例　　　　2018 年上海市虹口区中考模拟第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-2x+c$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 分别交于 x 轴、y 轴上的 B、C 两点，抛物线的顶点为 D，联结 CD 交 x 轴于点 E.

（1）求抛物线的解析式及点 D 的坐标；

（2）求 $\tan\angle BCD$；

（3）点 P 在直线 BC 上，若 $\angle PEB=\angle BCD$，求点 P 的坐标.

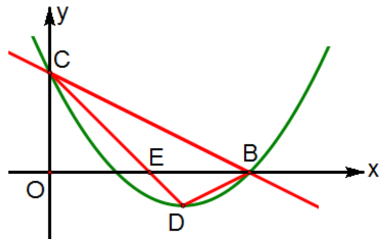

图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 虹口 24”，可以体验到，符合 $\angle PEB=\angle BCD$ 的点 P 存在两种情况.

思路点拨

1．作△BCD 的高 BH，隐含了△COE 和△BEH 是等腰直角三角形.

2．如果 $\angle PEB=\angle BCD$，那么可以先通过作图找到点 P 的两个位置，再通过计算精准定位.

图文解析

（1）由 $y=-\frac{1}{2}x+3$，得 $B(6, 0)$，$C(0, 3)$.

将 $B(6, 0)$、$C(0, 3)$两点分别代入 $y=ax^2-2x+c$，得 $\begin{cases}36a-12+c=0,\\ c=3.\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{4}$，$c=3$．所以 $y=\frac{1}{4}x^2-2x+3=\frac{1}{4}(x-4)^2-1$．顶点为 $D(2,-1)$

（2）由 $C(0, 3)$、$D(2,-1)$，可知 C、D 两点间的水平距离和竖直距离都是 4.

所以 $\angle CEO=45°$，$OE=OC=3$，$CE=3\sqrt{2}$.

如图 2，过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 H，那么△BEH 是等腰直角三角形.

由 $BE=3$，得 $BH=EH=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

所以 $CH=CE+EH=3\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

在 Rt△BCH 中，$\tan\angle BCD=\frac{BH}{CH}=\frac{1}{3}$.

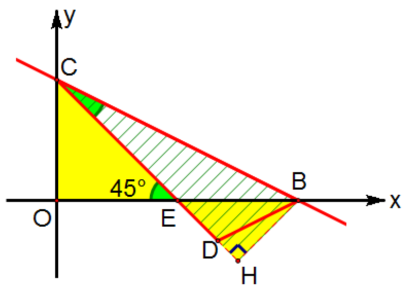

图 2

（3）如图 3，设点 P 的坐标为 $(x,-\frac{1}{2}x+3)$．作 $PM\perp x$ 轴于 M.

由 $\tan\angle PEB=\tan\angle BCD=\frac{1}{3}$，得 $\frac{PM}{EM}=\frac{1}{3}$．所以 $PM=\frac{1}{3}EM$.

①当点 P 在 x 轴上方时，$-\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{3}(x-3)$．解得 $x=\frac{24}{5}$．此时 $P(\frac{24}{5},\frac{3}{5})$．

②当点 P 在 x 轴下方时，$\frac{1}{2}x-3=\frac{1}{3}(x-3)$．解得 $x=12$．此时 $P(12,-3)$．

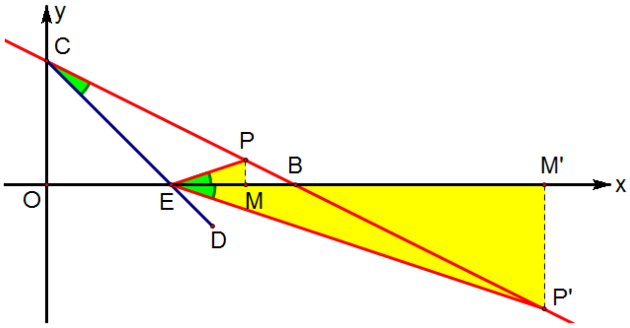

图 3

考点伸展

第（2）题解法多样，这里再介绍两种．

如图 4，由 $B(6, 0)$、$C(0, 3)$、$D(2,-1)$，可知 $\tan\angle CBO=\tan\angle DBO=\frac{1}{2}$．

所以 BO 是 $\angle CBD$ 的平分线．所以点 D 关于 x 轴的对称点 $F(2, 1)$落在直线 BC 上．

由于 $\angle CEO=45°$，所以 $\angle DEF=90°$．于是 $\tan\angle BCD=\frac{FE}{CE}=\frac{DE}{CE}=\frac{1}{3}$．

如图 5，由 $B(6, 0)$、$C(0, 3)$、$D(2,-1)$，可知 $BC=3\sqrt{5}$，$CD=4\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{5}$．

作 $DN\perp BC$ 于 N．设 $CN=m$，那么 $BN=3\sqrt{5}-m$．

由勾股定理，得 $CD^2-CN^2=BD^2-BN^2$．所以 $(4\sqrt{2})^2-m^2=(\sqrt{5})^2-(3\sqrt{5}-m)^2$．

解得 $m=\frac{12}{5}\sqrt{5}$．所以 $DN^2=(4\sqrt{2})^2-m^2=32-\frac{144}{5}=\frac{16}{5}$．

所以 $DN=\frac{4}{5}\sqrt{5}$．于是 $\tan\angle BCD=\frac{DN}{CN}=\frac{1}{3}$．

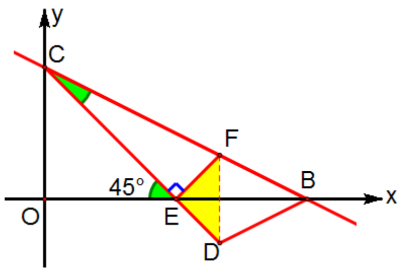

图 4

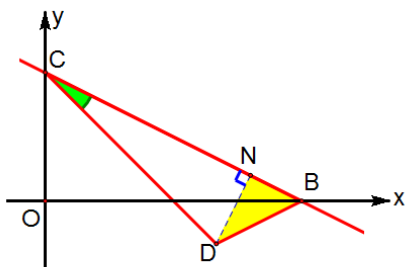

图 5