

挑战中考数学 压轴题

2018 年上海市各区中考数学一模压轴题 图文解析、视频直播

由《挑战中考数学压轴题》的作者

马学斌老师领衔

上海交大昂立教育中学数学教师团队、

华东师范大学出版社挑战压轴题项目组

制作

参加解题的@昂立中学生老师有

林 军 赵 松 石 雷 刘慧玲 沈诗聪 赵灵娇 夏 林 李丹阳
史海啸 段景阳 王秋实 陆小红 黎继奎 吴 倩 庸 圆 赫 鹏
沈云彪 耿 灏 于 浩 郑志平 李宗亮 杨 旭 卞 婕 何安然
汪 辉 赵亚萍 卓廷蓉 王 乔 李 岩 胡 芮 王 丽 徐冉冉
付岩岩 轩春之 徐 颖 蔡向楠 赵逸雯 俞雄彬 邵 明

感 谢

瑞聪网络 提供直播支持

瑞聪网络 <http://www.rcwl.net>

智慧校园解决方案提供商

创先泰克教育云 提供视频直播

2018 年上海市各区中考数学一模压轴题图文解析 目录

第 24、25 题图文解析

例	2018 年上海市崇明县中考一模第 24、25 题	/ 3
例	2018 年上海市奉贤区中考一模第 24、25 题	/ 7
例	2018 年上海市虹口区中考一模第 24、25 题	/ 11
例	2018 年上海市黄浦区中考一模第 24、25 题	/ 16
例	2018 年上海市嘉定区中考一模第 24、25 题	/ 19
例	2018 年上海市金山区中考一模第 24、25 题	/ 23
例	2018 年上海市静安区中考一模第 24、25 题	/ 26
例	2018 年上海市闵行区中考一模第 24、25 题	/ 30
例	2018 年上海市浦东新区中考一模第 24、25 题	/ 34
例	2018 年上海市普陀区中考一模第 24、25 题	/ 38
例	2018 年上海市青浦区中考一模第 24、25 题	/ 42
例	2018 年上海市松江区中考一模第 24、25 题	/ 45
例	2018 年上海市徐汇区中考一模第 24、25 题	/ 49
例	2018 年上海市杨浦区中考一模第 24、25 题	/ 52
例	2018 年上海市长宁区中考一模第 24、25 题	/ 56
例	2018 年上海市宝山区中考一模第 24、25 题	/ 60

第 18 题图文解析

例	2018 年上海市崇明县中考一模第 18 题	/ 65
例	2018 年上海市奉贤区中考一模第 18 题	/ 66
例	2018 年上海市虹口区中考一模第 18 题	/ 67
例	2018 年上海市黄浦区中考一模第 18 题	/ 68
例	2018 年上海市嘉定区中考一模第 18 题	/ 69
例	2018 年上海市金山区中考一模第 18 题	/ 70
例	2018 年上海市静安区中考一模第 18 题	/ 71
例	2018 年上海市闵行区中考一模第 18 题	/ 72
例	2018 年上海市浦东新区中考一模第 18 题	/ 73
例	2018 年上海市普陀区中考一模第 18 题	/ 74
例	2018 年上海市青浦区中考一模第 18 题	/ 75
例	2018 年上海市松江区中考一模第 18 题	/ 76
例	2018 年上海市徐汇区中考一模第 18 题	/ 77
例	2018 年上海市杨浦区中考一模第 18 题	/ 78
例	2018 年上海市长宁区中考一模第 18 题	/ 79
例	2018 年上海市宝山区中考一模第 18 题	/ 80

例 2018 年上海市崇明区中考一模第 24 题

如图，抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 。 $M(m, 0)$ 为线段 OA 上一个动点（点 M 与点 A 不重合），过点 M 作垂直于 x 轴的直线与直线 AB 和抛物线分别交于点 P 、 N 。

- (1) 求直线 AB 的解析式和抛物线的解析式；
- (2) 如果点 P 是 MN 的中点，那么求此时点 N 的坐标；
- (3) 如果以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似，求点 M 的坐标。

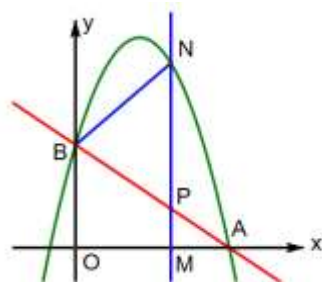
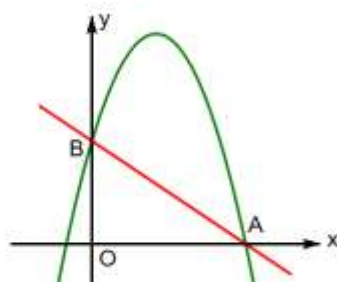


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 崇明一模 24”，拖动点 M 在线段 OA 上运动，可以体验到， $\triangle BPN$ 可以两次成为直角三角形。

图文解析

(1) 由 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 2)$ ，得直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 。

由 $A(3, 0)$ 设抛物线的解析式为 $y = -\frac{4}{3}(x-3)(x-x_2)$ ，代入点 $B(0, 2)$ ，得 $-4x_2 = 2$ 。

所以 $x_2 = -\frac{1}{2}$ 。所以 $y = -\frac{4}{3}(x-3)(x+\frac{1}{2}) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2$ 。

(2) 如果点 P 是 MN 的中点，那么 $NM = 2PM$ 。所以 $y_N = 2y_P$ 。

由于 $M(m, 0)$ ，所以 $P(m, -\frac{2}{3}m + 2)$ ， $N(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2)$ 。

解方程 $-\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2 = 2(-\frac{2}{3}m + 2)$ ，整理，得 $2m^2 - 7m + 3 = 0$ 。

解得 $m = \frac{1}{2}$ ，或 $m = 3$ （与点 A 重合，舍去）。

所以点 N 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{10}{3})$ （如图 2 所示）。

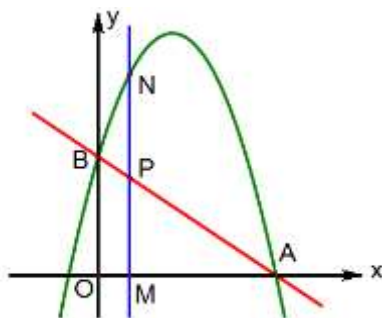


图 2

(3) 因为 $\triangle APM$ 是直角三角形, 如果 $\triangle BPN$ 与 $\triangle APM$ 相似, 那么 $\triangle BPN$ 也是直角三角形.

由于 $\angle BPN = \angle APM = \angle ABO$ 为定值, 所以存在两种情况:

①如图 3, 当 $\angle BNP = 90^\circ$ 时, $BN \parallel x$ 轴. 所以 $y_N = y_B = 2$.

解方程 $-\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2 = 2$, 得 $m = \frac{5}{2}$, 或 $m = 0$ (舍去). 此时 $M(\frac{5}{2}, 0)$.

②如图 4, 当 $\angle NBP = 90^\circ$ 时, 作 $NH \perp y$ 轴于 H , 那么 $\triangle NHB \sim \triangle BOA$.

所以 $\frac{NH}{BH} = \frac{BO}{AO} = \frac{2}{3}$. 所以 $NH = \frac{2}{3}BH$.

解方程 $m = \frac{2}{3}(-\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m)$, 得 $m = \frac{11}{8}$, 或 $m = 0$ (舍去). 此时 $M(\frac{11}{8}, 0)$.

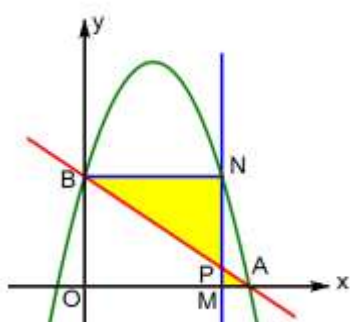


图3

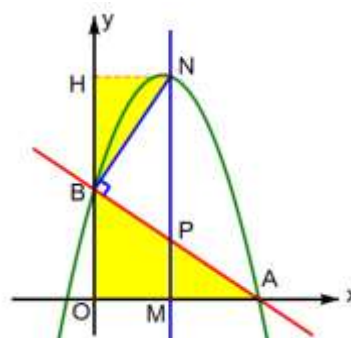


图4

例 2018 年上海市崇明区中考一模第 25 题

如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=8$ ， $\cos A=\frac{4}{5}$ ， D 是 AB 边的中点， E 是 AC 边上一点，联结 DE ，过点 D 作 $DF\perp DE$ 交 BC 边于点 F ，联结 EF 。

(1) 如图 1，当 $DE\perp AC$ 时，求 EF 的长；

(2) 如图 2，当点 E 在 AC 边上移动时， $\angle DFE$ 的正切值是否会发生变化，如果变化请说出变化情况；如果保持不变，请求出 $\angle DFE$ 的正切值；

(3) 如图 3，联结 CD 交 EF 于点 Q ，当 $\triangle CQF$ 是等腰三角形时，请直接写出 BF 的长。

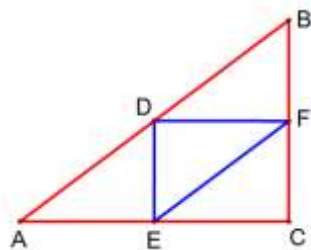


图 1

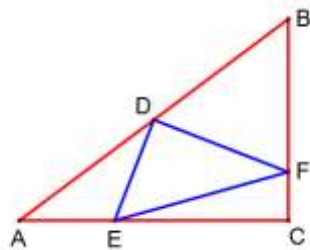


图 2

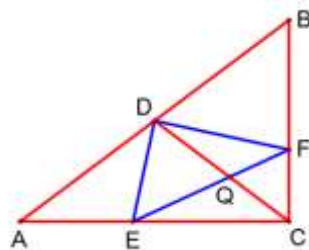


图 3

动感体验

请打开几何画板文件名“18 崇明一模 25”，拖动点 E 运动，可以体验到， $\triangle CQF$ 有三次机会成为等腰三角形。

图文解析

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=8$ ， $\cos A=\frac{4}{5}$ ，所以 $AB=10$ ， $BC=6$ 。

当 $DE\perp AC$ 时，四边形 $DECF$ 是矩形。此时 $DE\parallel BC$ ， $DF\parallel AC$ 。

因为 D 是 AB 的中点，所以 E 是 AC 的中点， F 是 BC 的中点。

所以 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $EF=\frac{1}{2}AB=5$ 。

(2) 如图 4，作 $DM\perp BC$ 于 M ，作 $DN\perp AC$ 于 N 。

由于 $\angle EDF=\angle NDM=90^\circ$ ，所以 $\angle EDN=\angle FDM$ 。

所以 $\triangle EDN\sim\triangle FDM$ 。所以 $\frac{DE}{DF}=\frac{DN}{DM}=\frac{3}{4}$ ，即 $\tan\angle DFE=\frac{3}{4}$ 为定值。

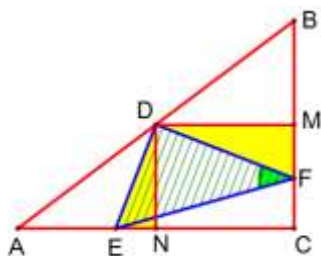


图 4

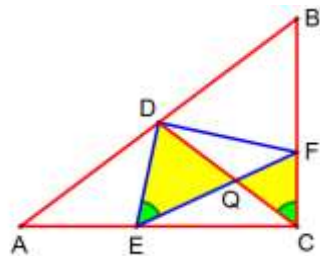


图 5

(3) 准备工作 1：在 $\triangle CQF$ 中， $\angle FCQ$ 是定值，设 $CF=x$ ，那么 $BF=6-x$ 。

准备工作 2： $\text{Rt}\triangle DEF$ 的形状是确定的，设 $DE=3m$ ， $DF=4m$ ， $EF=5m$ 。

准备工作 3： $\triangle FCQ\sim\triangle DEQ$ （如图 5 所示）。

分三种情况讨论等腰三角形 CQF .

①如图 6, 当 $QC=QF$ 时, $\angle QFC=\angle QCF=\angle QED$. 所以 $DE\parallel BC$.

此时 $DF\parallel AC$, F 是 BC 的中点, $BF=3$.

②如图 7, 当 $CQ=CF=x$ 时, $QD=5-x$, $EQ=ED=3m$.

所以 $FQ=5m-3m=2m$.

由 $\frac{CF}{QF}=\frac{ED}{QD}$, 得 $\frac{x}{2m}=\frac{3m}{5-x}$.

在 $\text{Rt}\triangle DFM$ 中, 由勾股定理, 得 $(4m)^2=4^2+(3-x)^2$.

联立 $\frac{x}{2m}=\frac{3m}{5-x}$ 和 $(4m)^2=4^2+(3-x)^2$, 消去 m , 整理, 得 $11x^2-58x+75=0$.

解得 $x=\frac{25}{11}$. 此时 $BF=6-x=\frac{41}{11}$.

③如图 8, 当 $FQ=FC=x$ 时, $DE=DQ=3m$.

所以 $QC=5-3m$, $QE=5m-x$.

由 $\frac{FC}{QC}=\frac{DE}{QE}=\frac{5}{6}$, 得 $\frac{x}{5-3m}=\frac{3m}{5m-x}=\frac{5}{6}$.

解得 $x=\frac{175}{117}$. 此时 $BF=6-x=\frac{527}{117}$.

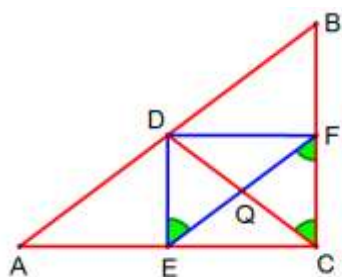


图6

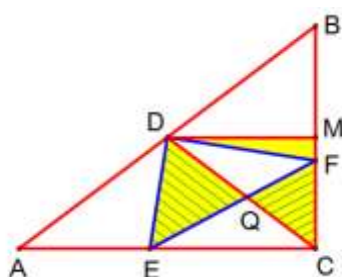


图7

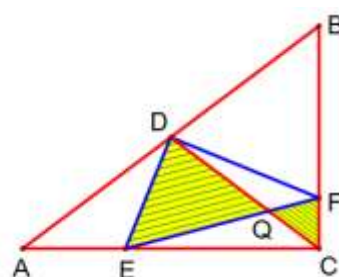


图8

例 2018 年上海市奉贤区中考一模第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = \frac{3}{8}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ ，经过点 A 的射线 AM 与 y 轴相交于点 E ，与抛物线的另一个交点为 F ，且 $\frac{AE}{EF} = \frac{1}{3}$ 。

- (1) 求这条抛物线的表达式，并写出它的对称轴；
- (2) 求 $\angle FAB$ 的余切值；
- (3) 点 D 是点 C 关于抛物线对称轴的对称点，点 P 是 y 轴上一点，且 $\angle AFP = \angle DAB$ ，求点 P 的坐标。

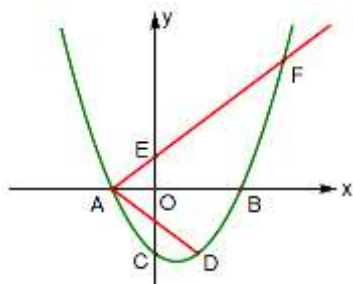


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 奉贤一模 24”，可以体验到， $\angle DAB = \angle FAB$ 。如果 $\angle AFP = \angle DAB$ ，那么点 P 存在两种情况。

图文解析

(1) 设抛物线的表达式为 $y = \frac{3}{8}(x+2)(x-x_2)$ ，代入点 $C(0, -3)$ ，得 $-3 = \frac{3}{8}(-x_2)$ 。

解得 $x_2 = 4$ 。所以 $y = \frac{3}{8}(x+2)(x-4) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 3$ 。抛物线的对称轴是直线 $x = 1$ 。

(2) 如图 2，已知 $\frac{AE}{EF} = \frac{1}{3}$ ，那么 $\frac{AE}{AF} = \frac{1}{4}$ 。

过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于 H ，那么 $\frac{EO}{FH} = \frac{AO}{AH} = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{4}$ 。

所以 $AH = 4AO = 8$ 。所以 $H(6, 0)$ 。于是得到 $F(6, 6)$ 。

所以 $\cot \angle FAB = \cot \angle FAH = \frac{AH}{FH} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ 。

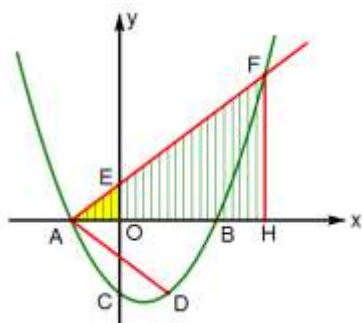


图 2

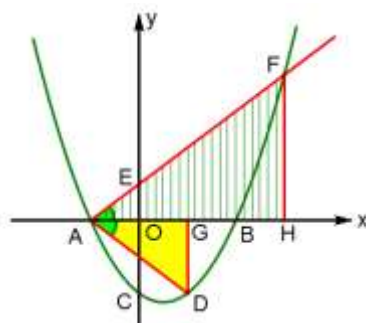


图 3

(3) 如图 3, 点 $C(0, -3)$ 关于抛物线的对称轴 $x=1$ 的对称点 D 的坐标为 $(2, -3)$.

作 $DG \perp x$ 轴于 G , 那么 $\tan \angle DAB = \tan \angle DAG = \frac{DG}{AG} = \frac{3}{4}$.

由 (2) 知, $\cot \angle FAB = \frac{4}{3}$, 所以 $\tan \angle FAB = \frac{3}{4}$. 所以 $\angle DAB = \angle FAB$.

如果 $\angle AFP = \angle DAB$, 那么 $\angle AFP = \angle FAB$.

①如图 4, 当点 P 在 AF 上方时, 根据内错角相等, 两直线平行, 得 $PF \parallel AB \parallel x$ 轴. 此时 $P(0, 6)$.

②如图 5, 如果点 P 在 AF 下方, 设 FP 与 x 轴交于点 M , 那么 $MA = MF$.

设 $M(x, 0)$. 根据 $MA^2 = MF^2$, 列方程 $(x+2)^2 = (x-6)^2 + 6^2$.

解得 $x = \frac{17}{4}$. 所以 $M(\frac{17}{4}, 0)$.

由 $\frac{PO}{MO} = \frac{FH}{MH}$, 得 $\frac{PO}{\frac{17}{4}} = \frac{6}{6 - \frac{17}{4}}$. 解得 $PO = \frac{102}{7}$. 此时 $P(0, -\frac{102}{7})$.

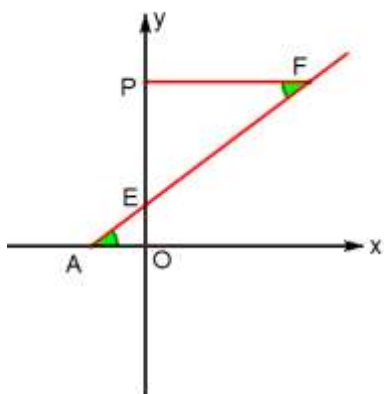


图 4

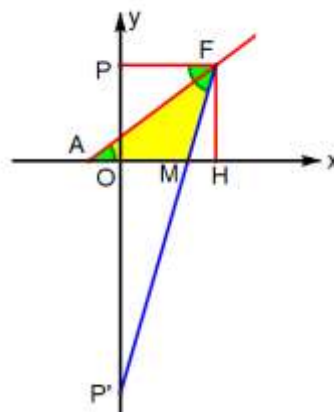


图 5

例 2018 年上海市奉贤区中考一模第 25 题

如图 10，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle D = 90^\circ$ ， $AD = CD = 2$ ，点 E 在边 AD 上（不与点 A 、 D 重合）， $\angle CEB = 45^\circ$ ， EB 与对角线 AC 相交于点 F ，设 $DE = x$ 。

(1) 用含 x 的代数式表示线段 CF 的长；

(2) 如果把 $\triangle CAE$ 的周长记作 $C_{\triangle CAE}$ ， $\triangle BAF$ 的周长记作 $C_{\triangle BAF}$ ，设 $\frac{C_{\triangle CAE}}{C_{\triangle BAF}} = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域；

(3) 当 $\angle ABE$ 的正切值是 $\frac{3}{5}$ 时，求 AB 的长。

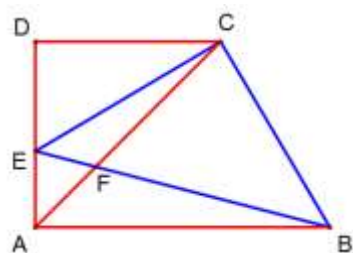
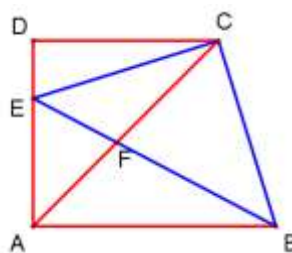


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 奉贤一模 25”，拖动点 E 在 AD 上运动，可以体验到， $\triangle CEF$ 、 $\triangle CAE$ 和 $\triangle BAF$ 两两相似。

图文解析

(1) 如图 2，在 $\text{Rt}\triangle DAC$ 中， $AD = CD = 2$ ，所以 $CA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle CAD = 45^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $CD = 2$ ， $DE = x$ ，所以 $CE^2 = x^2 + 4$ 。

由 $\angle CEF = \angle CAE = 45^\circ$ ， $\angle ECF = \angle ACE$ ，得 $\triangle CEF \sim \triangle CAE$ 。

所以 $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CE}$ 。所以 $CE^2 = CF \cdot CA$ 。

所以 $CF = \frac{CE^2}{CA} = \frac{x^2 + 4}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}}{4}$ 。

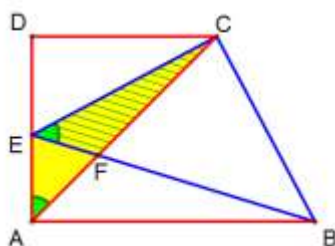


图 2

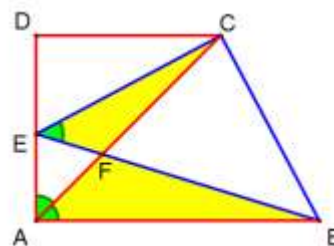


图 3

(2) 如图 3，由 $\angle CEF = \angle BAF$ ， $\angle CFE = \angle BFA$ ，得 $\triangle CEF \sim \triangle BAF$ 。

又因为 $\triangle CEF \sim \triangle CAE$ ，所以 $\triangle BAF \sim \triangle CAE$ （如图 4 所示）。

根据相似三角形的周长比等于相似比，得 $y = \frac{C_{\triangle CAE}}{C_{\triangle BAF}} = \frac{AE}{AF} = \frac{2-x}{2\sqrt{2} - \frac{x^2+4}{2\sqrt{2}}}$ 。

整理, 得 $y = \frac{2\sqrt{2}}{2+x}$. 定义域是 $0 < x < 2$.

(3) 如图 5, 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由 $\tan \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}$, 得 $AB = \frac{5}{3}AE = \frac{5}{3}(2-x)$.

由 $\triangle BAF \sim \triangle CAE$, 根据相似三角形的周长比等于相似比, 得 $y = \frac{C_{\triangle CAE}}{C_{\triangle BAF}} = \frac{AC}{AB}$.

所以 $\frac{2\sqrt{2}}{2+x} = \frac{\frac{5}{3}(2-x)}{\frac{5}{3}}$. 解得 $x = \frac{1}{2}$. 所以 $AB = \frac{5}{3}(2-x) = \frac{5}{2}$.

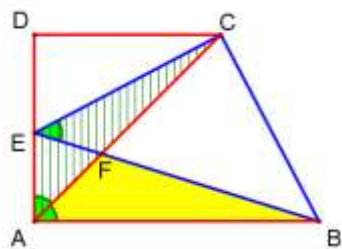


图4

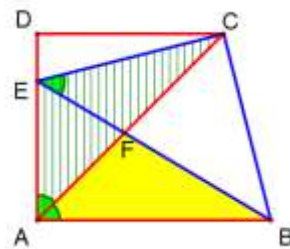


图5

第(2)题的过程很繁, 结果为什么很简单?

由 $\triangle CEF \sim \triangle BAF$ (如图3), 可得 $\triangle AEF \sim \triangle BCF$ (如图6).

所以 $\angle CBF = \angle EAF = 45^\circ$. 所以 $\triangle CEB$ 是等腰直角三角形 (如图7).

所以 $CH = ED = x$. 所以 $AB = DC + CH = 2 + x$.

于是由 $\triangle CAE \sim \triangle BAF$, 得 $y = \frac{C_{\triangle CAE}}{C_{\triangle BAF}} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{2+x}$.

感谢网友沈老师提供的这个解法.

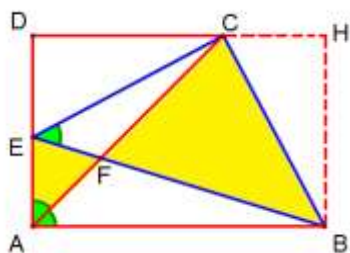


图6

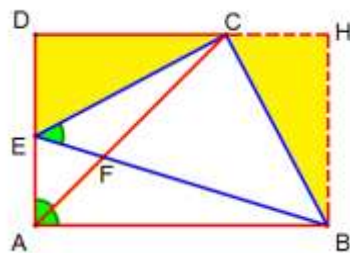


图7

例 2018 年上海市虹口区中考一模第 24 题

如图，在平面直角坐标系中，抛物线与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，与 y 轴相交于点 $C(0, -4)$ ， BC 与抛物线的对称轴相交于点 D 。

- (1) 求该抛物线的表达式，并直接写出点 D 的坐标；
- (2) 过点 A 作 $AE \perp AC$ 交抛物线于点 E ，求点 E 的坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，点 F 在射线 AE 上，若 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求点 F 的坐标。

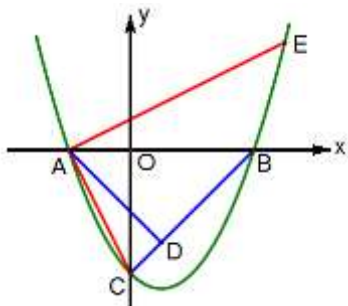


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 虹口一模 24”，拖动点 F 在射线 AE 上运动，可以体验到， $\angle FAD = \angle ACB$ ， $\triangle FAD$ 与 $\triangle ACB$ 相似存在两种情况。

图文解析

(1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x+2)(x-4)$ ，代入点 $C(0, -4)$ ，得 $-4 = -8a$ 。

解得 $a = \frac{1}{2}$ 。所以 $y = \frac{1}{2}(x+2)(x-4) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ 。点 D 的坐标为 $(1, -3)$ 。

(2) 如图 2，作 $EH \perp x$ 轴于 H 。设点 E 的坐标为 $(x, \frac{1}{2}(x+2)(x-4))$ 。

根据同角的余角相等，得 $\angle EAH = \angle ACO$ 。

由 $\tan \angle EAH = \tan \angle ACO$ ，得 $\frac{EH}{AH} = \frac{AO}{CO} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。所以 $EH = \frac{1}{2}AH$ 。

解方程 $\frac{1}{2}(x+2)(x-4) = \frac{1}{2}(x-4)$ ，得 $x = 5$ ，或 $x = -2$ （舍去）。

所以点 E 的坐标为 $(5, \frac{7}{2})$ 。

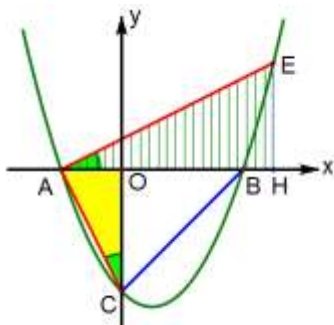


图 2

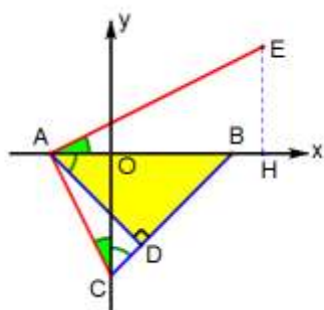


图 3

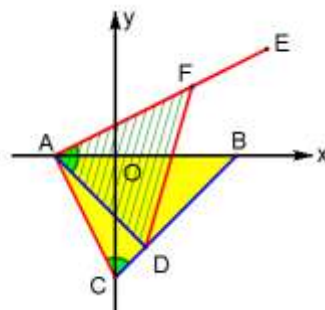


图 4

(3) 如图 3，由 $A(-2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(0, -4)$ 、 $D(1, -3)$ ，可知 $\angle BAD = \angle BCO = 45^\circ$ ， $AD = 3\sqrt{2}$ ， $CB = 4\sqrt{2}$ 。

因为 $\angle EAH = \angle ACO$, 所以 $\angle EAH + 45^\circ = \angle ACO + 45^\circ$.

所以 $\angle EAD = \angle ACB$.

如图 4, 当点 F 在射线 AE 上时, $\angle FAD = \angle ACB$. 分两种情况讨论 $\triangle FAD$ 与 $\triangle ACB$ 相似.

①当 $\frac{AF}{AD} = \frac{CA}{CB}$ 时, $\frac{AF}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$. 所以 $AF = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

如图 5, 作 $FG \perp x$ 轴于 G , 那么 $\sin \angle FAG = \sin \angle EAH = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle FAG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以 $FG = \frac{\sqrt{5}}{5} AF = \frac{3}{2}$, $AG = \frac{2\sqrt{5}}{5} AF = 3$.

所以 $OG = 3 - 2 = 1$. 此时 $F(1, \frac{3}{2})$ (如图 7 所示).

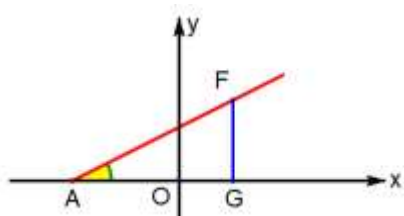


图5

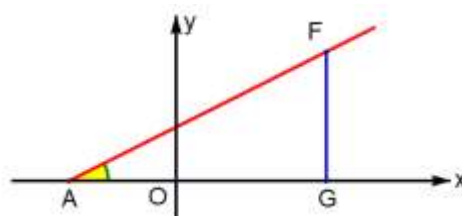


图6

②当 $\frac{AF}{AD} = \frac{CB}{CA}$ 时, $\frac{AF}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$. 所以 $AF = \frac{12}{5}\sqrt{5}$.

如图 6, $FG = \frac{12}{5}$, $AG = \frac{24}{5}$. 所以 $OG = \frac{24}{5} - 2 = \frac{14}{5}$. 此时 $F(\frac{14}{5}, \frac{12}{5})$ (如图 8 所示).

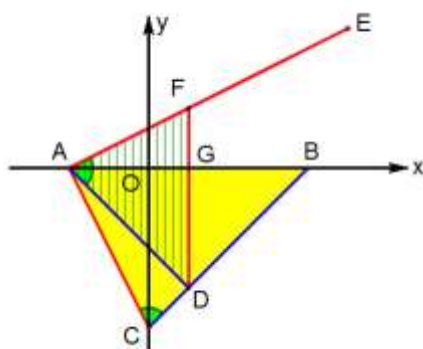


图7

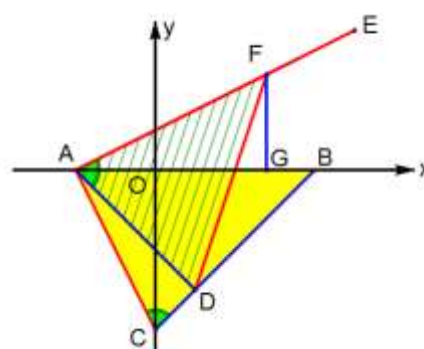


图8

例 2018 年上海市虹口区中考一模第 25 题

已知 $AB=5$, $AD=4$, $AD \parallel BM$, $\cos B = \frac{3}{5}$ (如图 1), 点 C 、 E 分别为射线 BM 上的动点 (点 C 、 E 都不与点 B 重合), 联结 AC 、 AE , 使得 $\angle DAE = \angle BAC$, 射线 EA 交射线 CD 于点 F . 设 $BC=x$, $\frac{AF}{AC} = y$.

- (1) 如图 2, 当 $x=4$ 时, 求 AF 的长;
- (2) 当点 E 在点 C 的右侧时, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出函数的定义域;
- (3) 联结 BD 交 AE 于点 P , 若 $\triangle ADP$ 是等腰三角形, 直接写出 x 的值.

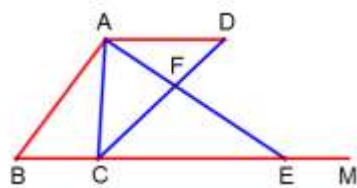


图 1

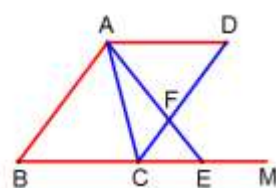


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“18 虹口一模 25”, 拖动点 C 运动, 可以体验到, $\triangle BAC$ 与 $\triangle BEA$ 保持相似. 观察 $\triangle ADP$ 的形状, 可以体验到, 等腰三角形 ADP 存在三种情况.

图文解析

- (1) 如图 3, 作 $AG \perp BC$ 于 G .

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中, $AB=5$, $\cos B = \frac{3}{5}$, 所以 $BG=3$, $AG=4$.

在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $CG=BC-BG=1$, $AG=4$, 所以 $AC = \sqrt{17}$.

如图 4, 因为 $BC=AD=4$, $BC \parallel AD$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $\angle B = \angle D$.

又因为 $\angle BAC = \angle DAF$, 所以 $\triangle BAC \sim \triangle DAF$.

所以 $\frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5}$. 所以 $AF = \frac{4}{5}AC = \frac{4}{5}\sqrt{17}$.

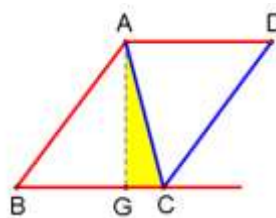


图 3

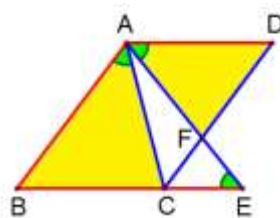


图 4

- (2) 如图 5, 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle DAE = \angle BEA$.

又已知 $\angle BAC = \angle DAF$, 所以 $\angle BAC = \angle BEA$.

又因为 $\angle B$ 是公共角, 所以 $\triangle BAC \sim \triangle BEA$.

所以 $\frac{BA}{BE} = \frac{AC}{EA} = \frac{CB}{AB}$, 即 $\frac{5}{BE} = \frac{AC}{EA} = \frac{x}{5}$. 所以 $BE = \frac{25}{x}$, $\frac{AC}{EA} = \frac{x}{5}$.

如图 6, 由 $AD \parallel BC$, 得 $\frac{AF}{EF} = \frac{AD}{CE} = \frac{4}{\frac{25}{x} - x} = \frac{4x}{25 - x^2}$. 所以 $\frac{AF}{EA} = \frac{4x}{25 - x^2 + 4x}$.

所以 $y = \frac{AF}{AC} = \frac{AF}{EA} \div \frac{AC}{EA} = \frac{4x}{25 - x^2 + 4x} \div \frac{x}{5} = \frac{20}{25 + 4x - x^2}$.

定义域是 $0 < x < 5$.

题设要求点 E 在点 C 的右侧, 当 $BC = BE$ 时, $x = \frac{25}{x}$. 所以 $x = 5$.

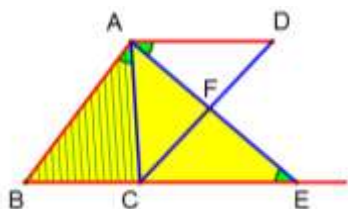


图 5

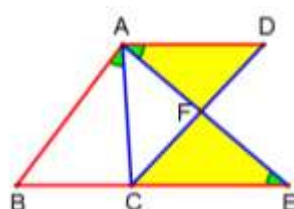


图 6

(3) 如图 7, 在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, $BH = 4$, $DH = 3 + 4 = 7$, 所以 $BD = \sqrt{65}$.

因为 $\triangle ADP \sim \triangle EBP$, 所以当 $\triangle ADP$ 是等腰三角形时, $\triangle EBP$ 也是等腰三角形. 分三种情况讨论等腰三角形 ADP .

①如图 8, 当 $AP = AD = 4$ 时, 设 $BE = PE = m$.

在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中, 由勾股定理, 得 $(m + 4)^2 = 4^2 + (3 - m)^2$. 解得 $BE = m = \frac{9}{14}$.

再由 $BE = \frac{25}{x}$, 得 $\frac{9}{14} = \frac{25}{x}$. 此时 $x = \frac{350}{9}$.

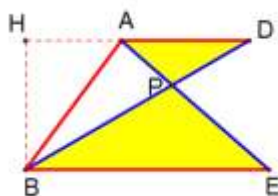


图 7

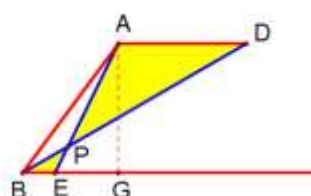


图 8

②如图 9, 当 $DP = DA = 4$ 时, $BE = BP = \sqrt{65} - 4$.

再由 $BE = \frac{25}{x}$, 得 $\sqrt{65} - 4 = \frac{25}{x}$. 此时 $x = \frac{25\sqrt{65} + 100}{49}$.

③如图 10, 当 $PA = PD$ 时, $AE = BD$. 此时四边形 $ABED$ 是等腰梯形.

所以 $BE = 3 + 4 + 3 = 10$. 再由 $10 = \frac{25}{x}$, 解得 $x = \frac{5}{2}$.

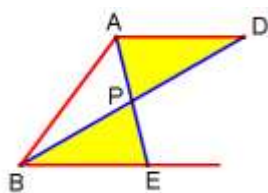


图9

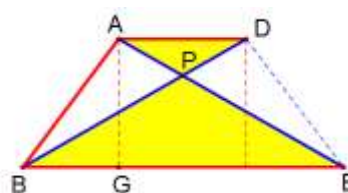


图10

宝山区淞谊中学吴琮老师和沈东辰老师在研究第（3）题时，提供了一种简便的解法，我们分享一下。

如图11，过点D作AE的平行线交BE的延长线于点Q，那么 $\triangle ADP \sim \triangle QBD$ 。当 $\triangle ADP$ 是等腰三角形时， $\triangle QBD$ 也是等腰三角形。

在 $\triangle QBD$ 中， $BD = \sqrt{65}$ ， $BQ = BE + EQ = \frac{25}{x} + 4$ 。

分三种情况讨论等腰三角形 QBD ：

() ①如图12，当 $BQ_1 = BD$ 时，解方程 $\frac{25}{x} + 4 = \sqrt{65}$ ，得 $x = \frac{25\sqrt{65} + 100}{49}$ 。

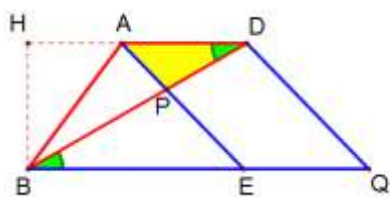


图11

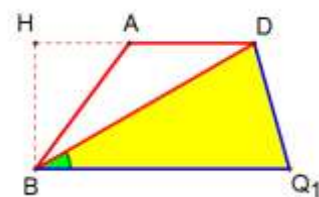


图12

②如图13，当 $DB = DQ_2$ 时，点D在 BQ_2 的垂直平分线上，所以 $BQ_2 = 2DH = 14$ 。

解方程 $\frac{25}{x} + 4 = 14$ ，得 $x = \frac{5}{2}$ 。

③如图14，当 $Q_3B = Q_3D$ 时， $\triangle BDQ_2$ 和 $\triangle BQ_3D$ 是有公共底角的两个等腰三角形。

所以 $\triangle BDQ_2 \sim \triangle BQ_3D$ 。于是 $BD^2 = BQ_3 \cdot BQ_2$ 。

所以 $65 = BQ_3 \times 14$ 。所以 $BQ_3 = \frac{65}{14}$ 。

解方程 $\frac{25}{x} + 4 = \frac{65}{14}$ ，得 $x = \frac{350}{9}$ 。

把情形③和情形②结合起来，使得运算量大大减小。绝妙！

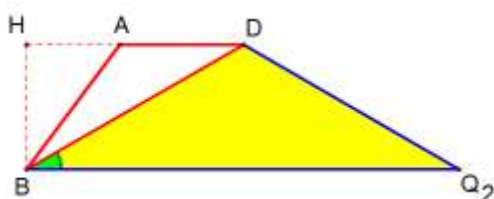


图13

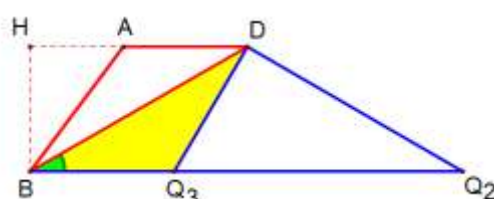


图14

例 2018 年上海市黄浦区中考一模第 24 题

在平面直角坐标系 xOy 中，对称轴为直线 $x=1$ 的抛物线 $y=ax^2+bx+8$ 过点 $(-2,0)$.

(1) 求抛物线的表达式，并写出其顶点坐标；

(2) 现将此抛物线沿 y 轴方向平移若干个单位，所得抛物线的顶点为 D ，与 y 轴的交点为 B ，与 x 轴负半轴交于点 A ，过 B 作 x 轴的平行线交所得抛物线于点 C ，若 $AC \parallel BD$ ，试求平移后所得抛物线的表达式.

动感体验

请打开几何画板文件名“18 黄浦一模 24”，拖动点 D 上下运动，可以体验到，直线 BD 与坐标轴的夹角保持不变，点 A 在 x 轴负半轴时，存在一个时刻， $AC \parallel BD$.

图文解析

(1) 点 $(-2,0)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $(4,0)$.

所以抛物线的表达式可以表示为 $y=a(x+2)(x-4)$.

根据常数项相等，得 $-8a=8$. 所以 $a=-1$.

所以 $y=-(x+2)(x-4)=-x^2+2x+8=-(x-1)^2+9$. 顶点坐标为 $(1,9)$.

(2) 如图 1，抛物线在上下平移的过程中，对称轴不变.

抛物线平移前与 y 轴的交点为 $(0,8)$ ，顶点为 $(1,9)$ ，这两个点在平移过程中的相对位置保持不变.

设抛物线沿 y 轴向上平移了 m 个单位，那么点 $(0,8)$ 的对应点为 $B(0,8+m)$ ，顶点 $(1,9)$ 平移以后的对应点为 $D(1,9+m)$. 平移后的抛物线的解析式为 $y=-(x-1)^2+9+m$.

因为 $BC \parallel x$ 轴，所以 B 、 C 两点关于抛物线的对称轴 $x=1$ 对称，所以 $C(2,8+m)$.

由于 $B(0,8+m)$ 、 $D(1,9+m)$ 两点间的水平距离和竖直距离都是 1，所以直线 BD 与 x 轴正半轴的夹角为 45° .

当 $AC \parallel BD$ 时，直线 AC 与 x 轴正半轴的夹角为 45° .

作 $CH \perp x$ 轴于 H ，那么由 $CH=AH$ ，得 $8+m=2-x_A$. 所以 $x_A=-6-m$.

将 $A(-6-m,0)$ 代入 $y=-(x-1)^2+9+m$ ，得 $-(-7-m)^2+9+m=0$.

整理，得 $m^2+13m+40=0$.

解得 $m=-5$ ，或 $m=-8$.

① $m=-5$ 的意义就是抛物线向下平移了 5 个单位，此时顶点 $D(1,4)$.

所以平移后抛物线的解析式为

$$y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3.$$

② $m=-8$ 的意义就是抛物线向下平移了 8 个单位，此时点 $B(0,0)$. 已知抛物线与 x 轴的负半轴相交，所以 $m=-8$ 不符合题意.

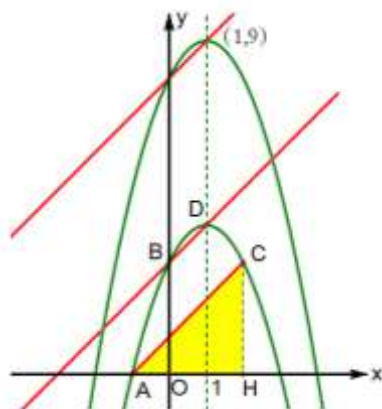


图1

例 2018 年上海市黄浦区中考一模第 25 题

如图 1，线段 $AB=5$ ， $AD=4$ ， $\angle A=90^\circ$ ， $DP \parallel AB$ ，点 C 为射线 DP 上一点， BE 平分 $\angle ABC$ 交线段 AD 于点 E （不与端点 A 、 D 重合）。

- (1) 当 $\angle ABC$ 为锐角，且 $\tan \angle ABC=2$ 时，求四边形 $ABCD$ 的面积；
- (2) 当 $\triangle ABE$ 与 $\triangle BCE$ 相似时，求线段 CD 的长；
- (3) 设 $CD=x$ ， $DE=y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域。

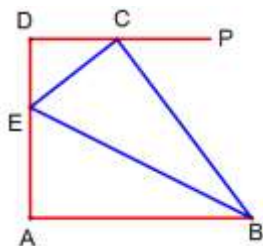
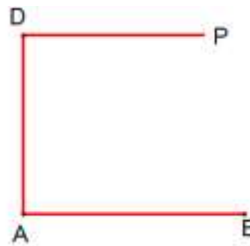


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 黄浦一模 25”，拖动点 C 运动，可以体验到， CF 与 CB 保持相等。还可以体验到， $\triangle BCE$ 由两个时刻可以成为直角三角形。

图文解析

- (1) 如图 2，作 $CM \perp AB$ 于 M 。

在 $\text{Rt} \triangle CBM$ 中， $CM=4$ ， $\tan \angle ABC=2$ ，所以 $BM=2$ 。所以 $AM=DC=3$ 。

所以梯形 $ABCD$ 的面积 $= (3+5) \times 4 \div 2 = 16$ 。

- (2) 因为 $\triangle ABE$ 是直角三角形，当 $\triangle ABE$ 与 $\triangle BCE$ 相似时， $\triangle BCE$ 也是直角三角形。

①如图 3，当 $\angle BCE=90^\circ$ 时，已知 BE 平分 $\angle ABC$ ，所以 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBE$ 关于直线 BE 对称。

在 $\text{Rt} \triangle CBM$ 中， $CB=AB=5$ ， $CM=4$ ，所以 $BM=3$ 。

此时 $CD=MA=5-3=2$ 。

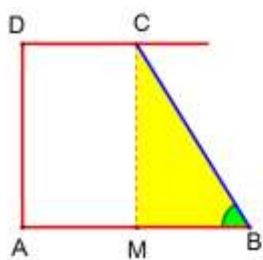


图 2

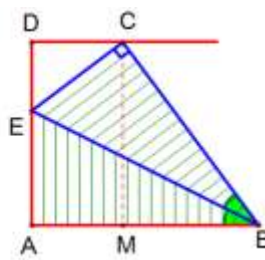


图 3

- ②如图 4，当 $\angle BEC=90^\circ$ 时，延长 BE 交 CD 的延长线于 F 。

由 $\angle F=\angle ABE=\angle CBE$ ，可得 $CF=CB$ 。

根据三线合一，可知点 E 是 BF 的中点。

所以点 E 是 AD 的中点， $AE=DE=2$ 。

再由 $\frac{CD}{DE} = \frac{EA}{AB} = \frac{2}{5}$ ，可得 $CD = \frac{2}{5} DE = \frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$ 。

【解法二】如图 5，作 $EH \perp BC$ 于 H 。

因为点 E 在 $\angle ABC$ 的平分线上，所以 $EA = EH$ 。

再根据“角角边”证明 $\triangle EDC \cong \triangle EHC$ ，得 $ED = EH$ 。

所以 E 是 AD 的中点。

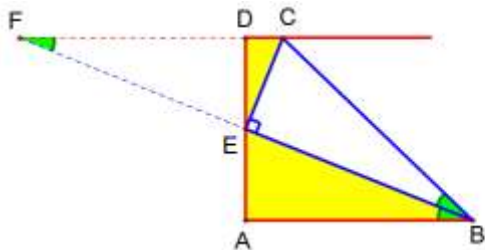


图 4

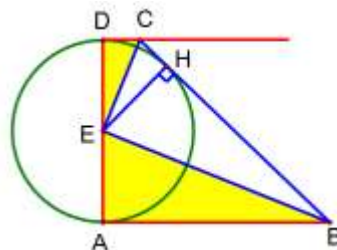


图 5

(3) 如图 6，延长 BE 交 CD 的延长线于点 F 。

第一步，求 DF 的长。

$$\text{由 } \frac{DF}{AB} = \frac{DE}{AE} = \frac{y}{4-y}, \text{ 得 } DF = \frac{y}{4-y} AB = \frac{5y}{4-y}.$$

第二步，求 CB 的长。

$$\text{如图 7，在 Rt}\triangle CBM \text{ 中， } CB = \sqrt{CM^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 41}.$$

第三步，由 $CF = CB$ 列方程。

$$\text{由 } \frac{5y}{4-y} + x = \sqrt{x^2 - 10x + 41}, \text{ 整理，得 } y = \frac{41 - 5x - 5\sqrt{x^2 - 10x + 41}}{4}.$$

定义域是 $0 \leq x < \frac{41}{10}$ 。

如图 8，当 E 、 D 重合时，由 $CD = CB$ ，得 $x = \sqrt{x^2 - 10x + 41}$ 。解得 $x = \frac{41}{10}$ 。

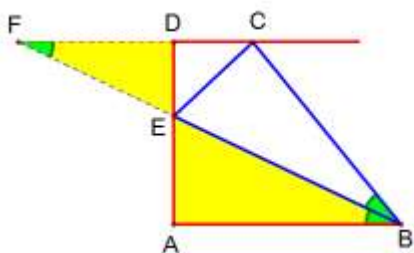


图 6

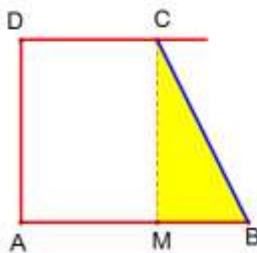


图 7

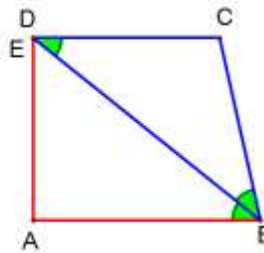


图 8

例 2018 年上海市嘉定区中考一模第 24 题

如图 1，已知在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过 $A(1,0)$ 、 $B(0,2)$ 两点.

- (1) 求该抛物线的表达式；
- (2) 设该抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 C ，第四象限内的点 D 在该抛物线的对称轴上，如果以点 A 、 C 、 D 所组成的三角形与 $\triangle AOB$ 相似，求点 D 的坐标；
- (3) 设点 E 在该抛物线的对称轴上，它的纵坐标是 1，联结 AE 、 BE ，求 $\sin \angle ABE$.

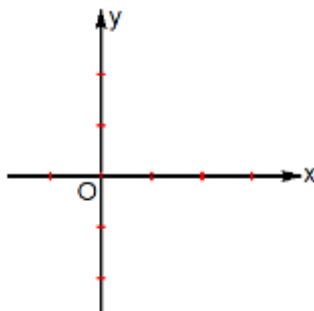


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 嘉定一模 24”，可以体验到， $\triangle ACD$ 与 $\triangle AOB$ 相似存在两种情况.

图文解析

(1) 因为抛物线与 x 轴交于点 $A(1,0)$ ，设抛物线的表达式为 $y = \frac{2}{3}(x-1)(x-x_2)$.

代入点 $B(0,2)$ ，得 $2 = \frac{2}{3}x_2$. 解得 $x_2 = 3$.

所以抛物线的表达式为 $y = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$.

(2) 抛物线的对称轴是直线 $x=2$ ，点 C 的坐标为 $(2,0)$.

当点 D 在点 C 下方时， $\angle ACD = \angle AOB = 90^\circ$ ，分两种情况讨论 $\triangle ACD$ 与 $\triangle AOB$ 相似.

①当 $\frac{CD}{CA} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$ 时， $CD = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}$. 此时 $D(2, -\frac{1}{2})$ (如图 2 所示).

②当 $\frac{CD}{CA} = \frac{OB}{OA} = 2$ 时， $CD = 2CA = 2$. 此时 $D(2, -2)$ (如图 3 所示).

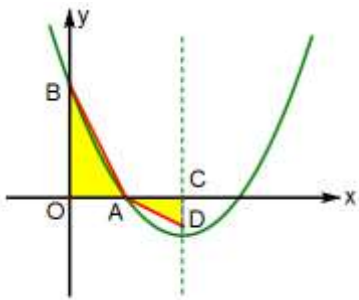


图 2

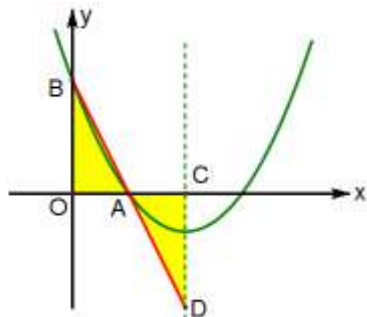


图 3

(3) 由 $A(1, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 、 $E(2, 1)$ ，得， $BA=BE=\sqrt{5}$ ， $AE=\sqrt{2}$ 。

如图 4，作 $AM \perp BE$ 于 M 。设 $BM=m$ ，那么 $EM=\sqrt{5}-m$ 。

由勾股定理，得 $AM^2=(\sqrt{5})^2-m^2=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-m)^2$ 。解得 $m=\frac{4}{5}\sqrt{5}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中， $\cos \angle ABM = \frac{BM}{BA} = \frac{4}{5}$ 。所以 $\sin \angle ABE = \frac{3}{5}$ 。

【还可以这样求 $\sin \angle ABE$ 】如图 5，作 $BN \perp AE$ 于 N ，那么 $AN=EN=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle BAN$ 中，由勾股定理，得 $BN^2=BA^2-AN^2=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ 。所以 $BN=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

由 $S_{\triangle BAE} = \frac{1}{2}AE \cdot BN = \frac{1}{2}BE \cdot AM$ ，得 $\sqrt{2} \times \frac{3}{2}\sqrt{2} = \sqrt{5}AN$ 。

解得 $AN = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ 。所以 $\sin \angle ABE = \frac{AN}{BA} = \frac{3}{5}$ 。

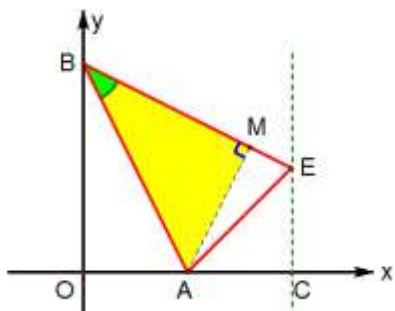


图4

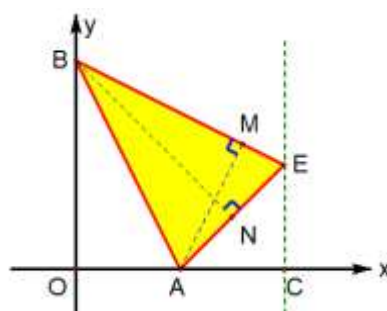


图5

例 2018 年上海市嘉定区中考一模第 25 题

在正方形 $ABCD$ 中, $AB=8$, 点 P 在边 CD 上, $\tan \angle PBC = \frac{3}{4}$, 点 Q 是在射线 BP 上的一个动点, 过点 Q 作 AB 的平行线交射线 AD 于点 M , 点 R 在射线 AD 上, 使 RQ 始终与直线 BP 垂直.

(1) 如图 1, 当点 R 与点 D 重合时, 求 PQ 的长;

(2) 如图 2, 试探索: $\frac{RM}{MQ}$ 的比值是否随点 Q 的运动而发生变化? 若有变化, 请说明你的理由; 若没有变化, 请求出它的比值;

(3) 如图 3, 若点 Q 在线段 BP 上, 设 $PQ=x$, $RM=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出它的定义域.

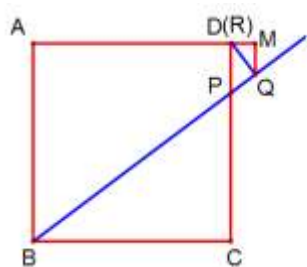


图 1

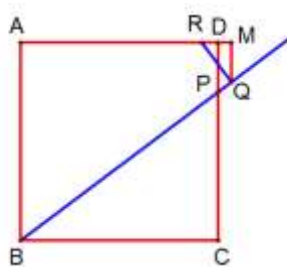


图 2

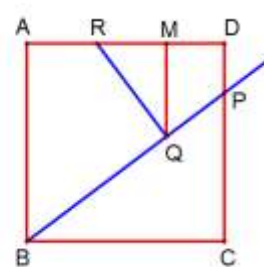


图 3

动感体验

请打开几何画板文件名“18 嘉定一模 25”, 拖动点 Q 在射线 BP 上运动, 可以体验到, $\triangle QBN$ 、 $\triangle RQM$ 、 $\triangle PQF$ 都与 $\triangle PBC$ 保持相似.

图文解析

(1) 如图 4, 在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中, $BC=8$, $\tan \angle PBC = \frac{PC}{BC} = \frac{3}{4}$, 所以 $PC=6$.

当点 R 与点 D 重合时, 在 $\text{Rt}\triangle DPQ$ 中, $DP=2$, $\angle PDQ = \angle PBC$.

由 $\sin \angle PDQ = \sin \angle PBC = \frac{3}{5}$, 得 $PQ = DP \sin \angle PDQ = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$.

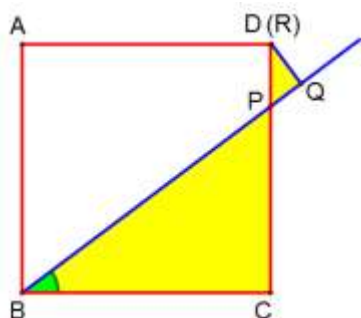


图 4

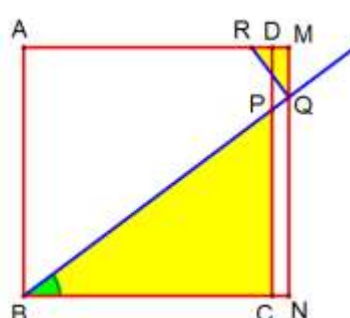


图 5

(2) $\frac{RM}{MQ}$ 为定值. 说理如下:

设直线 MQ 与直线 BC 交于点 N (如图 5、图 6、图 7).

由 $\angle BQR = 90^\circ$, 得 $\angle RQM$ 与 $\angle BQN$ 互余.

又因为 $\angle PBC$ 与 $\angle BQN$ 互余, 所以 $\angle RQM = \angle PBC$.

所以在 $\text{Rt}\triangle RQM$ 中, $\frac{RM}{MQ} = \tan \angle RQM = \tan \angle PBC = \frac{3}{4}$ 为定值.

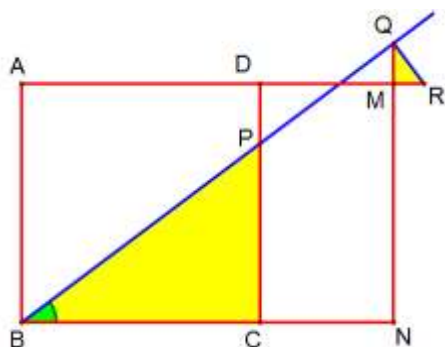


图 6

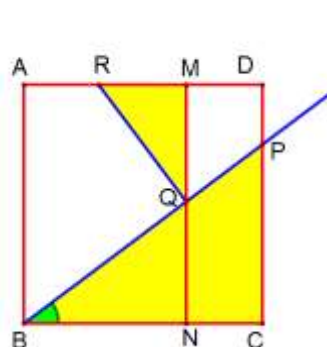


图 7

(3) 如图 8, 过点 Q 作 BC 的平行线分别交 AB 、 DC 于 E 、 F , 那么 $\angle PQF = \angle PBC$.

在 $\text{Rt}\triangle PQF$ 中, $PQ = x$, 所以 $QF = PQ \cos \angle PQF = \frac{4}{5}x$.

在 $\text{Rt}\triangle QBN$ 中, $BN = BC - QF = 8 - \frac{4}{5}x$,

所以 $QN = BN \tan \angle PBC = \frac{3}{4}(8 - \frac{4}{5}x) = 6 - \frac{3}{5}x$.

在 $\text{Rt}\triangle RQM$ 中, $QM = MN - QN = 8 - (6 - \frac{3}{5}x) = 2 + \frac{3}{5}x$,

所以 $y = RM = QM \tan \angle RQM = \frac{3}{4}(2 + \frac{3}{5}x) = \frac{9}{20}x + \frac{3}{2}$.

定义域是 $0 \leq x \leq \frac{26}{5}$.

如图 9, 当 R 与 A 重合时, $BQ = \frac{24}{5}$, 此时 $x = PQ = \frac{26}{5}$.

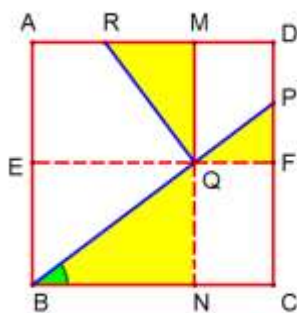


图8

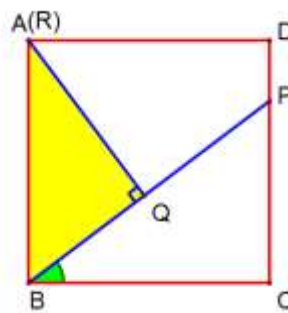


图9

例 2018 年上海市金山区中考一模第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 y 轴相交于点 C ，与 x 轴正半轴相交于点 A ， $OA=OC$ ，与 x 轴的另一个交点为 B ，对称轴是直线 $x=1$ ，顶点为 P 。

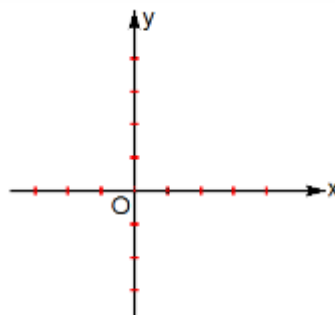


图 1

- (1) 求这条抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；
- (2) 抛物线的对称轴与 x 轴相交于点 M ，求 $\angle PMC$ 的正切值；
- (3) 点 Q 在 y 轴上，且 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle CMP$ 相似，求点 Q 的坐标。

动感体验

请打开几何画板文件名“18 金山一模 24”，拖动点 Q 在点 C 下方运动，可以体验到， $\triangle BCQ$ 与 $\triangle CMP$ 相似，存在两种情况。

图文解析

(1) 由 $y=ax^2+bx+3$ ，得 $C(0, 3)$ 。由 $OA=OC=3$ ，得 $A(3, 0)$ 。

点 $A(3, 0)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点 B 的坐标为 $(-1, 0)$ 。

因为抛物线与 x 轴交于 $A(3, 0)$ 、 $B(-1, 0)$ 两点，设 $y=a(x-3)(x+1)$ 。

根据常数项相等，得 $-3a=3$ 。所以 $a=-3$ 。

所以 $y=-(x-3)(x+1)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ 。顶点为 $P(1, 4)$ 。

(2) 如图 2，作 $CH \perp PM$ 于 H 。

由 $M(1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，得 $CH=1$ ， $MH=3$ 。所以 $\tan \angle PMC = \frac{CH}{MH} = \frac{1}{3}$ 。

(3) 由 $M(1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $P(1, 4)$ 、 $B(-1, 0)$ ，可得 $CB=CM=\sqrt{10}$ ， $MP=4$ 。

因为 $\angle BCO = \angle MCO = \angle CMP$ ，所以当点 Q 在点 C 下方时， $\angle BCQ = \angle CMP$ 。

分两种情况讨论 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle CMP$ 相似：

①当 $\frac{CQ}{CB} = \frac{MC}{MP}$ 时， $\frac{CQ}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 。解得 $CQ = \frac{5}{2}$ 。此时 $Q(0, \frac{1}{2})$ （如图 3 所示）。

②当 $\frac{CQ}{CB} = \frac{MP}{MC}$ 时， $\frac{CQ}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$ 。解得 $CQ = 4$ 。此时 $Q(0, -1)$ （如图 4 所示）。

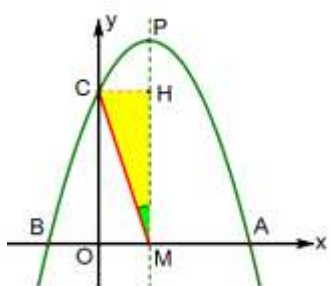


图2

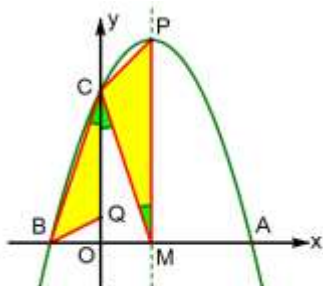


图3

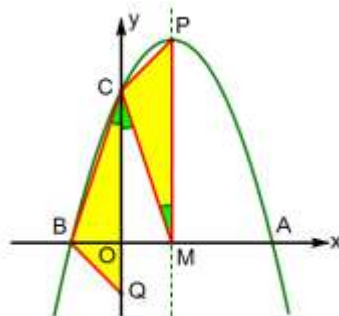


图4

例 2018 年上海市金山区中考一模第 25 题

如图 1，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=5$ ， $\cos B=\frac{4}{5}$ ， P 是边 AB 一点，以 P 为圆心， PB 为半径的 $\odot P$ 与边 BC 的另一个交点为 D ，联结 PD 、 AD 。

- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (2) 设 $PB=x$ ， $\triangle APD$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；
- (3) 如果 $\triangle APD$ 是直角三角形，求 PB 的长。

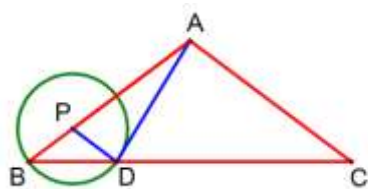
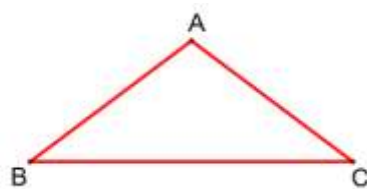


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 金山一模 25”，拖动点 P 在 AB 上运动，可以体验到， $\triangle APD$ 可以两次成为直角三角形。

图文解析

- (1) 作 $AM \perp BC$ 于 M ，那么 $BM=CM$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中， $AB=5$ ， $\cos B=\frac{BM}{AB}=\frac{4}{5}$ ，所以 $BM=4$ 。

所以 $AM=3$ 。所以 $S_{\triangle ABC}=12$ 。

- (2) 由 $PB=PD$ ，得 $\angle B=\angle PDB$ 。

由 $AB=AC$ ，得 $\angle B=\angle C$ 。

所以 $\angle PDB=\angle C$ 。

所以 $PD \parallel AC$ 。

根据同高三三角形的面积比等于底边的比，得

$$\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{AP}{AB} = \frac{5-x}{5}, \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{BP}{BA} = \frac{x}{5}.$$

两式相乘，得 $\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5-x}{5} \times \frac{x}{5} = \frac{x(5-x)}{25}$ 。

所以 $y=S_{\triangle APD} = \frac{x(5-x)}{25} \times 12 = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{12}{5}x$ 。定义域是 $0 < x < 5$ 。

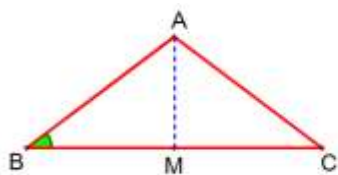


图 2

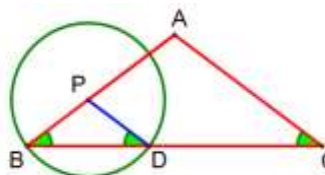


图 3

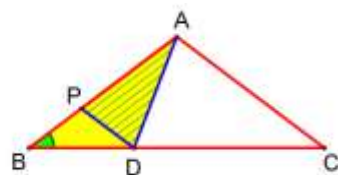


图 4

(3) 如图 3, 由 $\triangle PBD \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{PB}{BD} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8}$. 所以 $PB = \frac{5}{8}BD$.

因为 $\angle BPD$ 是钝角, 为定值, 所以直角三角形 APD 存在两种情况.

①如图 5, 当 $\angle PAD = 90^\circ$ 时, 在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中, $AB = 5$, $BD = \frac{5}{4}AB = \frac{25}{4}$.

此时 $PB = \frac{5}{8}BD = \frac{5}{8} \times \frac{25}{4} = \frac{125}{32}$.

②如图 6, 当 $\angle PDA = 90^\circ$ 时, 由 $PD \parallel AC$, 得 $\angle CAD = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $CD = \frac{5}{4}AC = \frac{25}{4}$.

所以 $BD = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$. 此时 $PB = \frac{5}{8}BD = \frac{5}{8} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{32}$.

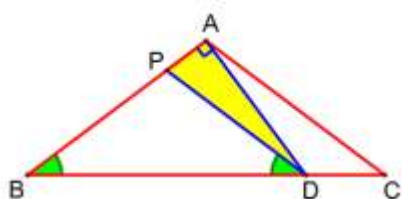


图5

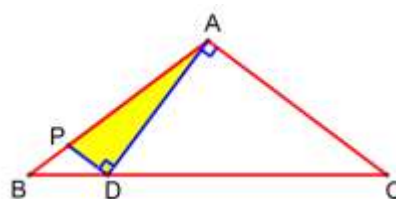


图6

例 2018 年上海市静安区中考一模第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx - \frac{5}{3}$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 。

(1) 求此抛物线顶点 C 的坐标；

(2) 联结 AC 交 y 轴于点 D ，联结 BD 、 BC ，过点 C 作 $CH \perp BD$ ，垂足为点 H ，抛物线对称轴交 x 轴于点 G ，联结 HG ，求 HG 的长。

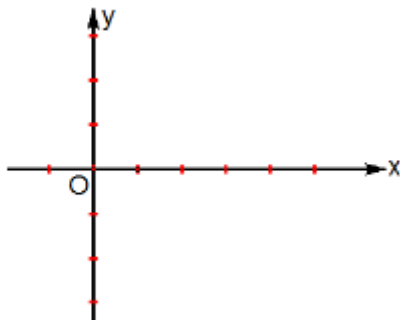


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 静安一模 24”，可以体验到， $\triangle HMC \sim \triangle GMB$ ， $\triangle HMG \sim \triangle CMB$ 。

图文解析

(1) 如图 2，因为抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 两点，设 $y = a(x+1)(x-5)$ 。

对照 $y = ax^2 + bx - \frac{5}{3}$ ，根据常数项相等，得 $-5a = -\frac{5}{3}$ 。所以 $a = \frac{1}{3}$ 。

所以 $y = \frac{1}{3}(x+1)(x-5) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$ 。

所以抛物线的对称轴为 $x=2$ ， $G(2, 0)$ ，顶点 C 的坐标为 $(2, -3)$ 。

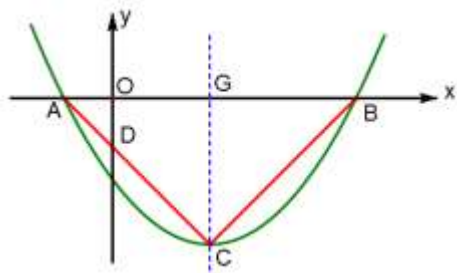


图 2

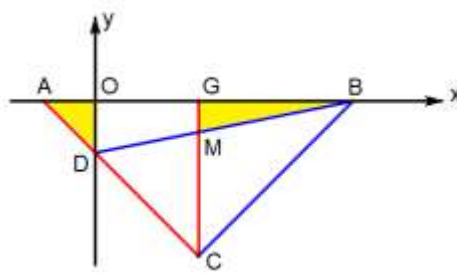


图 3

(2) 如图 3，由 $\frac{OD}{GC} = \frac{AO}{AG} = \frac{1}{3}$ ，得 $OD = \frac{1}{3}GC = 1$ 。所以 $D(0, -1)$ 。

设 GC 与 BD 交于点 M 。

在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 中， $OD=1$ ， $OB=5$ ，所以 $BD = \sqrt{26}$ 。所以 $\frac{GM}{BM} = \frac{OD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{26}}$ 。

如图 4，由 $\triangle HMC \sim \triangle GMB$ ，得 $\frac{MH}{MC} = \frac{MG}{MB}$ 。

又因为 $\angle HMG = \angle CMB$ ，所以 $\triangle HMG \sim \triangle CMB$ 。

例 2018 年上海市静安区中考一模第 25 题

如图 1，四边形 $ABCD$ 中， $0^\circ < \angle BAD \leq 90^\circ$ ， $AD=DC$ ， $AB=BC$ ， AC 平分 $\angle BAD$ 。

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 如图 2，如果点 E 在对角线 AC 上，联结 BE 并延长，交边 DC 于点 G ，交线段 AD 的延长线于点 F （点 F 可与点 D 重合）， $\angle AFB = \angle ACB$ ，设 AB 的长为 a （ a 是常数，且 $a > 0$ ）， $AC = x$ ， $AF = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

(3) 在第 (2) 题的条件下，当 $\triangle CGE$ 是等腰三角形时，求 AC 的长（计算结果用含 a 的代数式表示）。

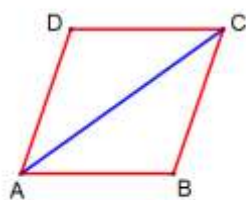


图 1

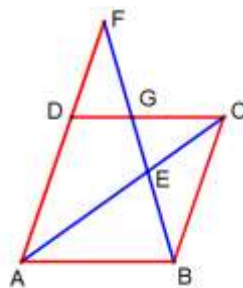


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“18 静安一模 25”，拖动点 D 运动可以改变菱形的形状，可以体验到， $\triangle EAF$ 、 $\triangle ECB$ 、 $\triangle BCA$ 和 $\triangle DCA$ 是底角相等的等腰三角形，它们两两相似。

图文解析

(1) 由 $AD=DC$ ，得 $\angle 1 = \angle 2$ 。由 $AB=BC$ ，得 $\angle 3 = \angle 4$ 。

已知 AC 平分 $\angle BAD$ ，所以 $\angle 1 = \angle 3$ 。

所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ 。所以 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel DC$ 。

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

所以四边形 $ABCD$ 是菱形。

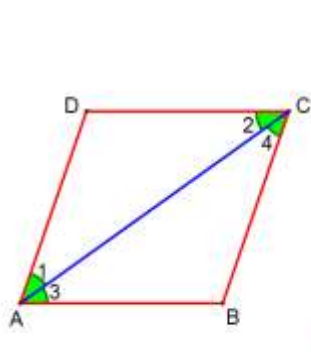


图 3

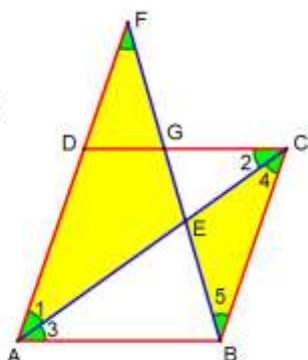


图 4

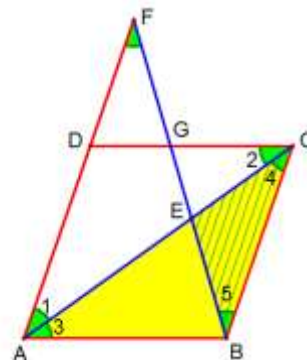


图 5

(2) 因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $\angle F = \angle 5$ 。

已知 $\angle F = \angle 4$ ，所以 $\angle F = \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$ 。

所以 $\triangle AEF \sim \triangle ECB$ ， $\triangle ABC \sim \triangle BEC$ 。

已知菱形的边长为 a ， $AC = x$ ， $AF = y$ ，设 $CE = m$ 。

由 $\frac{AF}{CB} = \frac{AE}{CE}$, 得 $\frac{y}{a} = \frac{x-m}{m}$. 所以 $m = \frac{ax}{y+a}$.

由 $\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{CB}$, 得 $\frac{a}{x} = \frac{m}{a}$. 所以 $m = \frac{a^2}{x}$.

所以 $\frac{ax}{y+a} = \frac{a^2}{x}$. 整理, 得 $y = \frac{x^2 - a^2}{a}$. 定义域是 $\sqrt{2}a \leq x < 2a$.

定义域中 $x = \sqrt{2}a$ 的意义如图 7 所示. 如果 $x = 2a$, 那么 A、B、C 三点共线.

(3) 如图 6, 因为 $\triangle CGE \sim \triangle FBA$, 当 $\triangle CGE$ 是等腰三角形时, $\triangle FBA$ 也是等腰三角形.

分三种情况讨论等腰三角形 FBA . 设 $\angle F = \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \alpha$.

①如图 6, 因为 $\angle FAB = 2\angle F$, 所以不存在 $BA = BF$ 的情况.

②如图 7, 当 $AF = AB$ 时, $\angle ABF = \angle F = \alpha$. 在 $\triangle FAB$ 中, $4\alpha = 180^\circ$.

解得 $\alpha = 45^\circ$. 所以 $\angle FAB = 90^\circ$, $\triangle FAB$ 是等腰直角三角形.

此时四边形 $ABCD$ 是正方形, $AC = \sqrt{2}a$.

③如图 8, 当 $FA = FB$ 时, 由于 $EA = EF$, $EC = EB$, 所以 $AC = FB$.

所以 $FA = AC$, 即 $y = x$.

解方程 $\frac{x^2 - a^2}{a} = x$. 得 $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$, 或 $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}a$ (舍去).

也可以用角来分析: 当 $FA = FB$ 时, $\angle FBA = \angle FAB = 2\alpha$.

在 $\triangle FAB$ 中, $5\alpha = 180^\circ$. 解得 $\alpha = 36^\circ$.

此时 $\triangle FAB$ 、 $\triangle ABE$ 是黄金三角形. 所以 $BE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

所以 $AC = AE + CE = AB + BE = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.

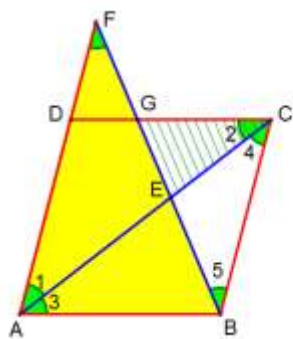


图6

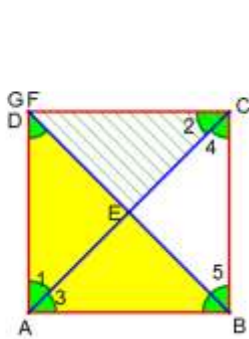


图7

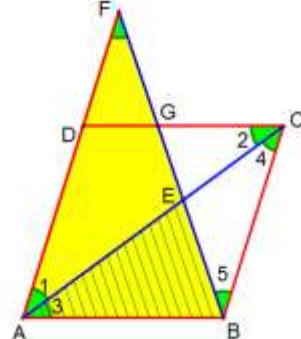


图8

例 2018 年上海市闵行区中考一模第 24 题

抛物线 $y=ax^2+bx+3$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-1, 0)$, $B(\frac{3}{2}, 0)$, 且与 y 轴相交于点 C .

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 求 $\angle ACB$ 的度数;

(3) 设点 D 是所求抛物线第一象限上一点, 且在对称轴的右侧, 点 E 在线段 AC 上, 且 $DE \perp AC$, 当 $\triangle DCE$ 与 $\triangle AOC$ 相似时, 求点 D 的坐标.

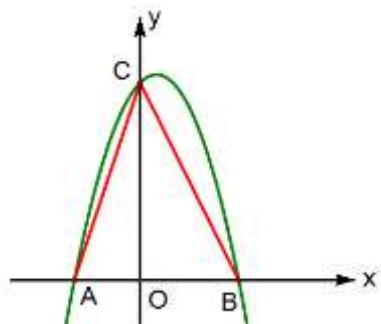


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 闵行一模 24”, 拖动点 E 在 AC 上运动, 保持 $\triangle DCE \sim \triangle CAO$, 可以体验到, 有一个时刻, 点 D 可以落在第一象限内的抛物线上.

图文解析

(1) 因为抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(\frac{3}{2}, 0)$ 两点, 所以 $y = a(x+1)(x-\frac{3}{2})$.

根据常数项相等, 得 $-\frac{3}{2}a = 3$. 所以 $a = -2$.

所以 $y = -2(x+1)(x-\frac{3}{2}) = -2x^2 + x + 3$.

(2) 作 $AH \perp BC$ 于 H .

由 $A(-1, 0)$ 、 $B(\frac{3}{2}, 0)$ 、 $C(0, 3)$, 得 $AC = \sqrt{10}$, $BC = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $AB = \frac{5}{2}$.

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CO = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, 得 $AH = \frac{AB \cdot CO}{BC} = \frac{5}{2} \times 3 \div \frac{3}{2}\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

所以 $\sin \angle ACB = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $\angle ACB = 45^\circ$.

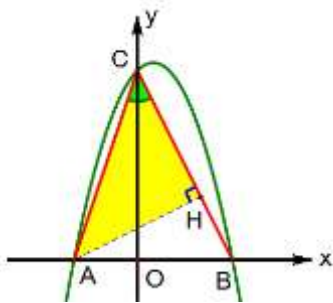


图 2

(3) 如图 3, 过点 E 作 y 轴的平行线 l , 过点 C 、 D 分别作 y 轴的垂线, 分别交直线 l 于 M 、 N .

设 $CM=m$.

由 $\tan \angle MEC = \tan \angle ACO = \frac{1}{3}$, 得 $ME = 3CM = 3m$.

当 $\triangle DCE \sim \triangle CAO$ 时, $\frac{CE}{DE} = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{3}$.

由 $\triangle CME \sim \triangle END$, 得 $\frac{CM}{EN} = \frac{ME}{ND} = \frac{EC}{DE} = \frac{1}{3}$.

所以 $EN = 3CM = 3m$, $ND = 3ME = 9m$.

所以点 D 的坐标可以表示为 $(8m, 3-6m)$.

将点 $D(8m, 3-6m)$ 代入 $y = -2x^2 + x + 3$, 得 $3-6m = -2 \times 64m^2 + 8m + 3$.

解得 $m = \frac{7}{64}$, 或 $m = 0$ (舍去).

所以点 D 的坐标为 $(\frac{7}{8}, \frac{75}{32})$ (如图 4 所示).

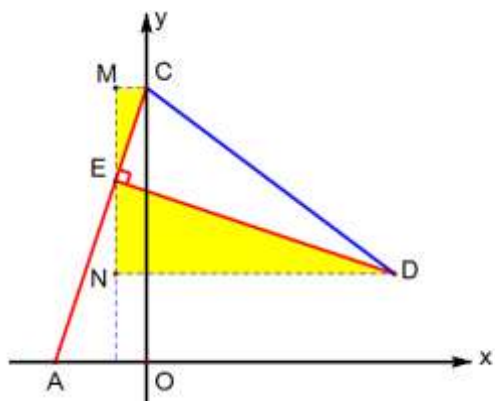


图4

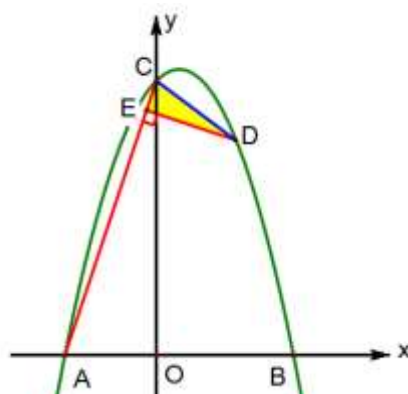


图5

例 2018 年上海市闵行区中考一模第 25 题

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=4$ ， $BC=3$ ， CD 是斜边上的中线，点 E 在边 AC 上，点 F 在边 BC 上，且 $\angle EDA=\angle FDB$ ，联结 EF 、 DC 交于点 G 。

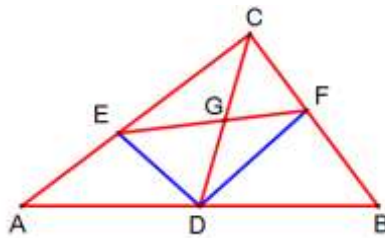


图 1

- (1) 当 $\angle EDF=90^\circ$ 时，求 AE 的长；
- (2) $CE=x$ ， $CF=y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并指出 x 的取值范围；
- (3) 如果 $\triangle CFG$ 是等腰三角形，求 CF 与 CE 的比值。

动感体验

请打开几何画板文件名“18 闵行一模 25”，拖动点 E 运动，可以体验到， $\triangle CFG$ 有三个时刻可以成为等腰三角形，其中 $GC=GF$ 时，点 G 与点 D 重合。

图文解析

- (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=4$ ， $BC=3$ ，所以 $\tan \angle A = \frac{3}{4}$ ， $AB=5$ 。

所以 $CD=AD=BD=\frac{5}{2}$ 。

如图 2，作 $EM \perp AB$ 于 M 。

当 $\angle EDF=90^\circ$ 时， $\angle EDA=45^\circ$ 。

设 $EM=3m$ ，那么 $AM=4m$ ， $AE=5m$ ， $DM=3m$ 。

由 $AD=7m=\frac{5}{2}$ ，得 $m=\frac{5}{14}$ 。所以 $AE=5m=\frac{25}{14}$ 。

- (2) 如图 3，作 $FN \perp AB$ 于 N 。

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中， $AE=4-x$ ，所以 $EM=\frac{3}{5}(4-x)$ ， $AM=\frac{4}{5}(4-x)$ 。

在 $\text{Rt}\triangle BFN$ 中， $BF=3-y$ ，所以 $FN=\frac{4}{5}(3-y)$ ， $BN=\frac{3}{5}(3-y)$ 。

由 $\tan \angle EDA = \tan \angle FDB$ ，得 $\frac{EM}{DM} = \frac{FN}{DN}$ 。所以 $\frac{\frac{3}{5}(4-x)}{\frac{5}{2}-\frac{4}{5}(4-x)} = \frac{\frac{4}{5}(3-y)}{\frac{5}{2}-\frac{3}{5}(4-y)}$ 。

整理，得 $y = \frac{117x-168}{14x+44}$ 。定义域是 $\frac{56}{39} \leq x < 4$ 。

如图 4，当 F 、 C 重合时， $x = \frac{56}{39}$ 。

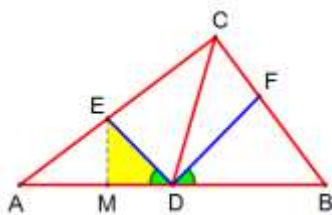


图 2

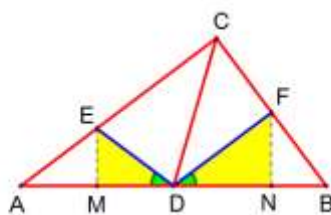


图 3

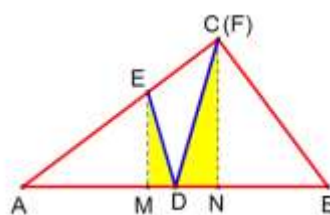


图 4

(3) 在 $\triangle CGF$ 中, $CF=y$, $\angle GCF=\angle B$ 为定值, $\sin \angle GCF=\frac{4}{5}$.

作 $GH \perp BC$ 于 H , 那么 $\frac{CF}{CE} = \frac{HF}{HG}$.

①如图 5, 当 $CG=CF=y$ 时, $HC=\frac{3}{5}y$, $HG=\frac{4}{5}y$.

所以 $HF=y-\frac{3}{5}y=\frac{2}{5}y$. 此时 $\frac{CF}{CE} = \frac{HF}{HG} = \frac{2}{5}y \div \frac{4}{5}y = \frac{1}{2}$.

②如图 6, 当 $FG=FC=y$ 时, 由 $\frac{1}{2}CG = \frac{3}{5}CF$, 得 $CG = \frac{6}{5}CF = \frac{6}{5}y$.

所以 $HC=\frac{3}{5}CG = \frac{18}{25}y$, $HG=\frac{4}{5}CG = \frac{24}{25}y$.

所以 $HF=y-\frac{18}{25}y=\frac{7}{25}y$. 此时 $\frac{CF}{CE} = \frac{HF}{HG} = \frac{7}{25}y \div \frac{24}{25}y = \frac{7}{24}$.

③如图 7, 如果 $GC=GF$, 那么 GH 垂直平分 CF .

所以 $\frac{CF}{CE} = \frac{HF}{HG} = \frac{HC}{HG} = \cot \angle GCF = \frac{3}{4}$. 事实上, 此时点 G 与点 D 重合.

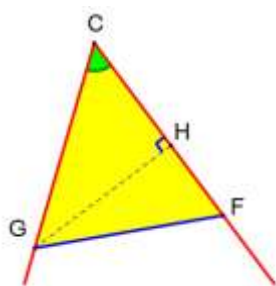


图5

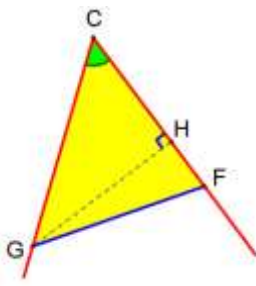


图6

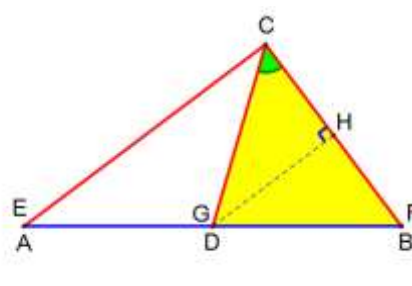


图7

例 2018 年上海市浦东新区中考一模第 24 题

已知抛物线 $y=ax^2+bx+5$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 $B(5, 0)$, 顶点为 M . 点 C 在 x 轴的负半轴上, 且 $AC=AB$, 点 D 的坐标为 $(0, 3)$, 直线 l 经过点 C 、 D .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 是直线 l 在第三象限上的点, 联结 AP , 且线段 CP 是线段 CA 、 CB 的比例中项, 求 $\tan \angle CPA$ 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 联结 AM 、 BM , 在直线 PM 上是否存在点 E , 使得 $\angle AEM = \angle AMB$. 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

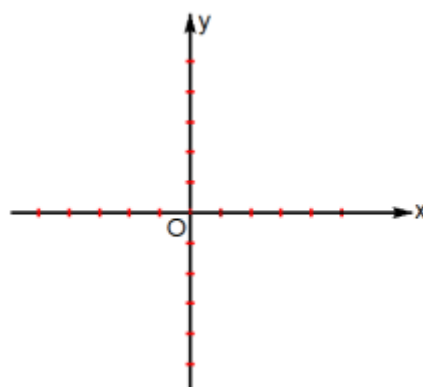


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 浦东一模 24”, 可以体验到, 直线 PM 与 x 轴平行, 符合 $\angle AEM = \angle AMB$ 的点 E 有两个.

图文解析

(1) 因为抛物线与 x 轴交于 $A(1, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 两点, 所以 $y=a(x-1)(x-5)$.

根据常数项相等, 得 $5a=5$. 所以 $a=1$.

所以 $y=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$.

(2) 由 $AC=AB=4$, $A(1, 0)$, 得 $C(0, 3)$.

由 $C(0, 3)$ 、 $D(0, 3)$, 可知直线 l 与 x 轴正半轴的夹角为 45° .

由 $CP^2=CA \cdot CB=4 \times 8=32$, 得 $CP=4\sqrt{2}$.

作 $PH \perp x$ 轴于 H , 那么 $PH=CH=4$. 所以 $AH=8$, $AP=4\sqrt{5}$.

作 $CG \perp AP$ 于 G .

由 $S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \cdot PH = \frac{1}{2} AP \cdot CG$, 得 $CG = \frac{AC \cdot PH}{AP} = \frac{4 \times 4}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin \angle CPA = \frac{CG}{CP} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \div 4\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$. 所以 $\tan \angle CPA = \frac{1}{3}$.

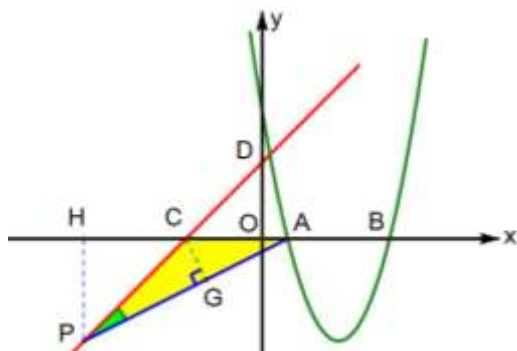


图 2

(3) 第一步, 求 $\tan \angle AMB$.

如图 3, 作 $AN \perp BM$ 于 N .

由 $A(1, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 、 $M(3, -4)$, 得 $S_{\triangle ABM} = 8$, $AM = BM = 2\sqrt{5}$.

由 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} BM \cdot AN = 8$, 得 $AN = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin \angle AMB = \frac{AN}{AM} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \div 2\sqrt{5} = \frac{4}{5}$. 所以 $\tan \angle AMB = \frac{4}{3}$.

第二步, 由 $\tan \angle AEM = \frac{4}{3}$, 求点 E 的坐标.

由 $PH = 4$, $M(3, -4)$, 可知 $PM \parallel x$ 轴.

如图 4, 作 $AQ \perp PM$ 于 Q , 那么 $AQ = 4$. 由 $\tan \angle AEM = \frac{AQ}{EQ} = \frac{4}{3}$, 得 $EQ = 3$.

所以点 E 的坐标为 $(-2, -4)$, 或 $(4, -4)$.

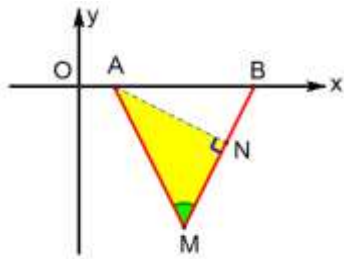


图3

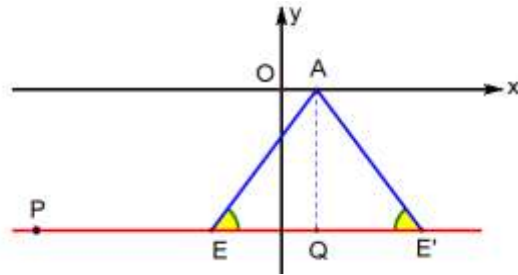


图4

例 2018 年上海市浦东新区中考一模第 25 题

如图 1，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=2$ ， $AC=4$ ，点 D 在射线 BC 上，以点 D 为圆心， BD 为半径画弧交边 AB 于点 E ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 交边 AC 于点 F ，射线 ED 交射线 AC 于点 G 。

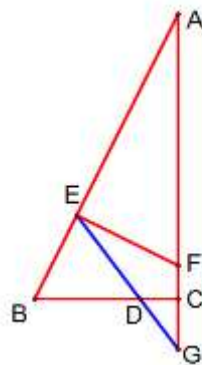


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 浦东一模 25”，拖动点 D 运动，可以体验到， $\triangle EFD$ 有三个时刻可以成为等腰三角形。

图文解析

(1) 如图 2，由 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互余， $\angle A$ 与 $\angle B$ 互余， $\angle 2 = \angle B$ ，得 $\angle 1 = \angle A$ 。又因为 $\angle G$ 的公共角，所以 $\triangle EFG \sim \triangle AEG$ 。

(2) 如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $BC=2$ ， $AC=4$ ，所以 $AB=2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle A = \frac{1}{2}$ 。

由 $\triangle EFG \sim \triangle AEG$ ，得 $\frac{FG}{EG} = \frac{EG}{AG} = \frac{EF}{AE} = \frac{1}{2}$ 。

所以 $EG=2FG=2x$ ， $AG=2EG=4x$ 。所以 $AF=AG-FG=3x$ 。

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $EF = \frac{\sqrt{5}}{5} AF = \frac{3\sqrt{5}}{5} x$ ， $AE = 2EF = \frac{6\sqrt{5}}{5} x$ 。

作 $EM \perp AC$ 于 M 。在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中， $EM = \frac{\sqrt{5}}{5} AE = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5} x = \frac{6}{5} x$ 。

所以 $S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} FG \cdot EM = \frac{1}{2} x \times \frac{6}{5} x = \frac{3}{5} x^2$ 。定义域是 $0 < x \leq \frac{4}{3}$ 。

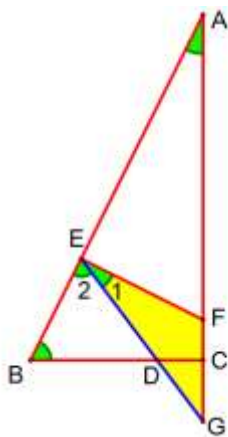


图 2

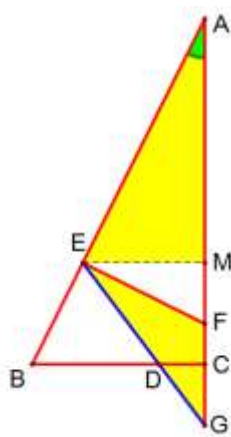


图 3

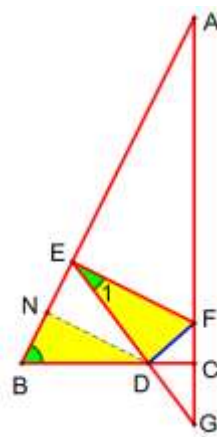


图 4

(3) 第一步, 梳理 $\triangle EFD$.

在 $\triangle EFD$ 中, $\angle FED = \angle A$ 为定值, $\cos \angle FED = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $EF = \frac{3\sqrt{5}}{5}x$.

第二步, 用 x 表示 ED . 如图 4, 作等腰三角形 DBE 的高 DN .

因为 $BE = AB - AE = 2\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5}x$, 所以 $BN = \sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5}x$.

所以 $ED = EB = \sqrt{5}BN = 5 - 3x$.

第三步, 分三种情况讨论等腰三角形 EFD .

①如图 5, 当 $EF = ED$ 时, $\frac{3\sqrt{5}}{5}x = 5 - 3x$. 解得 $x = \frac{25 - 5\sqrt{5}}{12}$.

②如图 6, 当 $DE = DF$ 时, $\frac{1}{2}EF = \frac{2}{\sqrt{5}}ED$. 解方程 $\frac{3\sqrt{5}}{10}x = \frac{2}{\sqrt{5}}(5 - 3x)$, 得 $x = \frac{4}{3}$.

③如图 7, 当 $FE = FD$ 时, $\frac{1}{2}ED = \frac{2}{\sqrt{5}}EF$. 解方程 $\frac{5 - 3x}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{5}}{5}x$, 得 $x = \frac{25}{27}$.

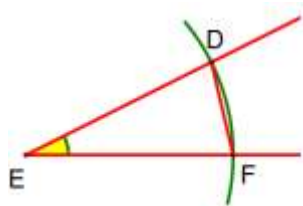


图5

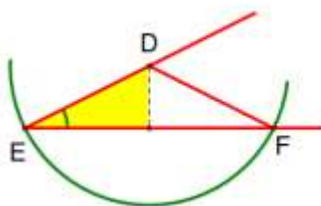


图6

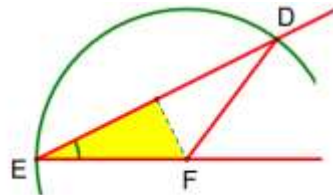


图7

例 2018 年上海市普陀区中考一模第 24 题

如图 10，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2+2ax+c$ （其中 $a、c$ 为常数，且 $a<0$ ）与 x 轴交于点 A ，它的坐标是 $(-3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，此抛物线顶点 C 到 x 轴的距离为 4.

- (1) 求该抛物线的表达式；
- (2) 求 $\angle CAB$ 的正切值；
- (3) 如果点 P 是抛物线上的一点，且 $\angle ABP = \angle CAO$ ，试直接写出点 P 的坐标.

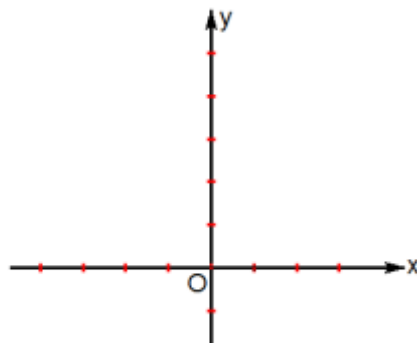


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 普陀一模 24”，可以体验到，有两个点 P ，符合 $\angle ABP = \angle CAO$.

图文解析

(1) 由 $y=ax^2+2ax+c$ ，可知抛物线的对称轴为直线 $x=-1$.

由顶点 C 到 x 轴的距离为 4，可知 $C(-1, 4)$.

设抛物线的顶点式为 $y=a(x+1)^2+4$ ，代入点 $A(-3, 0)$ ，得 $4a+4=0$.

解得 $a=-1$. 所以抛物线的表达式为 $y=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$.

(2) 如图 2，作 $CE \perp y$ 轴于 E .

由 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $C(-1, 4)$ ，可知 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CBE$ 都是等腰直角三角形.

所以 $\angle CBA=90^\circ$. 所以 $\tan \angle CAB = \frac{CB}{BA} = \frac{CE}{BO} = \frac{1}{3}$.

还可以用勾股定理的逆定理求解：

由 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $C(-1, 4)$ ，得 $AB^2=18$ ， $BC^2=2$ ， $AC^2=20$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ABC=90^\circ$. 于是 $\tan \angle CAB = \frac{CB}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$.

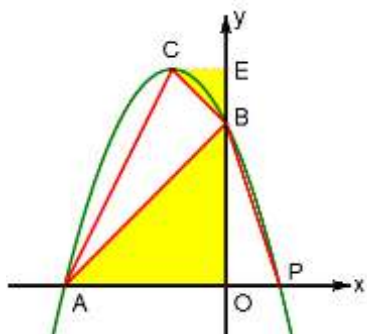


图 2

(3) ①如图 3, 当点 P 在 AB 下方时, 由 $\angle CAO = \angle CAB + \angle BAO = \angle CAB + 45^\circ$, $\angle ABP = \angle OBP + \angle ABO = \angle OBP + 45^\circ$, 可得 $\angle OBP = \angle CAB$.

作 $PM \perp y$ 轴于 M , 那么 $\tan \angle MBP = \frac{1}{3}$. 设点 P 的坐标为 $(x, -x^2 - 2x + 3)$.

由 $\tan \angle MBP = \frac{PM}{BM} = \frac{1}{3}$, 得 $BM = 3PM$. 所以 $3 - (-x^2 - 2x + 3) = 3x$.

解得 $x = 1$, 或 $x = 0$ (舍去). 此时点 P 的坐标为 $(1, 0)$.

②如图 4, 当点 P' 在 AB 上方时, 过点 B 作 y 轴的垂线, 过点 P' 作 x 轴的垂线, 两条垂线相交于点 N .

由 $\angle ABP' = \angle P'BN + \angle ABN = \angle P'BN + 45^\circ$, 得 $\angle P'BN = \angle CAB$.

由 $\tan \angle P'BN = \frac{P'N}{B'N} = \frac{1}{3}$, 得 $BN = 3P'N$. 所以 $-x = 3[(-x^2 - 2x + 3) - 3]$.

解得 $x = -\frac{5}{3}$, 或 $x = 0$ (舍去). 此时点 P' 的坐标为 $(-\frac{5}{3}, \frac{32}{9})$.

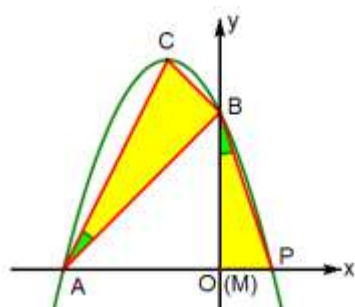


图3

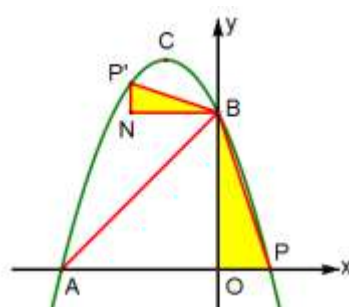


图4

例

2018 年上海市普陀区中考一模第 25 题

如图 1, $\angle BAC$ 的余切值为 2, $AB = 2\sqrt{5}$, 点 D 是线段 AB 上的一动点 (点 D 不与点 A 、 B 重合), 以点 D 为顶点的正方形 $DEFG$ 的另两个顶点 E 、 F 都在射线 AC 上, 且点 F 在点 E 的右侧. 联结 BG , 并延长 BG , 交射线 EC 于点 P .

(1) 点 D 在运动时, 下列的线段和角中, _____ 是始终保持不变的量 (填序号);

① AF ; ② FP ; ③ BP ; ④ $\angle BDG$; ⑤ $\angle GAC$; ⑥ $\angle BPA$;

(2) 设正方形的边长为 x , 线段 AP 的长为 y , 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 如果 $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 但面积不相等, 求此时正方形的边长.

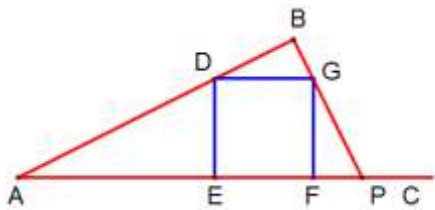
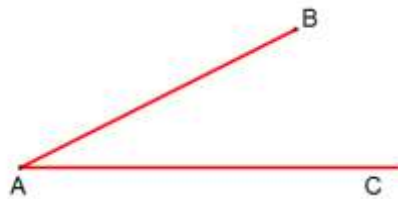


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 普陀一模 25”, 拖动点 D 在 AB 上运动, 可以体验到, $\text{Rt} \triangle GAP$ 的形状是确定的, 有两个时刻, $\angle PGF = \angle GAP$.

图文解析

(1) 始终保持不变的量是④ $\angle BDG$ 和⑤ $\angle GAC$.

(2) 在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $\cot \angle A = \frac{AE}{DE} = 2$, $DE = x$, 所以 $AE = 2x$, $AD = \sqrt{5}x$.

由 $DG \parallel AP$, 得 $\frac{DG}{AP} = \frac{BD}{BA}$.

所以 $\frac{x}{y} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5}x}{2\sqrt{5}}$. 于是得到 $y = \frac{2x}{2-x}$.

定义域是 $1 \leq x < 2$. 定义域中 $x=1$ 的意义如图 3 所示.

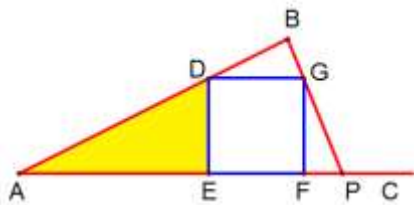


图 2

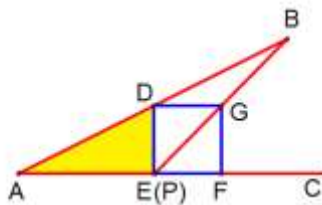


图 3

(3) 如图 4, 在 $\text{Rt} \triangle AFG$ 中, $AF = AE + EF = 3x$, $GF = x$, 所以 $\tan \angle GAF = \frac{1}{3}$.

如果 $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 但面积不相等, 那么 $\tan \angle PGF = \tan \angle GAF = \frac{1}{3}$.

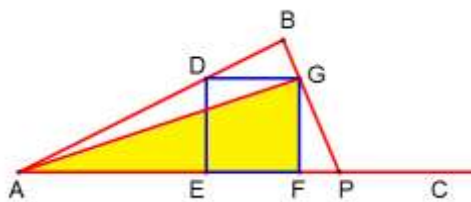


图 4

①如图 5, 当点 P 在点 F 右侧时, $PF=AP-AF=y-3x$.

由 $\frac{y-3x}{x} = \frac{1}{3}$ 和 $y = \frac{2x}{2-x}$, 得 $x = \frac{7}{5}$.

②如图 6, 当点 P 在点 F 左侧时, $PF=AF-AP=3x-y$.

由 $\frac{3x-y}{x} = \frac{1}{3}$ 和 $y = \frac{2x}{2-x}$, 得 $x = \frac{5}{4}$.

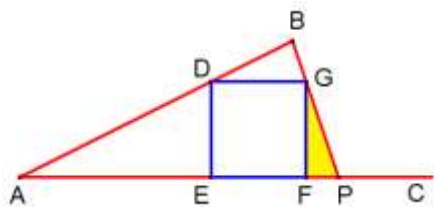


图5

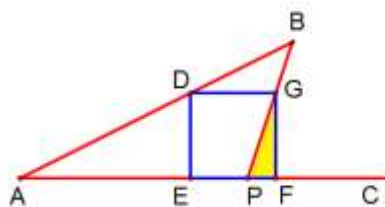


图6

第 (3) 题也可以用相似三角形的传递性来解.

如图 7, 作 $BH \perp AC$ 于 H , 那么在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, 由于 $\cot A = 2$, $AB = 2\sqrt{5}$, 所以 $BH = 2$, $AH = 4$.

如图 4, $\text{Rt}\triangle AFG$ 的形状是确定的, $\tan \angle GAF = \frac{1}{3}$.

如果 $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 但面积不相等, 那么 $\triangle GAF \sim \triangle PGF \sim \triangle PBH$.

所以 $\tan \angle PBH = \frac{PH}{BH} = \frac{1}{3}$. 所以 $PH = \frac{1}{3}BH = \frac{2}{3}$.

①如图 7, 当点 P 在点 H 右侧时, $y = AP = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. 由 $\frac{2x}{2-x} = \frac{14}{3}$, 得 $x = \frac{7}{5}$.

②如图 8, 当点 P 在点 H 左侧时, $y = AP = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$. 由 $\frac{2x}{2-x} = \frac{10}{3}$, 得 $x = \frac{5}{4}$.

感谢网友福建省漳平市林福凯老师提供这个解法.

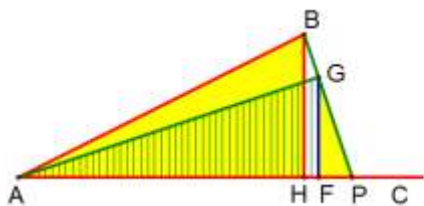


图7

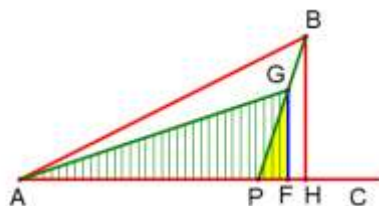


图8

例 2018 年上海市青浦区中考一模第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x=1$.

- (1) 求点 C 的坐标 (用含 a 的代数式表示);
- (2) 联结 AC 、 BC ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 6，求此抛物线的表达式;
- (3) 在第 (2) 小题的条件下，点 Q 为 x 轴正半轴上一点，点 G 与点 C ，点 F 与点 A 关于点 Q 成中心对称，当 $\triangle CGF$ 为直角三角形时，求点 Q 的坐标.

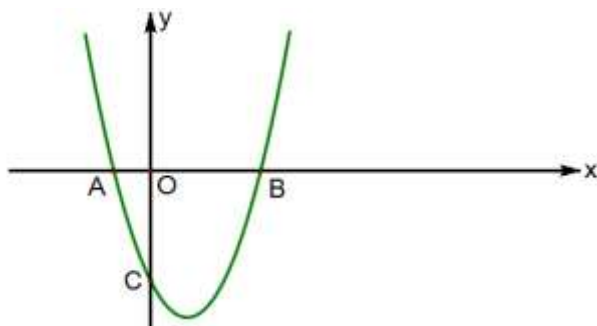


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 青浦一模 24”，拖动点 Q 在 x 轴正半轴上运动，可以体验到，四边形 $ACFG$ 保持平行四边形的形状， $\angle CGF$ 和 $\angle CFG$ 都可以成为直角.

图文解析

- (1) 点 $A(-1,0)$ 关于直线 $x=1$ 对称的点 B 的坐标为 $(3, 0)$.

因为抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点，那么 $y=a(x+1)(x-3)$.

所以点 C 的坐标为 $(0, -3a)$.

- (2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CO = 6$, $AB=4$, 得 $CO=3$. 所以 $C(0, -3)$.

所以 $-3a=-3$. 所以 $a=1$.

所以抛物线的表达式为 $y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$.

- (3) 如图 2，因为点 G 与点 C ，点 F 与点 A 关于点 Q 成中心对称，所以 GC 与 AF 互相平分.

所以四边形 $ACFG$ 是平行四边形.

作 $GH \perp x$ 轴于 H ，那么 $\triangle GHF \cong \triangle COA$, $\triangle GHQ \cong \triangle COQ$.

所以 $GH=CO=3$, $FH=AO=1$, $QH=QO$.

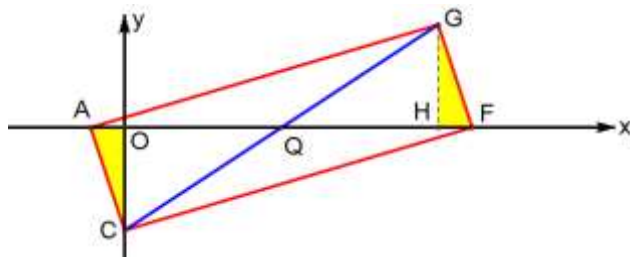
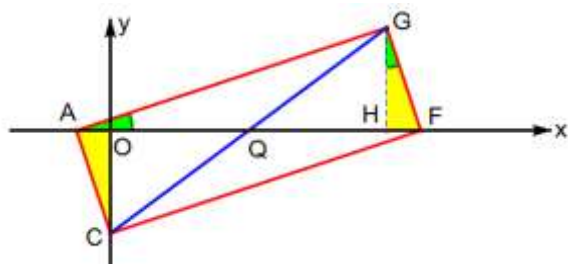


图 2

由 $\tan \angle FGH = \frac{1}{3}$, 得 $\tan \angle GQH = \frac{GH}{QH} = \frac{1}{3}$. 此时 $QH = 3GH = 9$.

②如图 4, 当 $\angle CFG = 90^\circ$ 时, 四边形 $ACFG$ 是矩形. 此时 $\angle GAH = \angle FGH$.

所以 $OH=9-1=8$. 所以 $QO=QH=4$. 所以 $Q(4, 0)$.



43

例 2018 年上海市青浦区中考一模第 25 题

如图 1，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 P 是边 AD 上的动点（点 P 不与点 A ，点 D 重合），点 Q 是边 CD 上一点，联结 PB 、 PQ ，且 $\angle PBC = \angle BPQ$ 。

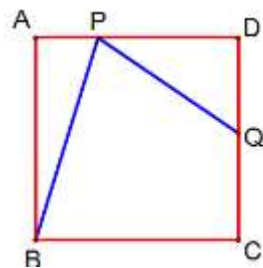


图 1

- (1) 当 $QD = QC$ 时，求 $\angle ABP$ 的正切值；
- (2) 设 $AP = x$ ， $CQ = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式；
- (3) 联结 BQ ，在 $\triangle PBQ$ 中是否存在度数不变的角，若存在，指出这个角，并求出它的度数；若不存在，请说明理由。

动感体验

请打开几何画板文件名“18 青浦一模 25”，拖动点 P 在 AD 上运动，可以体验到， $\triangle BPA$ 与 $\triangle BPH$ 保持全等， $\triangle BQH$ 与 $\triangle BQC$ 保持全等， $\angle PBQ$ 保持 45° 。

图文解析

(1) 如图 2，由 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle BPA = \angle PBC$ 。

又已知 $\angle PBC = \angle BPQ$ ，所以 $\angle BPA = \angle BPQ$ 。

如图 3，联结 BQ 。作 $BH \perp PQ$ 于 H 。

因为 $\angle A = \angle BHP = 90^\circ$ ， $\angle BPA = \angle BPH$ ， BP 是公共边，所以 $\triangle BPA \cong \triangle BPH$ 。

所以 $AP = HP$ ， $BA = BH$ 。所以 $BH = BC$ 。

又因为 BQ 是公共边，所以 $\text{Rt}\triangle BQH \cong \text{Rt}\triangle BQC$ 。所以 $QH = QC$ 。

设 $AP = x$ 。当 $QD = QC = 1$ 时，在 $\text{Rt}\triangle PDQ$ 中， $PQ = x + 1$ ， $PD = 2 - x$ 。

由勾股定理，得 $(x + 1)^2 = (2 - x)^2 + 1^2$ 。解得 $x = \frac{2}{3}$ 。所以 $\tan \angle ABP = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ 。

(2) 如图 4，在 $\text{Rt}\triangle PDQ$ 中， $PQ = x + y$ ， $PD = 2 - x$ ， $QD = 2 - y$ 。

由勾股定理，得 $(x + y)^2 = (2 - x)^2 + (2 - y)^2$ 。

整理，得 $y = \frac{4 - 2x}{2 + x}$ 。

(3) 如图 5，由 $\triangle BPA \cong \triangle BPH$ ，得 $\angle PBA = \angle PBH = \alpha$ 。

由 $\triangle BQH \cong \triangle BQC$ ，得 $\angle QBH = \angle QBC = \beta$ 。

所以 $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ 。所以 $\alpha + \beta = 45^\circ$ 。

所以 $\angle PBQ = 45^\circ$ 为定值。

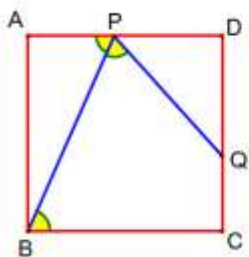


图2

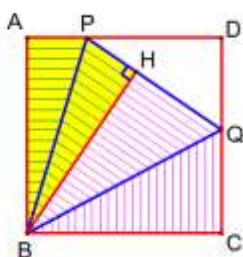


图3

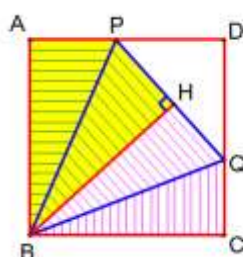


图4

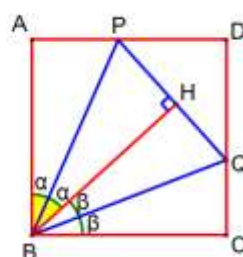


图5

例 2018 年上海市松江区中考一模第 24 题

如图 1，在平面直角坐标中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$ ，抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），且 $AB=4$ 。又 P 是抛物线上位于第一象限的点，直线 AP 与 y 轴交于点 D ，与对称轴交于点 E 。设点 P 的横坐标为 t 。

(1) 求点 A 的坐标和抛物线的表达式；

(2) 当 $AE:EP=1:2$ 时，求点 E 的坐标；

(3) 记抛物线的顶点为 M ，与 y 轴的交点为 C ，当四边形 $CDEM$ 是等腰梯形时，求 t 的值。

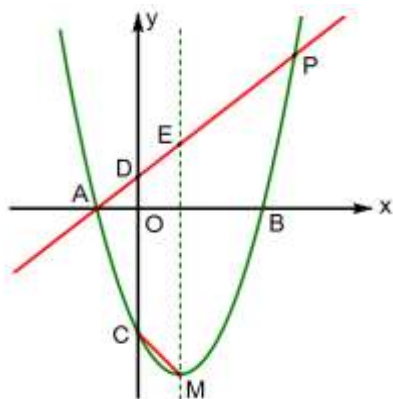


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 松江一模 24”，拖动点 P 运动，可以体验到， $\angle CME=45^\circ$ 是确定的，当四边形 $CDEM$ 是等腰梯形时， $\angle DEM=\angle CME$ ，此时直线 AP 与 x 轴的夹角为 45° 。

图文解析

(1) 由 $AB=4$ ， AB 的中点为 $(1, 0)$ ，可得 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 。

因为抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，

所以 $y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$ 。

(2) 如图 2，设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 G 。

作 $PH \perp x$ 轴于 H 。

当 $\frac{AE}{EP} = \frac{1}{2}$ 时， $\frac{AE}{AP} = \frac{1}{3}$ 。

由 $\frac{AG}{AH} = \frac{AE}{AP} = \frac{1}{3}$ ，得 $AH=3AG=6$ 。

所以 $OH=5$ ，即点 P 的横坐标为 5。

由 $f(5)=(x+1)(x-3)=12$ ，得 $P(5, 12)$ ， $PH=12$ 。

由 $\frac{EG}{PH} = \frac{AE}{AP} = \frac{1}{3}$ ，得 $EG = \frac{1}{3}PH = 4$ 。

所以点 E 的坐标为 $(1, 4)$ 。

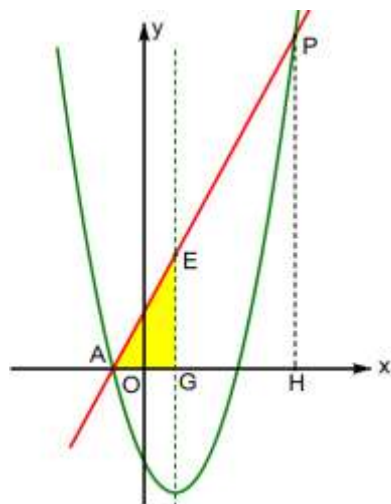


图 2

(3) 如图 3, 由 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$, 得 $C(0,-3)$, $M(1,-4)$.
 所以 C 、 M 两点间的水平距离和竖直距离都是 1, 所以 $\angle CME=45^\circ$.
 如果四边形 $CDEM$ 是等腰梯形, 那么 $\angle DEM=45^\circ$.
 所以直线 AP 与 x 轴正半轴的夹角为 45° . 所以 $PH=AH$.
 点 P 的坐标可以表示为 (t, t^2-2t-3) , 所以 $t^2-2t-3=t+1$.
 解得 $t=4$, 或 $t=-1$ (与 A 重合, 舍去).
 所以点 P 的坐标为 $(4, 5)$.

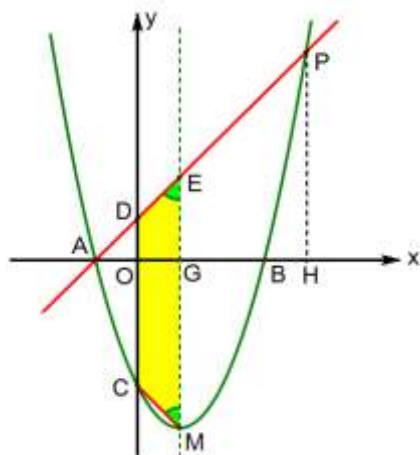


图3

例 2018 年上海市松江区中考一模第 25 题

如图 1，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=1$ ， $BC=2$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交边 AB 于点 D ， P 是射线 CD 上一点，联结 AP 。

- (1) 求线段 CD 的长；
- (2) 当点 P 在 CD 的延长线上，且 $\angle PAB=45^\circ$ 时，求 CP 的长；
- (3) 记点 M 为边 AB 的中点，联结 CM 、 PM ，若 $\triangle CMP$ 是等腰三角形，求 CP 的长。

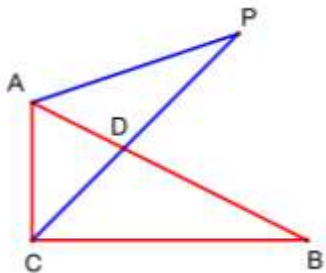
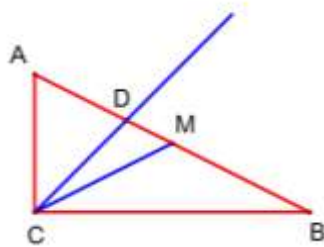


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 松江一模 25”，拖动点 P 运动，可以体验到， $\triangle CMP$ 有三个时刻可以成为等腰三角形。

图文解析

- (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=1$ ， $BC=2$ ，所以 $AB=\sqrt{5}$ ， $\tan \angle A=2$ 。

如图 2，在 $\triangle ACD$ 中， $\tan \angle A=2$ ， $AC=1$ ， $\angle ACD=45^\circ$ 。

作 $DH \perp AC$ 于 H 。

设 $AH=m$ ，那么 $DH=2m$ ， $CH=2m$ 。所以 $AD=\sqrt{5}m$ ， $CD=2\sqrt{2}m$ 。

由 $AC=3m=1$ ，得 $m=\frac{1}{3}$ 。所以 $CD=2\sqrt{2}m=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 。

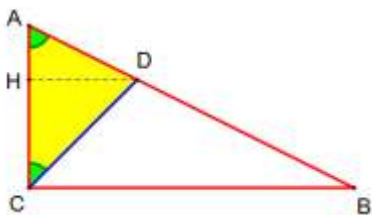


图 2

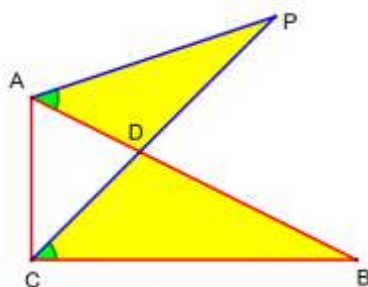


图 3

- (2) 如图 2，由 $AD=\sqrt{5}m=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，得 $BD=AB-AD=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 。

如图 3，由 $\angle DAP=\angle DCB$ ， $\angle ADP=\angle CDB$ ，得 $\triangle DAP \sim \triangle DCB$ 。

所以 $\frac{PD}{BD}=\frac{AD}{CD}=\frac{\sqrt{5}m}{2\sqrt{2}m}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ 。所以 $PD=\frac{\sqrt{10}}{4}BD=\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$ 。

$$\text{所以 } CP = CD + PD = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(3) 第一步, 用面积法求 $\cos \angle PCM$.

如图 4, 由 $CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $AD = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, 得 $DM = \frac{1}{6}\sqrt{5}$. 所以 $DM = \frac{1}{6}AB$.

由于 $\triangle CDM$ 与 $\triangle CAB$ 是同高三角形, 所以 $S_{\triangle CDM} = \frac{1}{6}S_{\triangle CAB} = \frac{1}{6}$.

作 $\triangle CDM$ 的边 CD 上的高 MN , 那么 $\frac{1}{2}CD \cdot MN = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot DN = \frac{1}{6}$.

解得 $MN = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 所以 $\sin \angle PCM = \frac{\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$. 所以 $\cos \angle PCM = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

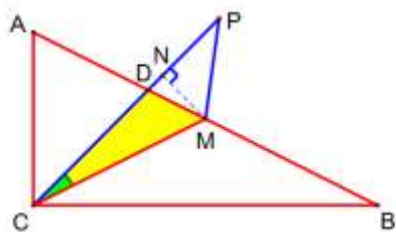


图 4

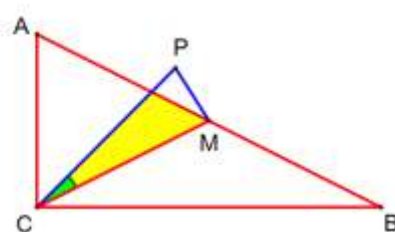


图 5

第二步, 分三种情况讨论等腰三角形 CMP .

①如图 5, $CP = CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

②如图 6 所示, 当 $MC = MP$ 时, $\frac{1}{2}CP = CM \cos \angle C$. 所以 $CP = \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

③如图 7 所示, 当 $PC = PM$ 时, $\frac{1}{2}CM = CP \cos \angle C$.

解 $\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{10}CP$, 得 $CP = \frac{5\sqrt{2}}{12}$.

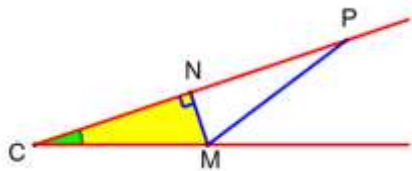


图 6

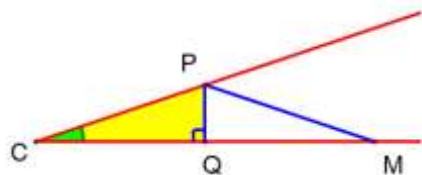


图 7

例 2018 年上海市徐汇区中考一模第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系中，直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 沿着 y 轴向上平移 3 个单位长度后，与 x 轴交于点 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 过点 B 、 C 且与 x 轴的另一个交点为 A 。

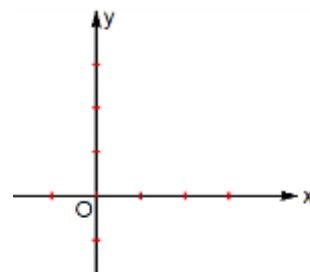


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 徐汇一模 24”，可以体验到， $\angle CBO = \angle DBO = 45^\circ$ ， $\triangle DBC$ 是直角三角形。

图文解析

(1) 如图 2，由 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，得直线 BC 的表达式为 $y = -x + 3$ 。

因为抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $B(3, 0)$ ，设 $y = (x-3)(x-x_2)$ 。

代入点 $C(0, 3)$ ，得 $3x_2 = 3$ 。解得 $x_2 = 1$ 。

所以 $y = (x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ 。所以顶点 D 的坐标为 $(2, -1)$ 。

(2) 如图 3，由 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $D(2, -1)$ ，可得 $\angle CBO = \angle DBO = 45^\circ$ ， $BC = 3\sqrt{2}$ ， $BD = \sqrt{2}$ 。

所以 $\angle CBD = 90^\circ$ 。所以 $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$ 。

(3) 作 $DM \perp y$ 轴于 M ，作 $FN \perp CD$ 于 N 。

在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中， $DM = 2$ ， $CM = 4$ ，所以 $CD = 2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle DCM = \frac{1}{2}$ 。

在 $\triangle CDF$ 中， $\angle CDF = 45^\circ$ ，设高 $FM = m$ ，那么 $CN = 2m$ ， $CF = \sqrt{5}m$ ， $DN = m$ 。

由 $CD = 3m = 2\sqrt{5}$ ，得 $m = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ 。所以 $CF = \sqrt{5}m = \frac{10}{3}$ 。

所以 $OF = CF - CO = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$ 。所以 $F(0, -\frac{1}{3})$ 。

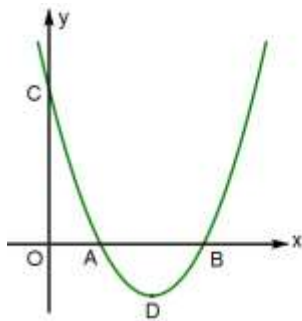


图 2

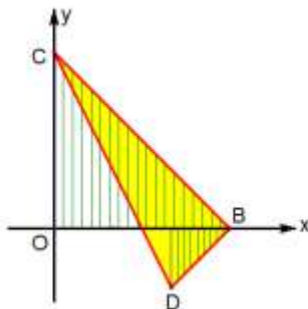


图 3

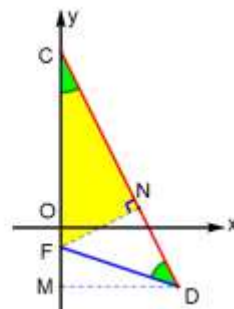


图 4

例 2018 年上海市徐汇区中考一模第 25 题

已知：在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ， $AB = 4$ ， $BC = 5$ ，在射线 BC 上任取一点 M ，联结 DM ，作 $\angle MDN = \angle BDC$ ， $\angle MDN$ 的另一边 DN 交直线 BC 于点 N （点 N 在点 M 的左侧）。

(1) 当 BM 的长为 10 时，求证： $BD \perp DM$ ；

(2) 如图 (1)，当点 N 在线段 BC 上时，设 $BN = x$ ， $BM = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域；

(3) 当 $\triangle DMN$ 是等腰三角形时，求 BN 的长。

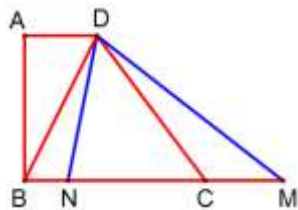
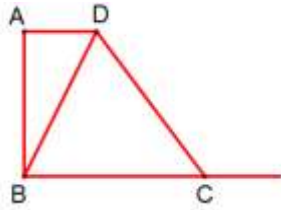


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 徐汇一模 25”，拖动点 N 在直线 BC 上运动，可以体验到， $\triangle MDN$ 与 $\triangle MBD$ 保持相似，等腰三角形 MBD 存在三种情况。

图文解析

(1) 如图 2，作 $DH \perp BC$ 于 H 。

在 $\text{Rt}\triangle DHC$ 中， $HC = 5 - 2 = 3$ ， $DH = 4$ ，所以 $DC = 5$ 。所以 $DC = BC = 5$ 。

如图 3，当 $BM = 10$ 时， $CB = CM = CD = 5$ 。

所以点 D 在以 BM 为直径的圆 C 上。所以 $\angle BDM = 90^\circ$ ，即 $BD \perp DM$ 。

【证法二】如图 4，由 $\tan \angle BDH = \tan \angle M = \frac{1}{2}$ ，得 $\angle BDH = \angle M$ 。

又因为 $\angle M$ 与 $\angle MDH$ 互余，所以 $\angle BDH$ 与 $\angle MDH$ 。所以 $BD \perp DM$ 。

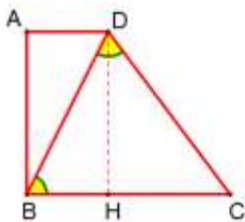


图 2

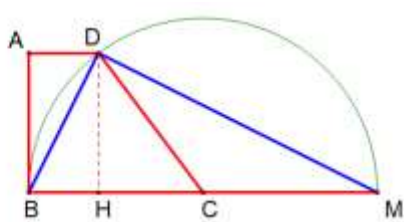


图 3

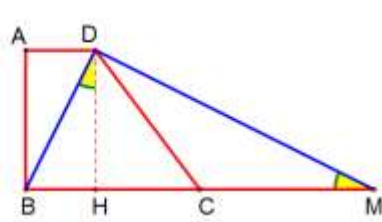


图 4

(2) 如图 2，由 $BC = DC$ ，得 $\angle DBC = \angle BDC$ 。

如图 5，因为 $\angle MDN = \angle BDC$ ，所以 $\angle DBC = \angle MDN$ 。

又因为 $\angle DMB$ 是公共角，所以 $\triangle MDN \sim \triangle MBD$ 。

所以 $\frac{MD}{MN} = \frac{MB}{MD}$ 。所以 $MD^2 = MB \cdot MN = y(y - x)$ 。

如图 6， $MD^2 = DH^2 + MH^2 = 4^2 + (y - 2)^2 = y^2 - 4y + 20$ ，所以 $y^2 - 4y + 20 = y(y - x)$ 。

整理，得 $y = \frac{20}{4 - x}$ 。定义域是 $0 \leq x < 4$ 。如图 7，当 $x = 4$ 时， $DM \parallel BC$ 。

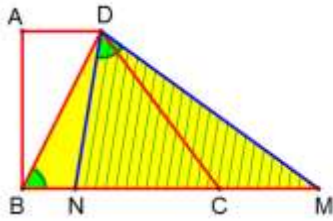


图 5

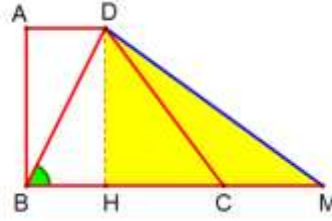


图 6

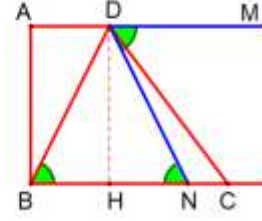


图 7

(3) 因为 $\triangle MDN \sim \triangle MBD$ ，当 $\triangle MDN$ 是等腰三角形时， $\triangle MBD$ 也是等腰三角形。

在 $\triangle MBD$ 中， $BD = 2\sqrt{5}$ ， $\cos \angle DBM = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $BM = y = \frac{20}{4-x}$ 。

分三种情况讨论等腰三角形 MBD ：

①如图 8，当 $BM = BD = 2\sqrt{5}$ 时， $\frac{20}{4-x} = 2\sqrt{5}$ 。

解得 $x = 4 - 2\sqrt{5} < 0$ 。此时点 N 在点 B 的左侧， $BN = 2\sqrt{5} - 4$ 。

②如图 9，当 $DM = DB$ 时，点 D 在 BM 的垂直平分线上，此时 $BM = 2BH = 4$ 。

解方程 $\frac{20}{4-x} = 4$ ，得 $x = -1$ 。此时点 N 在点 B 的左侧， $BN = 1$ 。

③如图 10，当 $MB = MD$ 时，点 M 在 BD 的垂直平分线上， $\frac{1}{2}BD = BM \cdot \cos \angle B$ 。

解方程 $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{20}{4-x}$ ，得 $x = 0$ 。此时点 N 与点 B 重合， $BN = 0$ 。

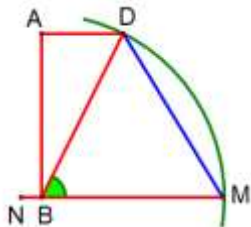


图 8

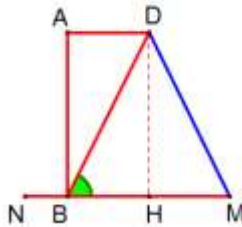


图 9

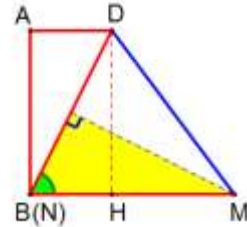


图 10

例 2018 年上海市杨浦区中考一模第 24 题

在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + 2mx - m^2 - m + 1$ 与 y 轴交于点 A ，顶点为 D ，对称轴与 x 轴交于点 H 。

(1) 求顶点 D 的坐标（用含 m 的代数式表示）；

(2) 当抛物线过点 $(1, -2)$ ，且不经第一象限时，平移此抛物线到抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 的位置，求平移的方向和距离；

(3) 当抛物线顶点 D 在第二象限时，如果 $\angle ADH = \angle AHO$ ，求 m 的值。

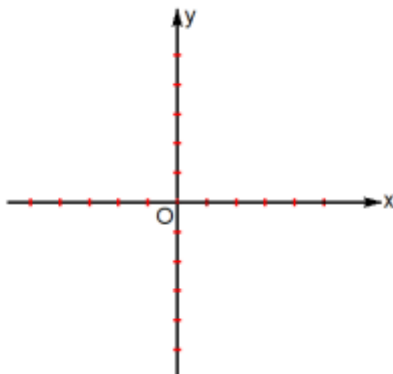


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 杨浦一模 24”，可以体验到，经过点 $(1, -2)$ 的抛物线有两条，其中一条不经第一象限。

图文解析

(1) 由 $y = -x^2 + 2mx - m^2 - m + 1 = -(x-m)^2 - m + 1$ ，得顶点 $D(m, -m+1)$ 。

(2) 点 A 的坐标可以表示为 $(0, -m^2 - m + 1)$ 。

将点 $(1, -2)$ 代入 $y = -x^2 + 2mx - m^2 - m + 1$ ，得 $-2 = -1 + 2m - m^2 - m + 1$ 。

整理，得 $m^2 - m - 2 = 0$ 。解得 $m = 2$ ，或 $m = -1$ 。

①如图 2，当 $m = 2$ 时，顶点为 $D(2, -1)$ ，抛物线与 y 轴的交点为 $A(0, -5)$ 。

因为抛物线开口向下，所以抛物线不经第一象限。

②如图 3，当 $m = -1$ 时，顶点为 $D(-1, 2)$ ，抛物线与 y 轴的交点为 $A(0, 1)$ 。

因为抛物线开口向下，所以抛物线经过第一象限，不符合题意。

如图 4，由 $y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ ，得平移后的抛物线的顶点为 $(1, 1)$ 。

比较点 $D(2, -1)$ 和点 $(1, 1)$ ，可知原抛物线先向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，可以得到新的抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 。

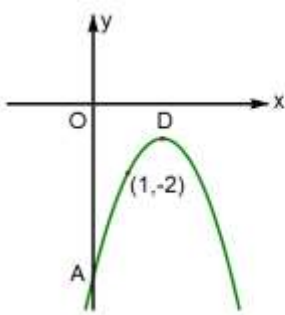


图 2

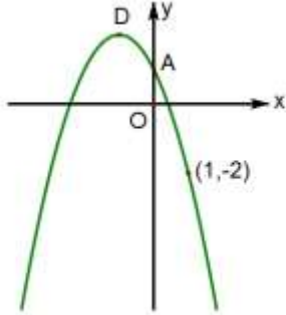


图 3

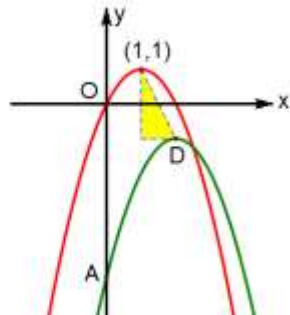


图 4

(3) 如图 5, 作 $DM \perp y$ 轴于 M , 那么 $\angle ADH = \angle DAM$.

如果 $\angle ADH = \angle AHO$, 那么 $\angle DAM = \angle AHO$.

由 $\tan \angle DAM = \tan \angle AHO$, 得 $\frac{DM}{AM} = \frac{AO}{HO}$.

由 $A(0, -m^2 - m + 1)$ 、 $D(m, -m + 1)$, 可得 $AM = (-m + 1) - (-m^2 - m + 1) = m^2$.

①如图 5, 当点 A 在 x 轴上方时, $\frac{-m}{m^2} = \frac{-m^2 - m + 1}{-m}$.

整理, 得 $m^2 + m = 0$.

解得 $m = -1$, 或 $m = 0$ (点 D 在 y 轴上, 舍去).

②如图 6, 当点 A 在 x 轴下方时, $\frac{-m}{m^2} = \frac{m^2 + m - 1}{-m}$.

整理, 得 $m^2 + m - 2 = 0$.

解得 $m = -2$, 或 $m = 1$ (点 D 在第一象限, 舍去).

综上所述, 当 $m = -1$, 或 $m = -2$ 时, $\angle ADH = \angle AHO$.

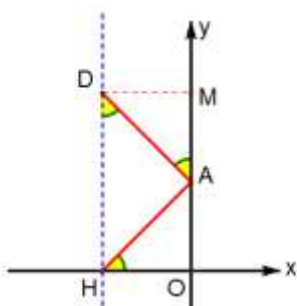


图5

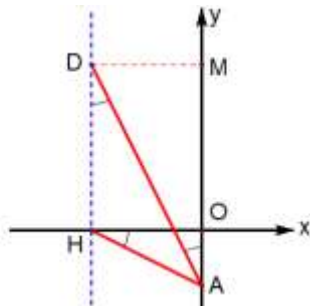


图6

例 2018 年上海市杨浦区中考一模第 25 题

已知：矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=3$ ，点 M 、 N 分别在边 AB 、 CD 上，直线 MN 交矩形对角线 AC 于点 E ，将 $\triangle AME$ 沿直线 MN 翻折，点 A 落在点 P 处，且点 P 在射线 CB 上。

- (1) 如图 1，当 $EP \perp BC$ 时，求 CN 的长；
- (2) 如图 2，当 $EP \perp AC$ 时，求 AM 的长；
- (3) 请写出线段 CP 的长的取值范围，及当 CP 的长最大时 MN 的长。

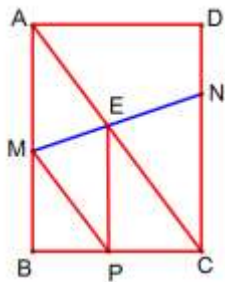


图 1

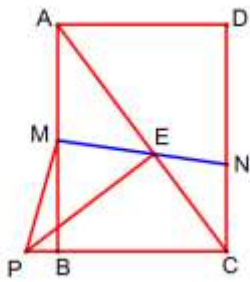
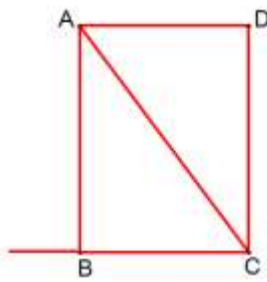


图 2



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 杨浦一模 25”，拖动点 P 在射线 CB 上运动，可以体验到，当点 P 与点 C 重合时， E 是 AC 的中点；当 CP 取得最大值时，点 E 与点 C 重合，此时 N 、 C 、 E 三点重合， $CP=CA$ 。

图文解析

- (1) 如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $BC=3$ ，所以 $AC=5$ 。

$$\text{所以 } \sin \angle ACB = \frac{4}{5}, \tan \angle ACB = \frac{4}{3}.$$

当 $EP \perp BC$ 时， $EP \parallel AB$ 。所以 $\angle 1 = \angle 3$ 。

因为 $\triangle AME$ 与 $\triangle PME$ 关于直线 MN 对称，所以 $\angle 1 = \angle 2$ ， $AM = PM$ ， $AE = PE$ 。

所以 $\angle 2 = \angle 3$ 。所以 $PM = PE$ 。

所以 $AM = PM = PE = PE$ 。所以四边形 $AMPE$ 是菱形。

$$\text{设菱形 } AMPE \text{ 的边长为 } m, \text{ 那么 } \frac{AE}{CE} = \frac{PE}{CE} = \sin \angle ACB = \frac{4}{5}.$$

$$\text{所以 } \frac{AE}{AC} = \frac{4}{9}. \text{ 所以菱形的边长 } AE = \frac{4}{9} \times 5 = \frac{20}{9}.$$

$$\text{由 } \frac{AM}{CN} = \frac{AE}{CE} = \frac{4}{5}, \text{ 得 } CN = \frac{5}{4} AM = \frac{5}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{25}{9}.$$

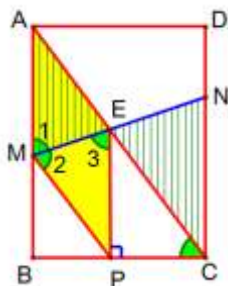


图 3

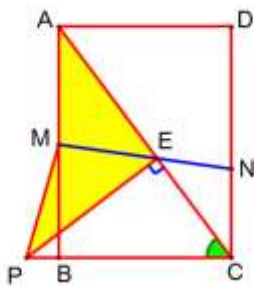


图 4

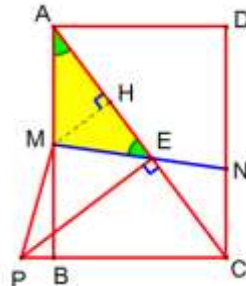


图 5

(2) 如图 4, 当 $EP \perp AC$ 时, $\frac{AE}{CE} = \frac{PE}{CE} = \tan \angle ACB = \frac{4}{3}$.

所以 $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{7}$. 所以 $AE = \frac{4}{7} \times 5 = \frac{20}{7}$.

如图 5, 作 $MH \perp AE$ 于 H .

在 $\triangle AME$ 中, $\tan \angle MAE = \frac{3}{4}$, $\angle AEM = 45^\circ$, $AE = \frac{20}{7}$.

设高 $MH = 3m$, 那么 $AH = 4m$, $AM = 5m$, $EM = 3m$.

由 $AE = 7m = \frac{20}{7}$, 得 $m = \frac{20}{49}$. 所以 $AM = 5m = \frac{100}{49}$.

(3) 线段 CP 的长的取值范围是 $0 \leq CP \leq 5$.

①如图 6, 当点 E 在 AC 的中点时, $CE = AE = PE$. 此时 C 、 P 重合, $CP = 0$.

②如图 7, 当点 E 与点 C 重合时, $CP = CA = 5$. 此时 N 、 C 、 E 重合.

当 $CP = 5$ 时, 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $BP = 5 - 3 = 2$, $AB = 4$, 所以 $\tan \angle PAB = \frac{1}{2}$.

延长 CM 交 AP 于点 F , 根据三线合一, 可知 $CF \perp AP$.

根据同角的余角相等, 得 $\angle PCF = \angle PAB$.

在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, $BC = 3$, $\tan \angle BCM = \frac{1}{2}$, 所以 $BM = \frac{3}{2}$.

所以 $MC = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, 即 $MN = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

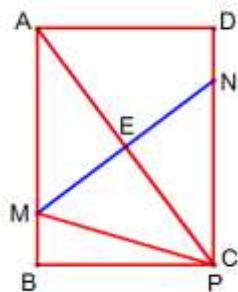


图6

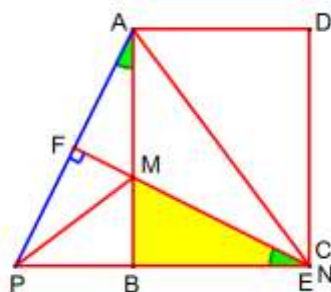


图7

例

2018 年上海市长宁区中考一模第 24 题

在直角坐标平面内，直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 C 。抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 A 与点 C ，且与 x 轴的另一个交点为点 B 。点 D 在该抛物线上，且位于直线 AC 的上方。

- (1) 求上述抛物线的表达式；
- (2) 联结 BC 、 BD ，且 BD 交 AC 于点 E ，如果 $\triangle ABE$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $4:5$ ，求 $\angle DBA$ 的余弦值；
- (3) 过点 D 作 $DF \perp AC$ ，垂足为点 F ，联结 CD 。若 $\triangle CFD$ 与 $\triangle AOC$ 相似，求点 D 的坐标。

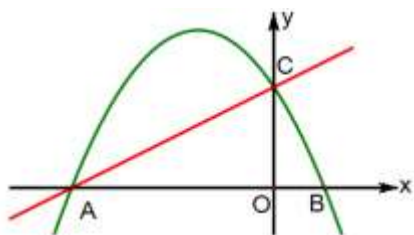
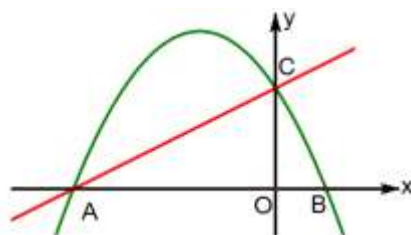


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18 长宁一模 24”，拖动点 D 在第二象限内的抛物线上运动，可以体验到， $\triangle CFD$ 与 $\triangle AOC$ 相似，存在两种情况，其中一种情况是 $DC \parallel x$ 轴。

图文解析

(1) 由 $y = \frac{1}{2}x + 2$ ，得 $A(-4, 0)$ ， $C(0, 2)$ 。

设抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}(x+4)(x-x_2)$ 。代入点 $C(0, 2)$ ，得 $2x_2 = 2$ 。

所以 $x_2 = 1$ 。所以 $y = -\frac{1}{2}(x+4)(x-1) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$ 。

(2) 如图 2， $\triangle ABE$ 与 $\triangle ABC$ 是同高三角形，所以 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{4}{5}$ 。

如图 3，作 $EH \perp x$ 轴于 H ，那么 $\frac{AE}{AC} = \frac{EH}{CO} = \frac{AH}{AO} = \frac{4}{5}$ 。

所以 $EH = \frac{4}{5}CO = \frac{8}{5}$ ， $AH = \frac{4}{5}AO = \frac{16}{5}$ 。所以 $OH = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$ 。

所以 $BH = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$ 。所以 $\cot \angle DBA = \frac{BH}{EH} = \frac{9}{5} \div \frac{8}{5} = \frac{9}{8}$ 。

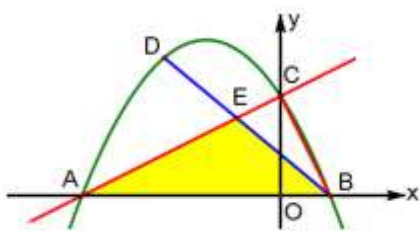


图 2

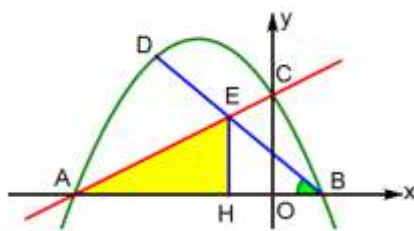


图 3

(3) 若 $\triangle CFD$ 与 $\triangle AOC$ 相似, 那么存在两种情况:

①如图 4, 当 $\angle DCF = \angle A$ 时, $DC \parallel x$ 轴. 所以 D 、 C 关于抛物线的对称轴对称.

此时点 D 的坐标为 $(-3, 2)$.

②如图 5, 当 $\angle CDF = \angle A$ 时, $\frac{CF}{DF} = \frac{CO}{AO} = \frac{1}{2}$.

过点 F 作 x 轴的平行线交 y 轴于 M , 过点 D 作 x 轴的垂线交 FM 于 N , 那么 $\triangle CMF \sim \triangle FND$, 且相似比为 $1:2$.

设 $CM = m$, 那么 $FM = 2m$, $FN = 2m$, $DN = 4m$. 所以 $D(-4m, 2+3m)$.

将点 $D(-4m, 2+3m)$ 代入 $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$, 得 $2+3m = -8m^2 + 6x + 2$.

解得 $m = \frac{3}{8}$. 所以点 D 的坐标为 $(-\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$.

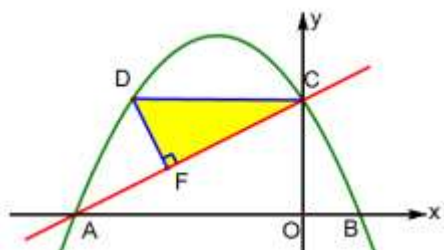


图4

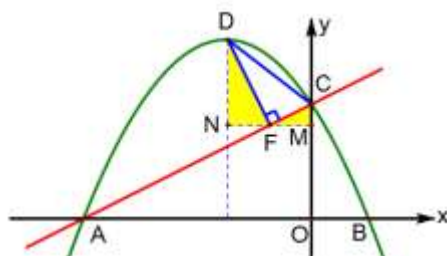


图5

例 2018 年上海市长宁区中考一模第 25 题

已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $AD=4$, P 是对角线 BD 上的一个动点 (点 P 不与点 B 、 D 重合), 过点 P 作 $PF \perp BD$, 交射线 BC 于点 F . 联结 AP , 画 $\angle FPE = \angle BAP$, PE 交 BF 于点 E . 设 $PD=x$, $EF=y$.

- (1) 当点 A 、 P 、 F 在一条直线上时, 求 $\triangle ABF$ 的面积;
- (2) 如图 1, 当点 F 在边 BC 上时, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出函数定义域;
- (3) 联结 PC , 若 $\angle FPC = \angle BPE$, 请直接写出 PD 的长.

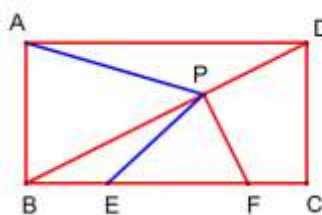


图 1

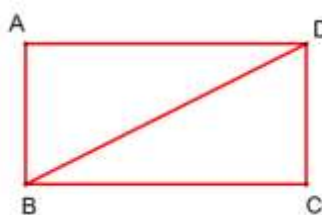


图 2

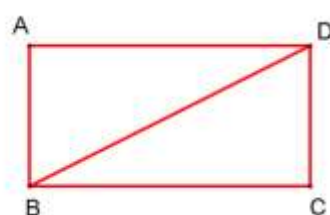


图 3

动感体验

请打开几何画板文件名“18 长宁一模 25”, 拖动点 P 在 BD 上运动, 可以体验到, $\triangle ABP$ 与 $\triangle PFE$ 保持相似.

图文解析

- (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB=2$, $AD=4$, 所以 $BD=2\sqrt{5}$, $\tan \angle ABD=2$.

如图 2, 过点 A 作 BD 的垂线, 垂足为 P , 交 BC 于点 F .

由 $\tan \angle AFB = \tan \angle ABD = 2$, 得 $BF = \frac{1}{2}AB = 1$. 所以 $S_{\triangle ABF} = 1$.

- (2) 如图 3, 在 $\text{Rt}\triangle BPF$ 中, $BP = 2\sqrt{5} - x$, $\tan \angle PFB = 2$, 所以 $PF = \frac{1}{2}(2\sqrt{5} - x)$.

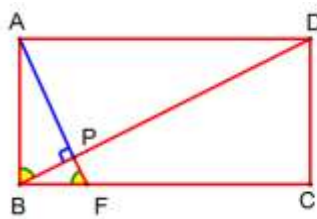


图 2

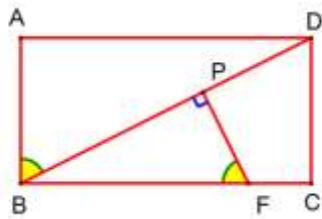


图 3

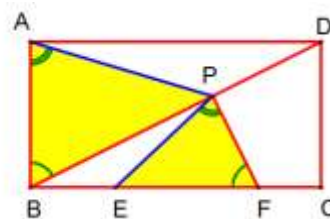


图 4

如图 4, 由于 $\angle ABP = \angle PFB$, 又已知 $\angle FPE = \angle BAP$, 所以 $\triangle ABP \sim \triangle PFE$.

所以 $\frac{BA}{BP} = \frac{FP}{FE}$.

所以 $\frac{2}{2\sqrt{5} - x} = \frac{\frac{1}{2}(2\sqrt{5} - x)}{y}$. 整理, 得 $y = \frac{(2\sqrt{5} - x)^2}{4}$.

定义域是 $\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}$. 当 F 、 C 重合时, $x = PD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) ①点 F 在 BC 上.

如图 5 所示, 若 $\angle FPC = \angle BPE$, 根据等角的余角相等, 得 $\angle DPC = \angle FPE$.

又因为 $\angle FPE = \angle BAP$, 所以 $\angle BAP = \angle DPC$.

由 $AB \parallel DC$, 得 $\angle ABP = \angle PDC$.

所以 $\triangle ABP \sim \triangle PDC$. 所以 $\frac{BA}{BP} = \frac{DP}{DC}$. 所以 $\frac{2}{2\sqrt{5}-x} = \frac{x}{2}$.

整理, 得 $x^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$. 解得 $x = \sqrt{5} + 1$ (如图 5), 或 $x = \sqrt{5} - 1$ (如图 6).

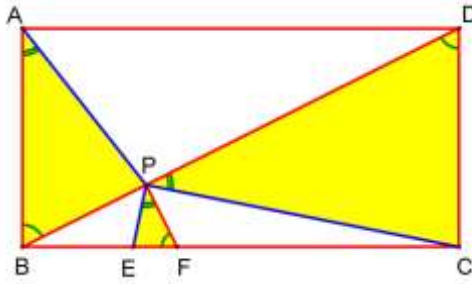


图 5

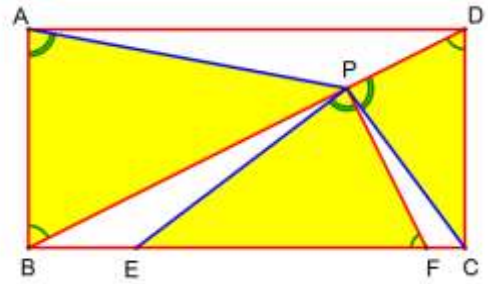


图 6

②如图 7, 点 F 在 BC 的延长线上. 根据等角的余角相等, 可得 $\angle CPF = \angle PAD$.

设 PF 与 DC 交于点 N .

在 AD 上选点 M , 使得 $PM = PD$, 那么 $\angle PMD = \angle PDM = \angle PND$.

根据等角的邻补角相等, 得 $\angle AMP = \angle PNC$.

所以 $\triangle AMP \sim \triangle PNC$. 所以 $\frac{MA}{MP} = \frac{NP}{NC}$. 所以 $\frac{4 - \frac{4}{5}\sqrt{5}x}{x} = \frac{2x}{2 - \sqrt{5}x}$.

解得 $x = \frac{75 - \sqrt{145}}{5}$, 或 $x = \frac{75 + \sqrt{145}}{5}$ (舍去).

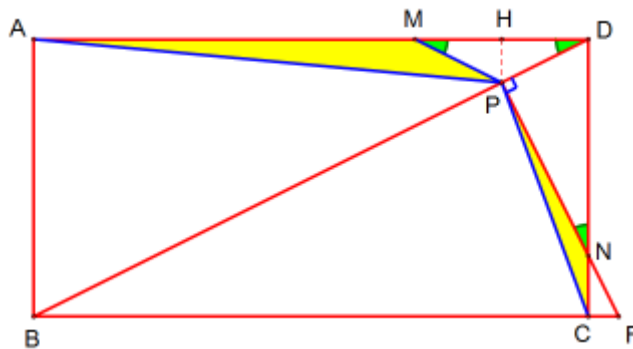
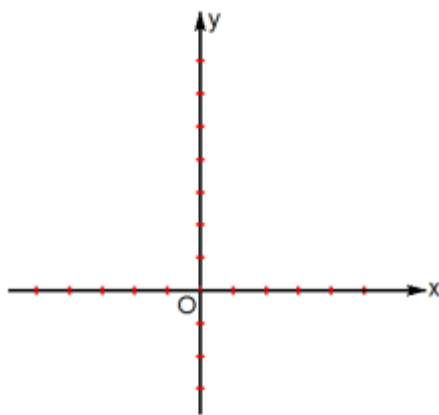


图7

例 2018 年上海市宝山区中考一模第 24 题

设 a, b 是任意两个不等实数，我们规定：满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的所有取值的全体叫做闭区间，表示为 $[a, b]$ 。对于一个函数，如果它的自变量 x 与函数值 y 满足：当 $m \leq x \leq n$ 时，有 $m \leq y \leq n$ ，我们就称此函数是闭区间 $[m, n]$ 上的“闭函数”。如函数 $y = -x + 4$ ，当 $x = 1$ 时， $y = 3$ ；当 $x = 3$ 时， $y = 1$ ，即当 $1 \leq x \leq 3$ 时，恒有 $1 \leq y \leq 3$ ，所以说函数 $y = -x + 4$ 是闭区间 $[1, 3]$ 上的“闭函数”，同理函数 $y = x$ 也是闭区间 $[1, 3]$ 上的“闭函数”。

- (1) 反比例函数 $y = \frac{2018}{x}$ 是闭区间 $[1, 2018]$ 上的“闭函数”吗？请判断并说明理由；
- (2) 如果已知二次函数 $y = x^2 - 4x + k$ 是闭区间 $[2, t]$ 上的“闭函数”，求 k 和 t 的值；
- (3) 如果 (2) 所述的二次函数的图像交 y 轴于 C 点， A 为此二次函数图像的顶点， B 为直线 $x = 1$ 上的一点，当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时，写出点 B 的坐标。



动感体验

请打开几何画板文件名“18 宝山一模 24”，可以体验到，抛物线是闭区间 $[2, 3]$ 上的“闭函数”，直角三角形 ABC 有四种情况。

图文解析

(1) 对于函数，当 $x = 1$ 时， $y = 2018$ ；当 $x = 2018$ 时， $y = 1$ 。

符合 $1 \leq x \leq 2018$ 时， $1 \leq y \leq 2018$ 。

所以反比例函数 $y = \frac{2018}{x}$ 是闭区间 $[1, 2018]$ 上的“闭函数”。

(2) 如图 1，由 $y = x^2 - 4x + k$ ，可知抛物线开口向上，对称轴是直线 $x = 2$ 。

由闭区间 $[2, t]$ ，可知 $t > 2$ 。

如果二次函数 $y = x^2 - 4x + k$ 是闭区间 $[2, t]$ 上的“闭函数”，那么抛物线经过 $(2, 2)$ 和 (t, t)

两点。所以
$$\begin{cases} 4 - 8 + k = 2, \\ t^2 - 4t + k = 2. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = 6, \\ t = 3, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k = 6, \\ t = 2, \end{cases} \text{ (不合 } t > 2 \text{ 的条件, 舍去)}$$

(3) 由 $y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$, 可知 $C(0, 6)$, $A(2, 2)$.

设线段 AC 与直线 $x=1$ 交于点 G , 那么点 G 是 AC 的中点, $G(1, 4)$.

①如图 2, 过 A 、 C 两点分别作 AC 的垂线, 分别交直线 $x=1$ 于点 B_1 、 B_2 .

作 $AH \perp AB_1$ 于 H .

在 $\text{Rt}\triangle AGH$ 中, $\tan \angle AGH = \frac{AH}{GH} = \frac{1}{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle B_1AH$ 中, $\tan \angle B_1GH = \tan \angle AGH = \frac{B_1H}{AH} = \frac{1}{2}$, 所以 $B_1H = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}$.

所以 $GB_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

设直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 D , 那么 $B_1D = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$, $B_2D = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$.

所以 $B_1(1, \frac{3}{2})$, $B_2(1, \frac{13}{2})$.

②如图 3, 以 AC 为直径画圆 G 与直线 $x=1$ 交于 B 、 B' 两点, 那么四边形 $ABCB'$ 是矩形.

所以 $GB = \frac{1}{2}AC = \sqrt{5}$.

所以 $B(1, 4 + \sqrt{5})$, $B'(1, 4 - \sqrt{5})$.

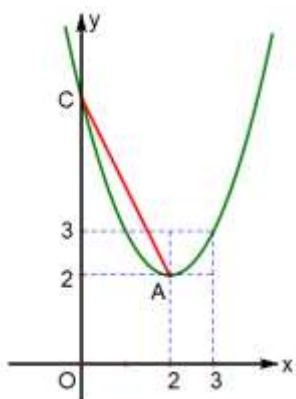


图 1

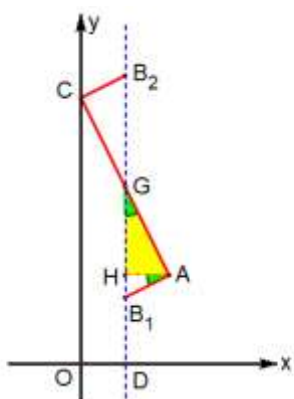


图 2

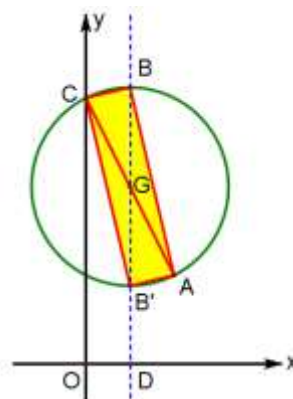


图 3

例 2018 年上海市宝山区中考一模第 25 题

如图 1，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=7$ ， $AB=CD=15$ ， $BC=25$ ， E 为腰 AB 上一点且 $AE:BE=1:2$ ， F 为 BC 一动点， $\angle FEG=\angle B$ ， EG 交射线 BC 于 G ，直线 EG 交射线 CA 于 H 。

- (1) 求 $\sin \angle ABC$ ；
- (2) 求 $\angle BAC$ 的度数；
- (3) 设 $BF=x$ ， $CH=y$ ，求 y 与 x 的函数关系式及其定义域。

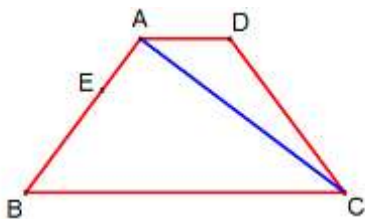


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 宝山一模 25”，拖动点 F 在 BC 边上运动，可以体验到，当点 G 在点 F 右侧时，点 H 可能在线段 AC 上，也可能在线段 CA 的延长线上。当点 G 在点 F 左侧时，点 H 在线段 CA 的延长线上。

图文解析

(1) 如图 2，作 $AA' \perp BC$ 于 A' ，作 $DD' \perp BC$ 于 D' ，那么四边形 $AA'D'D$ 是矩形， $\triangle ABA' \cong \triangle DCD'$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABA'$ 中， $AB=15$ ， $A'B = \frac{25-7}{2} = 9$ ，所以 $AA'=12$ 。

所以 $\sin \angle ABC = \frac{AA'}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。

(2) 如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABA'$ 中， $\tan \angle B = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ACA'$ 中， $AA'=12$ ， $A'C=7+9=16$ ，所以 $AC=20$ ， $\tan \angle CAA' = \frac{4}{3}$ 。

所以 $\angle B = \angle CAA'$ 。

因为 $\angle B$ 与 $\angle BAA'$ 互余，所以 $\angle CAA'$ 与 $\angle BAA'$ 互余。

所以 $\angle BAC = 90^\circ$ 。

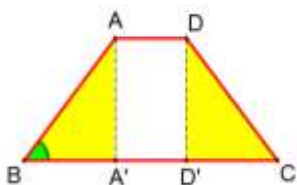


图 2

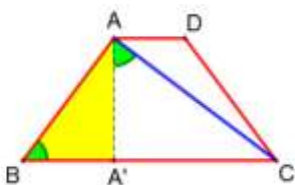


图 3

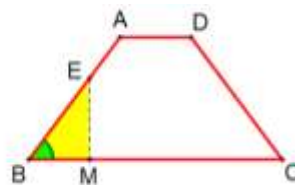


图 4

(3) 如图 4，过点 E 作 $EM \perp BC$ 于 M 。

因为 $AB=15$ ，且 $AE:BE=1:2$ ，所以 $AE=5$ ， $BE=10$ 。

所以在 $\text{Rt}\triangle EBM$ 中， $BM=6$ ， $EM=8$ 。

①情形 1，如图 5，点 G 在点 F 的右侧，点 H 在线段 AC 上.

由 $\angle AEF = \angle 1 + \angle FEG$, $\angle AEF = \angle 2 + \angle B$, $\angle FEG = \angle B$, 得 $\angle 1 = \angle 2$.

由 $\tan \angle 1 = \tan \angle 2$, 得 $\frac{AH}{AE} = \frac{ME}{MF}$.

所以 $\frac{20-y}{5} = \frac{8}{x-6}$. 整理, 得 $y = \frac{20x-160}{x-6}$.

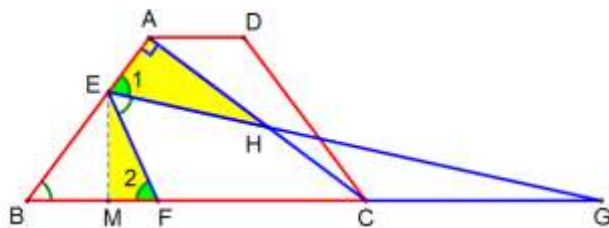


图 5

定义域是 $8 \leq x < 12$. 定义域的意义如下:

如图 6, 当点 G 与点 C 重合时, $y = CH = 0$. 此时 $x = 8$.

如图 7, 如果 $EG \parallel BC$, 那么 $\angle 2 = \angle FEG = \angle B$, 所以 $EB = EF$.

所以 $x = BF = 2BE = 12$.

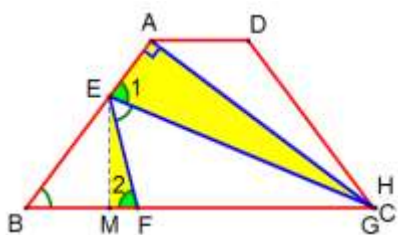


图 6

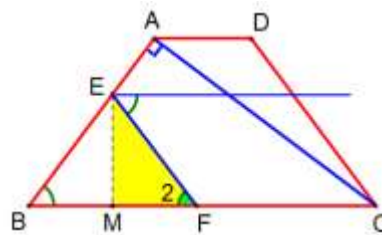


图 7

②情形 2, 如图 8, 点 G 在点 F 的右侧, 点 H 在线段 CA 的延长线上.

由 $\angle 1 = \angle B + \angle BGE$, $\angle 2 = \angle FEG + \angle BGE$, $\angle B = \angle FEG$, 得 $\angle 1 = \angle 2$.

根据等角的邻补角相等, 得 $\angle HEA = \angle EFM$.

由 $\tan \angle HEA = \tan \angle EFM$, 得 $\frac{AH}{AE} = \frac{ME}{MF}$. 所以 $\frac{y-20}{5} = \frac{8}{6-x}$.

整理, 得 $y = \frac{20x-160}{x-6}$. 定义域是 $0 \leq x < 6$. 定义域的意义如下:

如图 9, 当点 F 与点 B 重合时, $x = 0$.

如图 10, 当点 F 与点 M 重合时, $x = 6$. 此时 $EG \parallel AC$, 不存在交点 H .

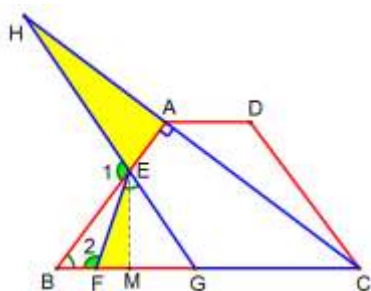


图 8

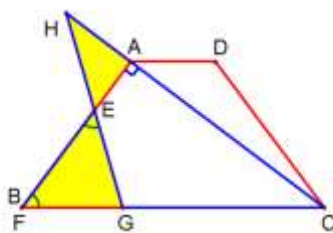


图 9

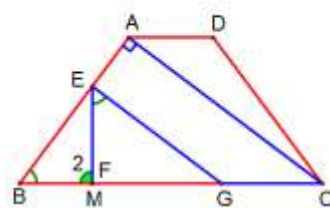


图 10

③情形3, 点 G 在点 F 的左侧.

第一步, 用 x 表示 BG 的长.

如图 11, 由 $\triangle FEG \sim \triangle FBE$, 得 $FE^2 = FG \cdot FB$.

如图 12, $EF^2 = EM^2 + FM^2 = 8^2 + (x-6)^2 = x^2 - 12x + 100$, $FB = x$,

所以 $FG = \frac{x^2 - 16x + 100}{x}$.

所以 $BG = FB - FG = x - \frac{x^2 - 16x + 100}{x} = \frac{16x - 100}{x}$.

第二步, 如图 12, 作 $GN \perp AB$ 于 N , 解 $\text{Rt}\triangle BGN$.

在 $\text{Rt}\triangle BGN$ 中, $GN = \frac{4}{5}BG = \frac{4(16x-100)}{5x}$, $BN = \frac{3}{5}BG = \frac{3(16x-100)}{5x}$.

第三步, 如图 13, 由 $\tan \angle AEH = \tan \angle NEG$ 求 y 与 x 的关系式.

由 $\frac{AH}{AE} = \frac{NG}{NE}$, 得 $\frac{y-20}{5} = \frac{\frac{4(16x-100)}{5x}}{10 - \frac{3(16x-100)}{5x}}$. 整理, 得 $y = \frac{260x + 2000}{7x + 150}$.

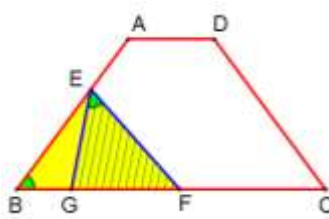


图 11

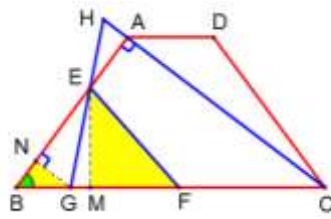


图 12

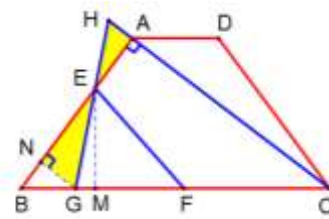


图 13

定义域是 $\frac{25}{3} \leq x \leq 25$. 定义域的意义如下:

如图 14, 当点 G 与点 B 重合时, $FB = FE$. 由 $\cos \angle B = \frac{\frac{1}{2}BE}{BF} = \frac{5}{BF} = \frac{3}{5}$, 得 $BF = \frac{25}{3}$.

如图 15, 当点 F 与点 C 重合时, $BF = 25$.

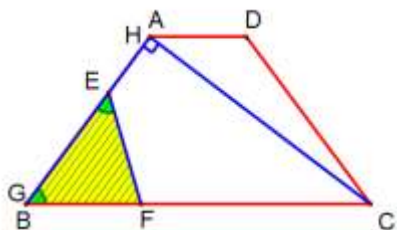


图14

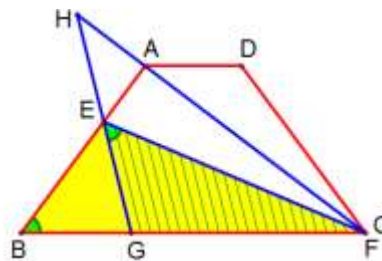


图15

【鸣谢】这道题目我在10多个初中数学教师教研群里征解, 老师们很积极活跃, 给了我很多灵感和启发. 但是对于情形3, 始终摆脱不了繁琐的运算. 如果哪位老师有更好的解法, 请及时与我分享.

例 2018 年上海市崇明区中考一模第 18 题

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，点 D 、 E 分别在 AC 、 BC 上，且 $\angle CDE=\angle B$ ，将 $\triangle CDE$ 沿 DE 折叠，点 C 恰好落在 AB 边上的点 F 处，如果 $AC=8$ ， $AB=10$ ，那么 CD 的长为_____.

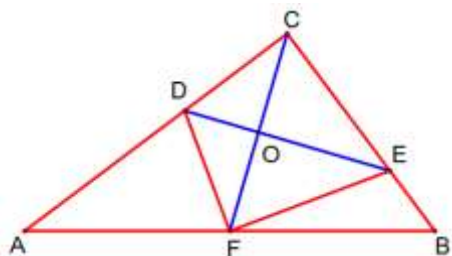


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18崇明一模18”，可以体验到， $\triangle DCF$ 和 $\triangle FCA$ 是两个有公共底角的等腰三角形.

图文解析 $\frac{25}{8}$. 思路如下:

如图2， $\angle CDE$ 与 $\angle 1$ 互余， $\angle B$ 与 $\angle A$ 互余，如果 $\angle CDE=\angle B$ ，那么 $\angle 1=\angle A$.

进而可得 CF 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线， $CF=5$.

由 $DC=DF$ ，可得 $\angle 1=\angle 2$.

所以 $\triangle DCF \sim \triangle FCA$. 所以 $\frac{CD}{CF} = \frac{CF}{CA}$. 于是得 $CD = \frac{CF^2}{CA} = \frac{25}{8}$.

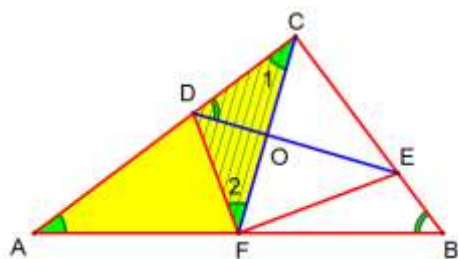


图2

例 2018 年上海市奉贤区中考一模第 18 题

已知 $\triangle ABC$, $AB=AC$, $BC=8$, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上, 将 $\triangle ABC$ 沿着直线 DE 翻折, 点 B 落在边 AC 上的点 M 处, 且 $AC=4AM$, 设 $BD=m$, 那么 $\angle ACB$ 的正切值是_____.

动感体验

请打开几何画板文件名“18奉贤一模18”, 拖动点 A 上下运动, 可以改变等腰三角形 ABC 的形状, 保持底边 BC 不变, 可以体验到, BH 和 HN 的长保持不变, DM 与 BD 保持相等.

图文解析 $\frac{\sqrt{10m-25}}{3}$. 思路如下:

如图1, $DM=BD=m$.

如图2, 作 $AH \perp BC$ 于 H , 作 $MN \perp BC$ 于 N .

由 $AB=AC$, 得 $BH=CH=4$.

由 $AC=4AM$, 得 $HC=4HN$. 所以 $HN=1$. 所以 $BN=5$, $NC=3$.

在 $\text{Rt}\triangle DMN$ 中, $DM=m$, $DN=5-m$, 所以 $MN^2=m^2-(5-m)^2=10m-25$.

所以 $MN=\sqrt{10m-25}$. 所以 $\tan \angle ACB = \frac{MN}{NC} = \frac{\sqrt{10m-25}}{3}$.

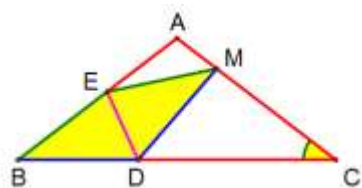


图1

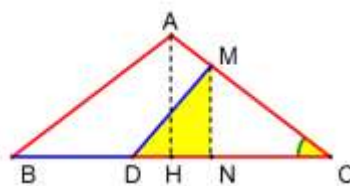


图2

例 2018 年上海市虹口区中考一模第 18 题

如图 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ，点 D 是边 AB 上一点，把 $\triangle ABC$ 绕着点 D 旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$ ，边 $B'C'$ 与边 AB 相交于点 E ，如果 $AD=BE$ ，那么 AD 长为 _____。

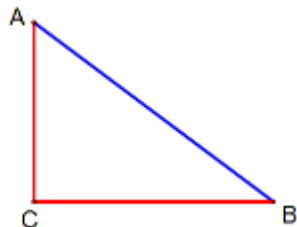


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18虹口一模18”，拖动点 D 在 AB 上运动，可以体验到， $\triangle ABC$ 绕着点 D 顺时针旋转 90° 的情况下，才存在 $AD=BE$ 的可能。

图文解析 $\frac{70}{11}$ 。思路如下：

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=6$ ， $BC=8$ ，所以 $AB=10$ 。所以 $\cot \angle B = \cot \angle B' = \frac{4}{3}$ 。

如图 2，设 $AD=BE=x$ ，那么 $DE=2x-10$ 。所以 $B'D = \frac{4}{3}(2x-10)$ 。

又因为 $A'D=AD=x$ ，所以 $A'B' = x + \frac{4}{3}(2x-10) = 10$ 。解得 $x = \frac{70}{11}$ 。

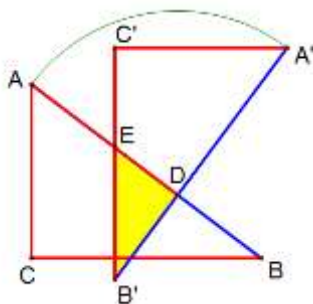


图 2

例 2018 年上海市黄浦区中考一模第 18 题

如图 1，平面上七个点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G ，图中所有的连线长均相等，则 $\cos \angle BAF =$ _____.

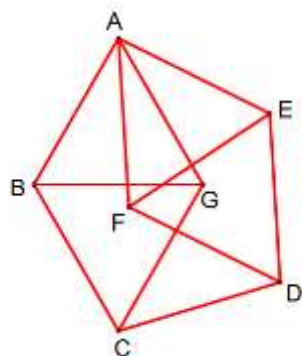


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18黄浦一模18”，拖动点 D 绕点 A 旋转菱形 $AFDE$ ，或旋转等腰三角形 AFD ，可以体验到，旋转角 $\angle BAF$ 等于旋转角 $\angle CAD$ （如图2、图3所示）.

图文解析 $\frac{5}{6}$. 思路如下：

设菱形 $ABCD$ 的边长为 2，那么对角线 $AC = 2\sqrt{3}$.

如图4，在等腰三角形 ACD 中， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $CD = 2$.

作 $AM \perp CD$ 于 M ，作 $CN \perp AD$ 于 N .

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中，由勾股定理，得 $AM = \sqrt{11}$.

由 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AM = \frac{1}{2} AD \cdot CN$ ，得 $CN = 2 \times \sqrt{11} \div 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{33}}{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle CAN$ 中，由勾股定理，得 $AN = \frac{5}{3}\sqrt{3}$. 所以 $\cos \angle CAD = \frac{AN}{AC} = \frac{5}{6}$.

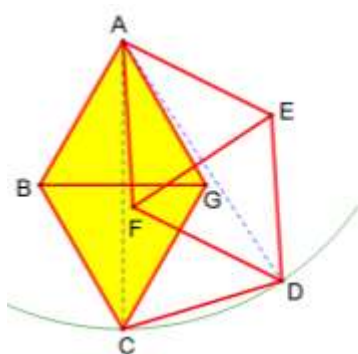


图2

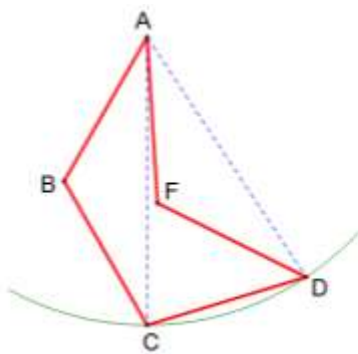


图3

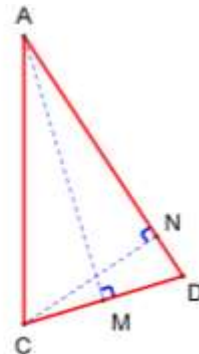


图4

例 2018 年上海市嘉定区中考一模第 18 题

如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AD = 3$ ， $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，点 E 、 F 分别在边 CD 、 BC 上，联结 EF 。如果 $\triangle CEF$ 沿直线 EF 翻折，点 C 与点 A 恰好重合，那么 $\frac{DE}{EC}$ 的值是_____。

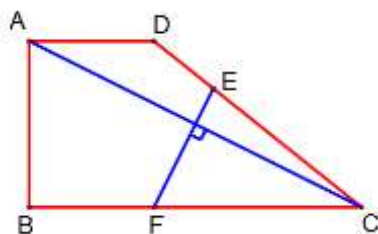


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18嘉定一模18”，可以体验到，四边形 $ABFD$ 是矩形，四边形 $AFCM$ 是菱形。

图文解析 $\frac{2}{5}$ 。思路如下：

如图2，设 $AF = CF = m$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，由勾股定理，得 $m^2 = 4^2 + (8-m)^2$ 。解得 $m = 5$ 。

所以 $BF = 8 - 5 = 3 = AD$ 。所以四边形 $ABFD$ 是矩形。

如图3，过点 D 作 EF 的平行线交 BC 于点 G ，那么 $\angle GDF = \angle DAH = \angle ACB$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，所以 $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中， $DF = 4$ ，所以 $GF = DF \tan \angle GDF = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ 。

由 $DG \parallel EF$ ，得 $\frac{DE}{EC} = \frac{GF}{FC} = \frac{2}{5}$ 。

【解法二】如图4，延长 FE 交 AD 的延长线于点 M 。

由 EF 垂直平分 AC ，可得 AM 与 FC 平行且相等。

所以四边形 $AFCM$ 是平行四边形。所以四边形 $AFCM$ 是菱形。

所以 $AM = AF = FC = 5$ 。所以 $DM = 5 - 3 = 2$ 。所以 $\frac{DE}{EC} = \frac{DM}{FC} = \frac{2}{5}$ 。

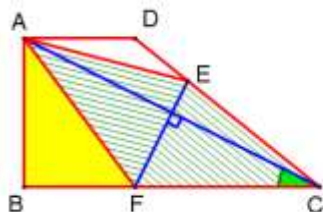


图2

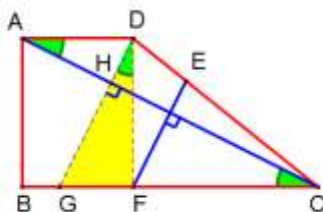


图3

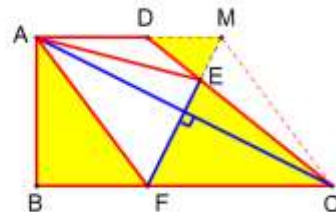


图4

例 2018 年上海市金山区中考一模第 18 题

如图 1，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 AD 上一点，把 $\triangle ABE$ 沿直线 BE 翻折，点 A 正好落在 BC 边上的点 F 处，如果四边形 $CDEF$ 和矩形 $ABCD$ 相似，那么四边形 $CDEF$ 和矩形 $ABCD$ 面积比是_____.



图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18金山一模18”，拖动点 E 在 AD 上运动，可以体验到， $\triangle BAE$ 与 $\triangle BFE$ 关于直线 BE 对称（如图2所示），当点 F 落在 BC 上时，四边形 $ABFE$ 是正方形（如图3所示）.

图文解析 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 思路如下：

如图3，设正方形 $ABCD$ 的边长为 x ，设 $AD=1$.

如果矩形 $CDEF$ 和矩形 $ABCD$ 相似，那么长与宽对应成比例.

所以 $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$. 整理，得 $x^2 + x - 1 = 0$. 解得 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (舍去了负值).

根据相似形的面积比等于相似比的平方，可知矩形 $CDEF$ 和矩形 $ABCD$ 面积比等于

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

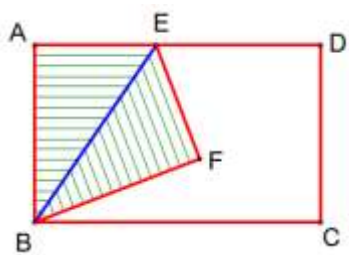


图2

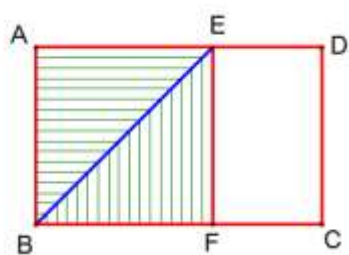


图3

例 2018 年上海市静安区中考一模第 18 题

如图，矩形纸片 $ABCD$ ， $AD=4$ ， $AB=3$ ．如果点 E 在边 BC 上，将纸片沿 AE 折叠，使点 B 落在点 F 处，联结 FC ，当 $\triangle EFC$ 是直角三角形时，那么 BE 的长为_____．

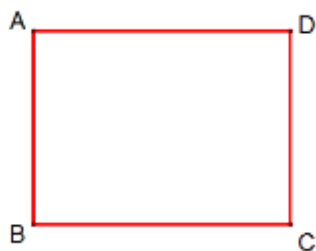


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18静安一模18”，拖动点 E 在 BC 上运动，可以体验到， $\triangle EFC$ 可以两次成为直角三角形．

图文解析 $\frac{3}{2}$ 或 3．思路如下：

如图2，当 $\angle EFC=90^\circ$ 时，由于 $\angle AFE=90^\circ$ ，所以 A 、 F 、 C 三点共线．

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE}$ ，得 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} BE(3+5)$ ．解得 $BE = \frac{3}{2}$ ．

如图2，当 $\angle FEC=90^\circ$ 时，四边形 $ABEF$ 是正方形．此时 $BE=3$ ．

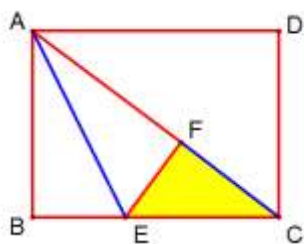


图2

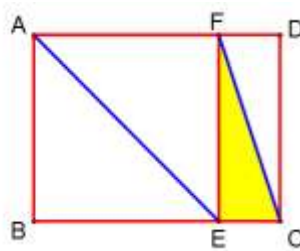


图3

例 2018 年上海市闵行区中考一模第 18 题

如图 1，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle B=30^\circ$ ，以点 B 为旋转中心，旋转 30° ，点 A 、 C 分别落在点 A' 、 C' 处，直线 AC 、 $A'C'$ 交于点 D ，那么 $\frac{AD}{AC}$ 的值为_____.

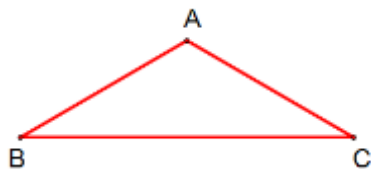


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18闵行一模18”，可以体验到，不论顺时针旋转 30° 还是逆时针旋转 30° ，图形都是“平分+平行”的模型.

图文解析 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. 思路如下:

在等腰 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=30^\circ$ ，设 $AB=AC=2$ ，那么 $BC=2\sqrt{3}$.

情形一，如图2， $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 30° ，那么 $A'C' \parallel BC$.

所以 $AD=AC'=BC'-AB=2\sqrt{3}-2$. 此时 $\frac{AD}{AC} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3}-1$.

情形二，如图3， $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 30° ，那么 $AC \parallel BC'$.

所以 $\frac{CD}{BC'} = \frac{A'C}{A'B} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3}-1$. 所以 $CD=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=6-2\sqrt{3}$.

所以 $AD=CD-AC=6-2\sqrt{3}-2=4-2\sqrt{3}$. 此时 $\frac{AD}{AC} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$.

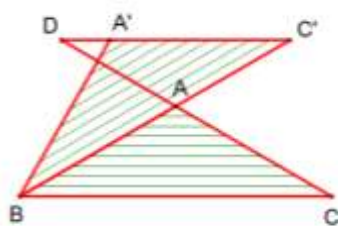


图2

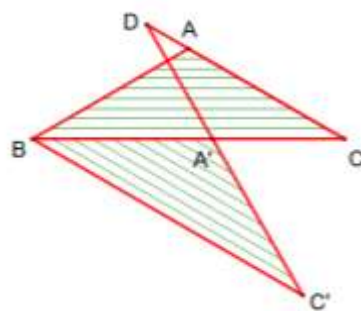


图3

例 2018 年上海市浦东新区中考一模第 18 题

如图 1，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\cos B=\frac{4}{5}$ ， $BC=8$ ，点 D 在边 BC 上，将 $\triangle ABC$ 沿着过点 D 的一条直线翻折，使点 B 落在 AB 边上的点 E 处，连结 CE 、 DE ，当 $\angle BDE=\angle AEC$ 时，则 BE 的长是_____.

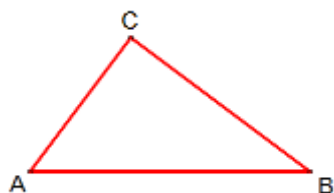


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18浦东一模18”，拖动点 E 在 AB 上运动，可以体验到，当 $\angle BDE=\angle AEC$ 时，它们的邻补角相等，此时 $\triangle CDE \sim \triangle CEB$.

图文解析 $\frac{39}{5}$. 思路如下：

如图2，点 B 、 E 关于直线 DH 对称，已知 $\cos B=\frac{4}{5}$ ， $BC=8$.

在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中，设 $BH=4m$ ， $BD=5m$ ，那么 $DH=3m$ ， $ED=5m$ ， $BE=8m$.

如图3，当 $\angle BDE=\angle AEC$ 时， $\angle CDE=\angle CEB$ （如图4所示）.

所以 $\triangle CDE \sim \triangle CEB$.

所以 $\frac{CD}{CE} = \frac{DE}{EB} = \frac{EC}{BC}$. 所以 $\frac{8-5m}{CE} = \frac{5m}{8m} = \frac{EC}{8}$.

解得 $EC=5$ ， $m=\frac{39}{40}$. 所以 $BE=8m=\frac{39}{5}$.

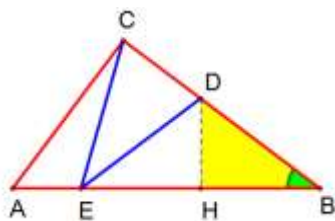


图2

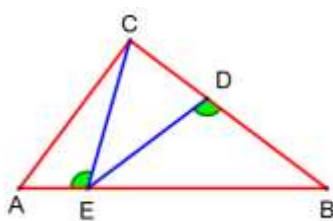


图3

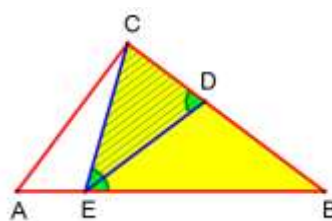


图4

例 2018 年上海市普陀区中考一模第 18 题

如图 1, $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=6$, 将 $\triangle ABC$ 翻折, 使得点 A 落到边 BC 上的点 A' 处, 折痕分别交边 AB 、 AC 于点 E 、点 F , 如果 $A'F \parallel AB$, 那么 $BE=$ _____.

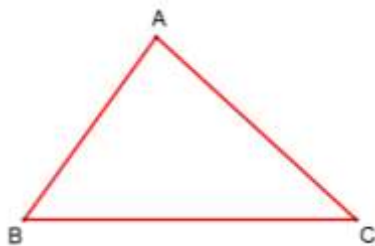


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18普陀一模18”，拖动点 A' 在 BC 上运动，可以体验到，如果 $A'F \parallel AB$ ，那么四边形 $AEA'F$ 是菱形.

图文解析 $\frac{25}{11}$. 思路如下:

如图2, 因为 EF 垂直平分 AA' , 当 $A'F \parallel AB$ 时, 四边形 $AEA'F$ 是菱形.

设菱形的边长为 m . 由 $\frac{A'F}{BA} = \frac{CF}{CA}$, 得 $\frac{m}{5} = \frac{6-m}{6}$.

解得 $m = \frac{30}{11}$. 所以 $BE = 5 - \frac{30}{11} = \frac{25}{11}$.

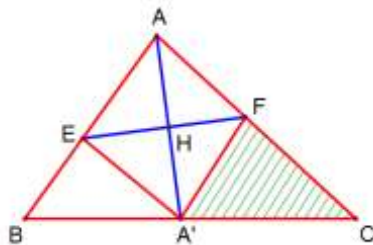


图2

例 2018 年上海市青浦区中考一模第 18 题

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=7$ ， $AC=6$ ， $\angle A=45^\circ$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上，将 $\triangle BDE$ 沿着 DE 所在直线翻折，点 B 落在点 P 处， PD 、 PE 分别交边 AC 于点 M 、 N ，如果 $AD=2$ ， $PD \perp AB$ ，垂足为点 D ，那么 MN 的长是_____.

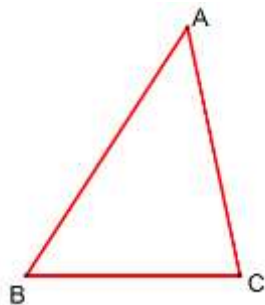


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18青浦一模18”，拖动点 P 绕点 D 旋转，可以体验到， DP 与 DB 保持相等（如图2所示）. 当 PD 与 AB 垂直时， $\triangle ADM$ 、 $\triangle BDP$ 和 $\triangle PMF$ 都是等腰直角三角形，此时 $DE \parallel AC$ （如图3所示）.

图文解析 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 思路如下：

如图3， $\triangle ADM$ 是腰长为2的等腰直角三角形， $\triangle BDP$ 是腰长为5的等腰直角三角形.

如图4，由 $DE \parallel AC$ ，得 $\frac{MN}{DE} = \frac{PM}{PD} = \frac{3}{5}$ ， $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{5}{7}$.

两式相乘，得 $\frac{MN}{AC} = \frac{3}{7}$. 所以 $MN = \frac{3}{7}AC = \frac{3}{7} \times 6 = \frac{18}{7}$.

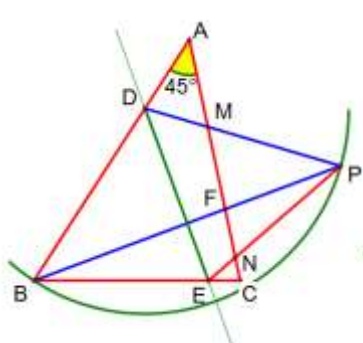


图2

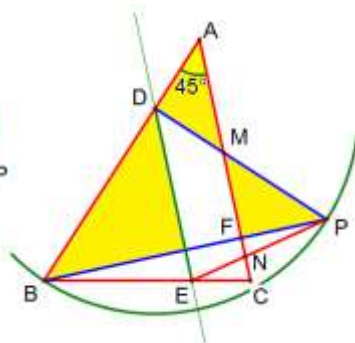


图3

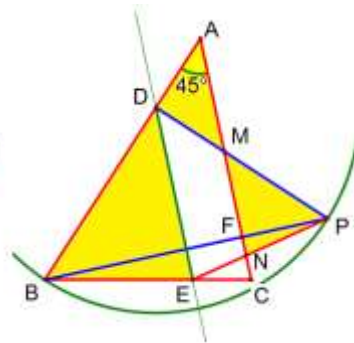


图4

例 2018 年上海市松江区中考一模第 18 题

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=BC=4$ ，将 $\triangle ABC$ 翻折，使得点 A 落在边 BC 的中点 A' 处，折痕分别交边 AB 、 AC 于点 D 、点 E ，那么 $AD:AE$ 的值为_____.

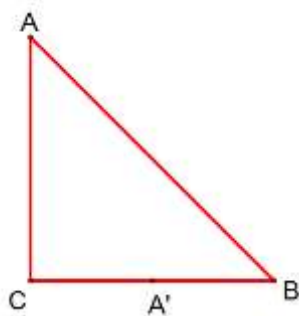


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18松江一模18”，拖动点 A' 运动，可以体验到， AD 与 AE 的比，可以转化为 α 与 β 的余弦比.

图文解析 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. 思路如下:

等腰直角三角形 ABC 中的腰长为4，所以 $AB=4\sqrt{2}$ ， $A'C=A'B=2$.

如图2，作 $A'H \perp AB$ 于 H ，那么 $\triangle A'BH$ 是等腰三角形.

所以 $A'H=BH=\sqrt{2}$. 所以 $AH=3\sqrt{2}$. 所以 $\tan \angle \alpha = \frac{1}{3}$. 所以 $\cos \angle \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

在 $\text{Rt}\triangle ACA'$ 中， $\tan \angle \beta = \frac{1}{2}$. 所以 $\cos \angle \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

如图 3，在 $\triangle ADE$ 中， $\cos \angle \alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ， $\cos \angle \beta = \frac{AO}{AE} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

于是得到 $\frac{AD}{AE} = \frac{\cos \angle \beta}{\cos \angle \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} \div \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

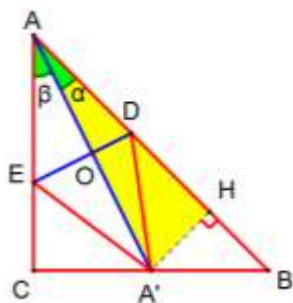


图2

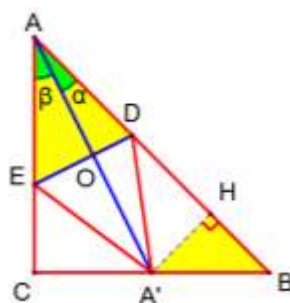


图3

例 2018 年上海市徐汇区中考一模第 18 题

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ，将 $\triangle ACB$ 绕点 A 顺时针方向旋转得 $\triangle ADE$ （点 C 、 B 的对应点分别为 D 、 E ），点 D 恰好落在直线 BE 上，直线 BE 和直线 AC 交于点 F ，则线段 AF 的长为_____.

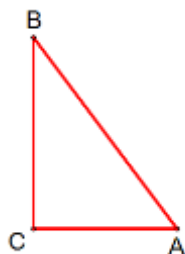


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18徐汇一模18”，拖动点 D 绕点 A 顺时针旋转，可以体验到，当点 D 恰好落在直线 BE 上时， AD 是等腰三角形 ABE 底边上的高.

图文解析 $\frac{75}{7}$. 思路如下：

如图2，设 $CF=x$ ，那么 $AF=x-3$.

由 $S_{\triangle BAF} = \frac{1}{2} AF \cdot BC = \frac{1}{2} BF \cdot AD$ ，得 $4(x-3) = 3\sqrt{4^2 + x^2}$.

解得 $x = \frac{96}{7}$. 所以 $AF = \frac{96}{7} - 3 = \frac{75}{7}$.

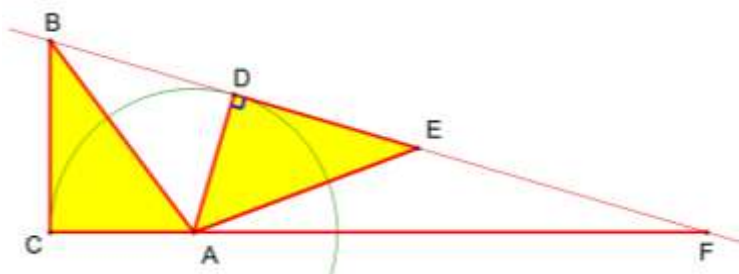


图2

例 2018 年上海市杨浦区中考一模第 18 题

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，当点 B 与点 C 重合时，点 C 落在点 D 处，如果 $\sin B = \frac{2}{3}$ ， $BC=6$ ，那么 BC 的中点 M 和 CD 的中点 N 的距离是_____.

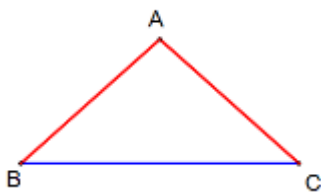


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18杨浦一模18”，拖动点 D 绕点 A 旋转，可以体验到，当点 B 与点 C 重合时， $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

图文解析 4. 思路如下：

如图2，. 由 $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ ，得 $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \sin \angle B = \frac{2}{3}$.

所以 $MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times 6 = 4$.

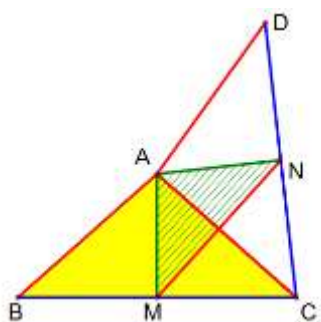


图2

例 2018 年上海市长宁区中考一模第 18 题

如图 1，在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中， $\angle D=60^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上，将 $\triangle BEF$ 沿着直线 EF 翻折，点 B 恰好与边 AD 的中点 G 重合，则 BE 的长等于_____.

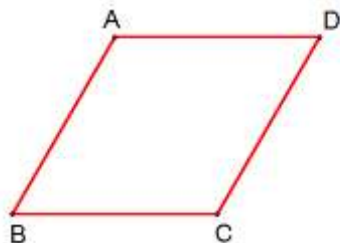


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18长宁一模18”，可以体验到， $\triangle AEM$ 和 $\triangle BEN$ 是两个 60° 角的直角三角形.

图文解析 $\frac{7}{5}$. 思路如下:

如图2，在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中， $\angle EAM=60^\circ$ ，设 $AM=m$ ，那么 $AE=2m$ ， $ME=\sqrt{3}m$.

所以 $BE=GE=2-2m$.

在 $\text{Rt}\triangle GEM$ 中， $GM=1+m$. 由勾股定理，得 $(2-2m)^2=(\sqrt{3}m)^2+(1+m)^2$.

解得 $m=\frac{3}{10}$. 所以 $BE=2-2m=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$.

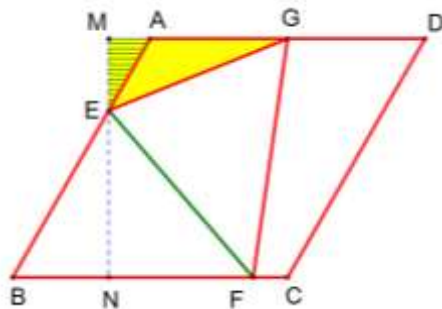


图2

例 2018 年上海市宝山区中考一模第 18 题

如图 1，点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 的中点，联结 AM ，将 BM 沿某一过 M 的直线翻折，使 B 落在 AM 上的 E 处，将线段 AE 绕 A 顺时针旋转一定角度，使 E 落在 F 处，如果 E 在旋转过程中曾经交 AB 于 G ，当 $EF=BG$ 时，旋转角 $\angle EAF$ 的度数是_____.

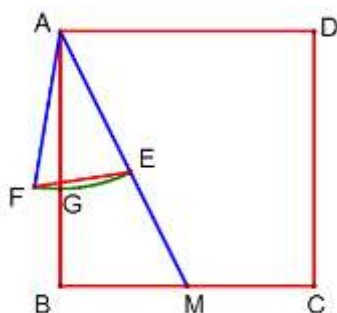


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18宝山一模18”，可以体验到，点 G 是线段 AB 的黄金分割点.

图文解析 36° . 思路如下：

如图2，设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，那么 $BM=EM=1$ ， $AM=\sqrt{5}$.

所以 $AG=AE=AM-EM=\sqrt{5}-1$.

所以 $\frac{AG}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 所以点 G 是 AB 的黄金分割点， $\frac{BG}{AG} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

又因为 $EF=BG$ ，所以 $\frac{EF}{AE} = \frac{BG}{AG} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

所以 $\triangle AEF$ 是黄金三角形， $\angle EAF=36^\circ$.

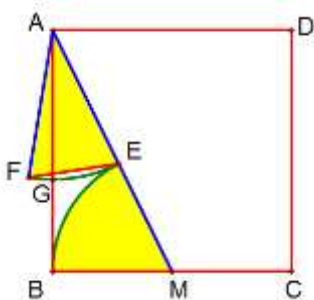


图2