例　　　　2018 年上海市虹口区中考模拟第 25 题

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle C=90°$，$DC=5$，以 CD 为半径的⊙C 与以 AB 为半径的⊙B 相交于点 E、F，联结 EF 交 BC 于点 G.

（1）设 BC 与⊙C 相交于点 M，当 $BM=AD$ 时，求⊙B 的半径；

（2）设 $BC=x$，$EF=y$，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域；

（3）当 $BC=10$ 时，点 P 为平面内一点，若⊙P 与⊙C 相交于点 D、E，且以 A、E、P、D 为顶点的四边形是梯形，请直接写出⊙P 的面积（结果保留 π）.

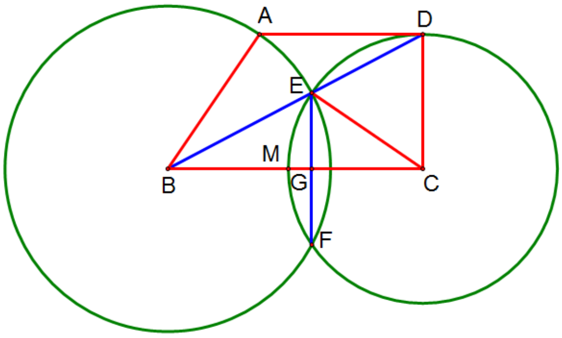

图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 虹口 25”，拖动点 B 运动，可以体验到，△BEG、△CDH 和△BDC 保持相似．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，可以体验到，点 P 在 DE 的垂直平分线上，过△ADE 的每个顶点画对边的平行线，存在三个梯形．

思路点拨

1．第（1）题平行四边形 $ABMD$ 的边 MD 就是等腰直角三角形 DMC 的斜边．

2．第（2）题就是三个相似三角形和两个垂直平分，不断地推算．

3．第（3）题可以精准的画出示意图．因为△DBC 是确定的，先画出圆 C，得到点 E；再得到圆 B；然后得到点 A．

这个图形中所有线段的长都是确定的，特别的，需要计算△ABD 的高 AQ．

4．点 P 在 DE 的垂直平分线 CH 上，过△ADE 的三个顶点分别画对边的平行线，交直线 CH 于点 P．点 P 有三个．

图文解析

（1）如图 2，当 $BM=AD$ 时，由于 $BM//AD$，所以四边形 $ABMD$ 是平行四边形．

因为 $CM=CD=5$，所以 $DM=5\sqrt{2}$．此时⊙B 的半径 $AB=DM=5\sqrt{2}$．

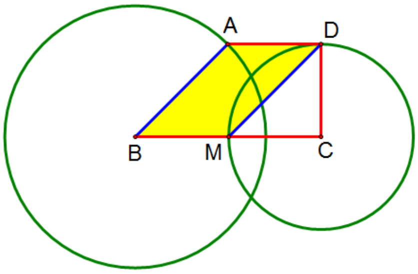

图 2

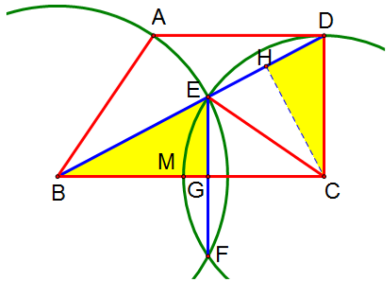

图 3

（2）如图 3，作 $CH\perp DE$，那么弦心距 CH 垂直平分弦 DE.

又因为连心线 BC 垂直平分公共弦 EF，$\angle BCD=90°$，可得$\angle DBC=\angle DCH$.

在 Rt△BCD 中，$CD=5$，$BC=x$，所以 $BD=\sqrt{x^2+25}$.

设 $\sin\angle DBC=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+25}}=m$，那么 $BD=\sqrt{x^2+25}=\dfrac{5}{m}$.

在 Rt△CDH 中，$DH=CD\sin\angle DCH=5m$．所以 $DE=2DH=10m$.

在 Rt△BEG 中，$BE=BD-DE=\dfrac{5}{m}-10m$，$EG=BE\sin\angle DBC$.

所以 $EG=(\dfrac{5}{m}-10m)m=5-10m^2=5-10\times\dfrac{25}{x^2+25}=\dfrac{5x^2-125}{x^2+25}$.

所以 $y=EF=2EG=\dfrac{10x^2-250}{x^2+25}$．定义域是 $x>5\sqrt{3}$.

（3）⊙P 的面积为$\dfrac{25}{4}\pi$，$(29-8\sqrt{5})\pi$，或$(75+30\sqrt{5})\pi$.

考点伸展

定义域中 $x=5\sqrt{3}$ 可以这样计算：梯形 $ABCD$ 的临界位置是矩形 $ABCD$，此时 $BA=DC=5$．由 $BD=BE+ED=BA+2DH$，得 $\sqrt{x^2+25}=5+\dfrac{50}{\sqrt{x^2+25}}$.

整理，得 $x^4=75x^2$．所以 $x=5\sqrt{3}$.

第（3）题的解题过程是这样的：首先确定点 P 在直线 DE 的垂直平分线上（经过点 C）（如图 4 所示），再分三种情况计算 PD^2 或 PE^2（即 r^2）.

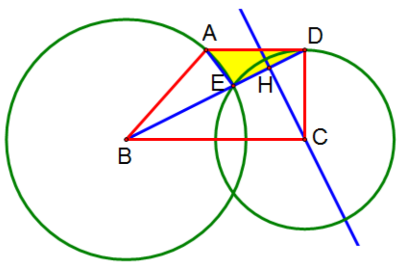

图 4

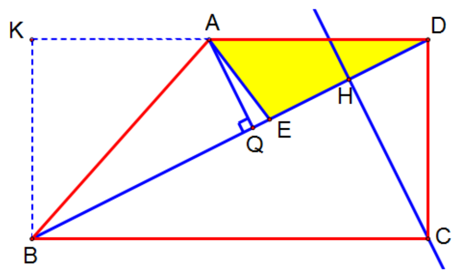

图 5

如图 5，作 $BK\perp AD$，垂足为 K．作 $CH\perp DE$ 于 H．作 $AQ\perp BD$ 于 Q.

在 Rt△BCD 中，$CD=5$，$BC=10$，所以 $BD=5\sqrt{5}$，$\sin\angle DBC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt△CDH 中，$DH=CD\sin\angle DCH=5\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$.

所以 $DE=2\sqrt{5}$，$BE=3\sqrt{5}$.

在 Rt△ABK 中，$BA=BE=3\sqrt{5}$，$BK=5$，所以 $AK=2\sqrt{5}$.

在 Rt△ADQ 中，$AD=10-2\sqrt{5}$，所以 $AQ=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(10-2\sqrt{5})=2\sqrt{5}-2$.

所以 $DQ=2AQ=4\sqrt{5}-4$．所以 $EQ=DQ-DE=4\sqrt{5}-4-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}-4$.

下面，分三种情况讨论．如图 6 所示，过△ADE 的每个顶点，分别画对边的平行线与直线 CH 交于点 P，然后求 PD^2 或 PE^2（即 r^2）.

①当 $P_1E//AD$ 时，在 Rt△P_1EH 中，由 $\dfrac{HE}{P_1E}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，得 $P_1E=\dfrac{\sqrt{5}}{2}EH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}$.

此时⊙P 的面积为 $\dfrac{25}{4}\pi$.

②当 $P_2A//DE$ 时，四边形 P_2AQH 是矩形.

在 Rt△P_2EH 中，$EH=\sqrt{5}$，$P_2H=AQ=2\sqrt{5}-2$，所以 $P_2E^2=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5}-2)^2=29-8\sqrt{5}$．此时⊙$P$ 的面积为 $(29-8\sqrt{5})\pi$.

③当 $P_3D//AE$ 时，$\dfrac{DH}{P_3H}=\dfrac{EQ}{AQ}=\dfrac{2\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}-2}$．所以 $P_3H=\dfrac{\sqrt{5}(2\sqrt{5}-2)}{2\sqrt{5}-4}=5+3\sqrt{5}$.

在 Rt△P_3DH 中，$P_3D^2=(\sqrt{5})^2+(5+3\sqrt{5})^2=75+30\sqrt{5}$.

此时⊙P 的面积为 $(75+30\sqrt{5})\pi$.

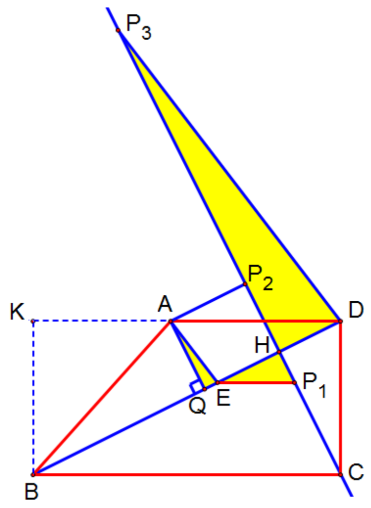

图 6