在  $\triangle AEO$  和  $\triangle BGC$  中， $\angle AEO = \angle G = 90^\circ$ ， $\angle EAO = \angle CBG$ ， $AO = BC$ ，

∴  $\triangle AEO \cong \triangle BGC (AAS)$ 。∴  $CG = OE = \frac{1}{2}$ ， $BG = AE = \frac{1}{4}$ 。∴  $x_c = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ， $y_c = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ 。∴

点  $C(\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$ 。∵ 当  $x = \frac{3}{2}$  时， $y = -(\frac{3}{2})^2 + 3 \times \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{4}$ ，∴ 点  $C$  也在此抛物线上。∴ 经

过  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的抛物线解析式为  $y = -x^2 + 3x + 2 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{17}{4}$ 。平移方案：先将抛物

线  $y = -x^2$  向右平移  $\frac{3}{2}$  个单位，再向上平移  $\frac{17}{4}$  个单位得到抛物线  $y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{17}{4}$ 。

