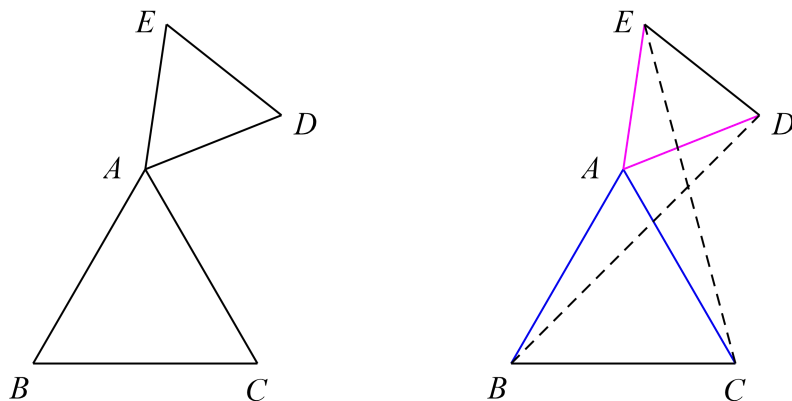


## 类比探究之旋转结构

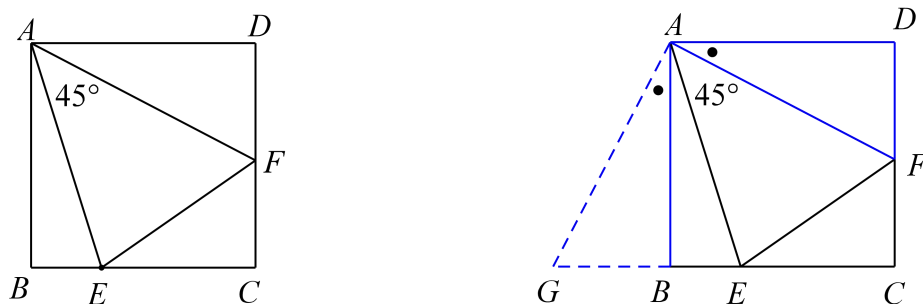
### 1. 旋转结构（手拉手模型）——等线段共端点，构造旋转，借助全等整合条件

#### (1) 常见旋转模型 1



如图， $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$  均为等边三角形，则出现了  $AB=AC$ ， $AD=AE$  等线段共端点的结构，所以连接  $BD$ ， $CE$ ，可以证明  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，即把  $\triangle ABD$  绕点  $A$  逆时针旋转  $60^\circ$  得到  $\triangle ACE$ 。

#### (2) 常见旋转模型 2



如图，正方形  $ABCD$  中，点  $E$ ， $F$  分别在边  $BC$ ， $CD$  上，且满足  $\angle EAF=45^\circ$ ，求证： $EF=BE+DF$ 。

思路提示：

正方形提供了四条边都相等，可以看成等线段共端点，所以考虑构造旋转解决问题，即找到等线段  $AD=AB$ ，把线段  $AD$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$ ，则  $AD$  所在  $\triangle ADF$  也绕着点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle ABG$ 。

1. 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ，点 $D$ 为直线 $BC$ 上一动点（点 $D$ 不与点 $B$ ， $C$ 重合）。以 $AD$ 为边作正方形 $ADEF$ ， $AD=AF$ ， $\angle DAF=90^\circ$ ，连接 $CF$ 。

（1）如图1，当点 $D$ 在线段 $BC$ 上时，求证： $CF+CD=BC$ ；

（2）如图2，当点 $D$ 在线段 $BC$ 的延长线上时，其他条件不变，请直接写出 $CF$ ， $BC$ ， $CD$ 三条线段之间的关系；

（3）如图3，当点 $D$ 在线段 $BC$ 的反向延长线上时，且点 $A$ ， $F$ 分别在直线 $BC$ 的两侧，其他条件不变，求 $CF$ ， $BC$ ， $CD$ 三条线段之间的关系。

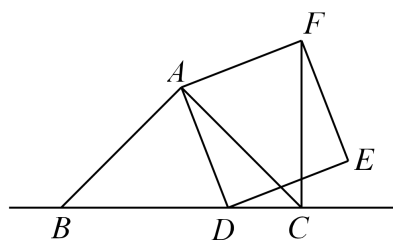


图1

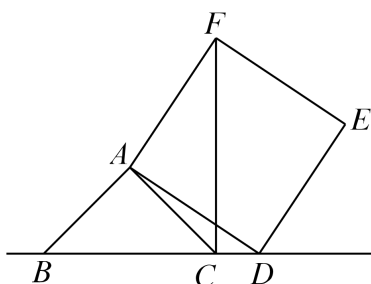


图2

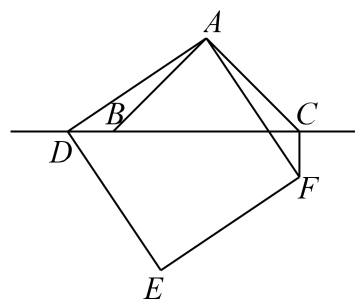


图3

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 是锐角，点 $D$ 在射线 $BC$ 上运动，连接 $AD$ ，以 $AD$ 为边在 $AD$ 的右侧作正方形 $ADEF$ 。

(1) 操作发现：若 $AB=AC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ，当 $D$ 在线段 $BC$ 上时（不与点 $B$ 重合），如图1所示，请你直接写出线段 $CF$ 和 $BD$ 的位置关系是\_\_\_\_\_，数量关系是\_\_\_\_\_；

(2) 猜想论证：在(1)的条件下，当 $D$ 在线段 $BC$ 的延长线上时，如图2所示，请你判断(1)中结论是否成立，并证明你的判断；

(3) 拓展延伸：如图3，若 $AB \neq AC$ ， $\angle BAC \neq 90^\circ$ ，点 $D$ 在线段 $BC$ 上运动，试探究：当锐角 $\angle ACB$ 满足什么条件时，线段 $CF$ 和 $BD$ 之间的位置关系仍成立（点 $C$ ， $E$ 重合除外），画出图形，并说明理由。

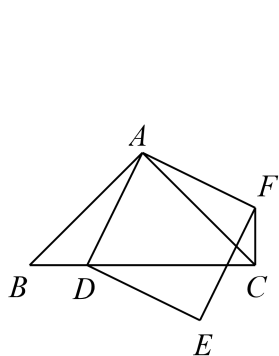


图 1

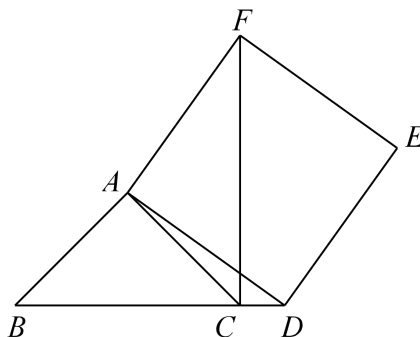


图 2

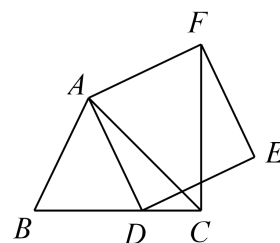


图 3

3. 在 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC$ , 点 $D$ 是射线 $CB$ 上的一动点 (不与点 $B, C$ 重合), 以 $AD$ 为一边在 $AD$ 的右侧作 $\triangle ADE$ , 使 $AD=AE$ ,  $\angle DAE=\angle BAC$ , 连接 $CE$ .
- (1) 如图 1, 当点 $D$ 在线段 $CB$ 上, 且 $\angle BAC=90^\circ$ 时, 那么 $\angle DCE=$ \_\_\_度;
- (2) 设 $\angle BAC=\alpha$ ,  $\angle DCE=\beta$ .
- ①如图 2, 当点 $D$ 在线段 $CB$ 上,  $\angle BAC \neq 90^\circ$ 时, 请你探究 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的数量关系, 并证明你的结论;
- ②如图 3, 当点 $D$ 在线段 $CB$ 的延长线上,  $\angle BAC \neq 90^\circ$ 时, 请将图 3 补充完整, 并直接写出此时 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的数量关系 (不需证明).

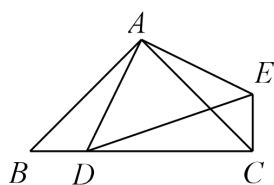


图 1

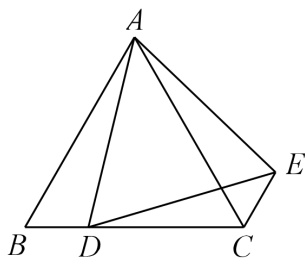


图 2

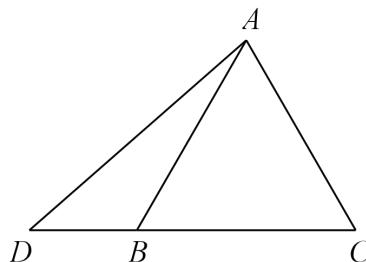


图 3

4. 如图 1, 在正方形  $ABCD$  中,  $E, F$  分别是  $BC, CD$  上的点, 且  $\angle EAF=45^\circ$ , 则有结论  $EF=BE+DF$  成立.

(1) 如图 2, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB=AD, \angle B=\angle D=90^\circ$ ,  $E, F$  分别是  $BC, CD$  上的点, 且  $\angle EAF$  是  $\angle BAD$  的一半, 那么结论  $EF=BE+DF$  是否仍然成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由.

(2) 如图 3, 若将 (1) 中的条件改为: 在四边形  $ABCD$  中,  $AB=AD, \angle B+\angle ADC=180^\circ$ , 延长  $BC$  到点  $E$ , 延长  $CD$  到点  $F$ , 使得  $\angle EAF$  仍然是  $\angle BAD$  的一半, 则结论  $EF=BE+DF$  是否仍然成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请写出它们之间的数量关系, 并证明.

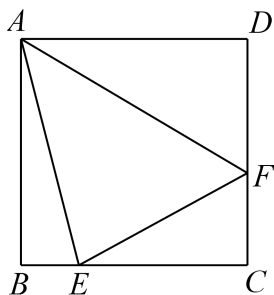


图1

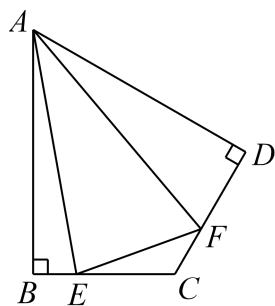


图2

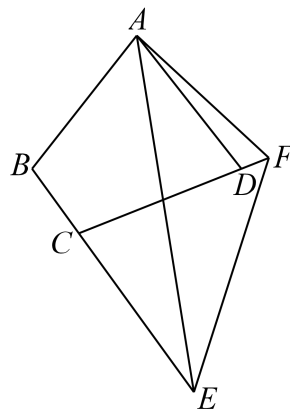


图3

### 5. 问题背景:

如图 1, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB=AD$ ,  $\angle BAD=120^\circ$ ,  $\angle B=\angle ADC=90^\circ$ .  $E$ ,  $F$  分别是  $BC$ ,  $CD$  上的点, 且  $\angle EAF=60^\circ$ . 探究图中线段  $BE$ ,  $EF$ ,  $FD$  之间的数量关系.

小王同学探究此问题的方法是, 延长  $FD$  到点  $G$ , 使  $DG=BE$ . 连接  $AG$ , 先证明  $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ , 再证明  $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ , 可得出结论, 他的结论应是 \_\_\_\_\_.

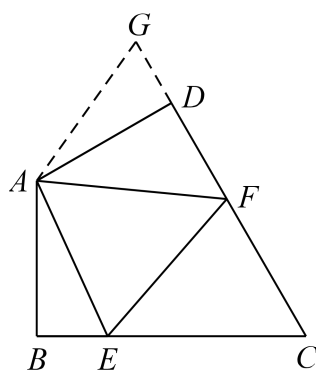


图1

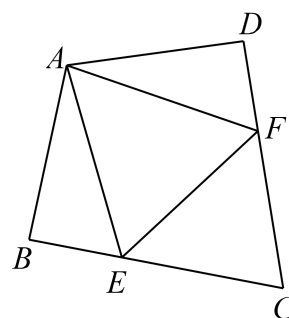


图2

### 探索延伸:

如图 2, 若在四边形  $ABCD$  中,  $AB=AD$ ,  $\angle B+\angle D=180^\circ$ .  $E$ ,  $F$  分别是  $BC$ ,  $CD$  上的点, 且  $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$ , 则上述结论是否仍然成立? 并说明理由.

### 实际应用:

如图 3, 在某次军事演习中, 舰艇甲在指挥中心 ( $O$  处) 北偏西  $30^\circ$  的  $A$  处, 舰艇乙在指挥中心南偏东  $70^\circ$  的  $B$  处, 并且两舰艇到指挥中心的距离相等, 接到行动指令后, 舰艇甲向正东方向以 60 海里/小时的速度前进, 舰艇乙沿北偏东  $50^\circ$  的方向以 80 海里/小时的速度前进. 1.5 小时后, 指挥中心观测到甲, 乙两舰艇分别到达  $E$ ,  $F$  处, 且两舰艇之间的夹角为  $70^\circ$ , 试求此时两舰艇之间的距离.

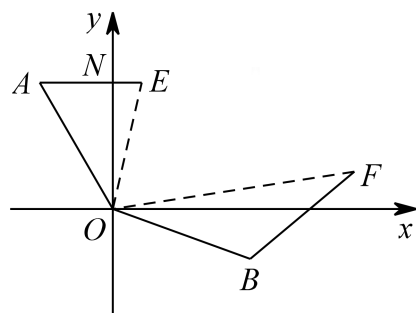


图3

6. 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $\angle A=60^\circ$ ,  $\triangle ABC$ 绕点 $C$ 顺时针旋转, 旋转角为 $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ), 点 $A, B$ 的对应点分别是点 $D, E$ .

(1) 如图1, 当点 $D$ 恰好落在边 $AB$ 上时, 试判断 $DE$ 与 $AC$ 的位置关系, 并说明理由.

(2) 如图2, 当点 $B, D, E$ 三点恰好在一条直线上时, 旋转角 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ , 此时直线 $CE$ 与 $AB$ 的位置关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 在(2)的条件下, 连接 $AE$ , 设 $\triangle BDC$ 的面积为 $S_1$ ,  $\triangle AEC$ 的面积为 $S_2$ , 则 $S_1$ 与 $S_2$ 的数量关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 如图3, 当点 $B, D, E$ 三点不在一条直线上时, (3)中的 $S_1$ 与 $S_2$ 的数量关系仍然成立吗? 试说明理由.

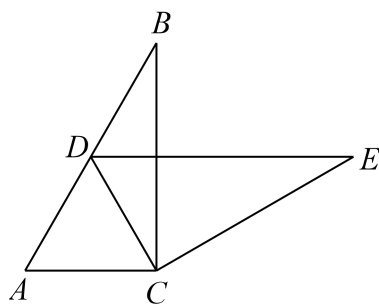


图1

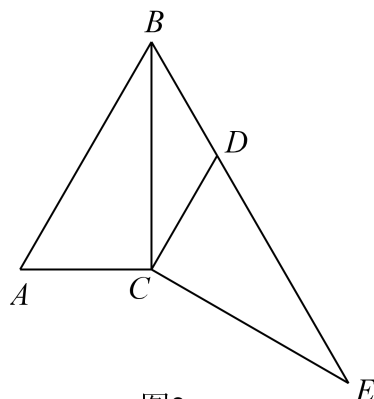


图2

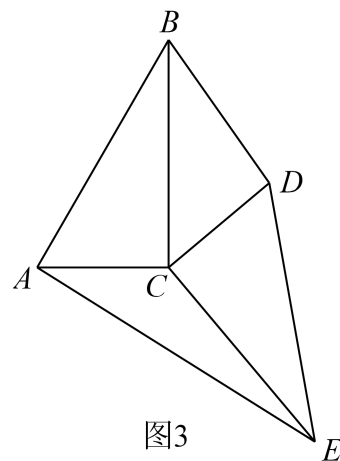


图3

【学习过勾股定理之后，可以跟具体计算结合起来考查】

7. (1) 观察猜想

如图 1，点  $B, A, C$  在同一条直线上， $DB \perp BC$ ， $EC \perp BC$  且  $\angle DAE = 90^\circ$ ， $AD = AE$ ，则  $BC, BD, CE$  之间的数量关系为\_\_\_\_\_；

(2) 问题解决

如图 2，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $CB = 4$ ， $AB = 2$ ，以  $AC$  为直角边向外作等腰  $\text{Rt}\triangle DAC$ ，连接  $BD$ ，求  $BD$  的长；

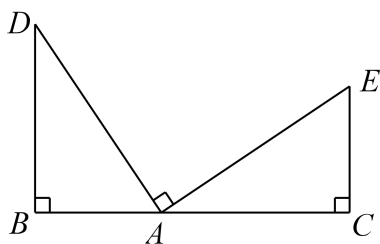


图 1

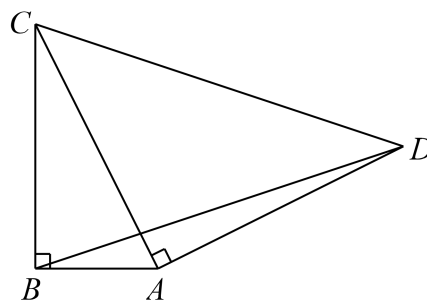


图 2

(3) 拓展延伸

如图 3，在四边形  $ABCD$  中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $CB = 4$ ， $AB = 2$ ， $DC = DA$ ，请直接写出  $BD$  的长.

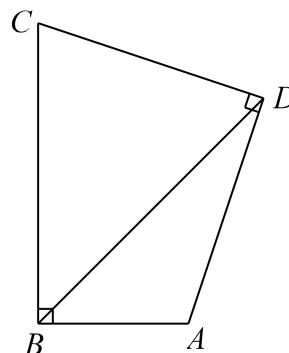


图 3



8. 如图 1, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB=AD$ ,  $\angle B+\angle ADC=180^\circ$ , 点  $E, F$  分别在四边形  $ABCD$  的边  $BC, CD$  上,  $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$ , 连接  $EF$ , 试猜想  $EF, BE, DF$  之间的数量关系.

(1) **思路梳理** 将  $\triangle ABE$  绕点  $A$  逆时针旋转至  $\triangle ADG$ , 使  $AB$  与  $AD$  重合, 由  $\angle B+\angle ADC=180^\circ$ , 得  $\angle FDG=180^\circ$ , 即点  $F, D, G$  三点共线, 易证  $\triangle AFG \cong$  \_\_\_\_\_, 故  $EF, BE, DF$  之间的数量关系为 \_\_\_\_\_.

(2) **类比引申** 如图 2, 在图 1 的条件下, 若点  $E, F$  由原来的位置分别变到四边形  $ABCD$  的边  $CB, DC$  的延长线上,  $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$ , 连接  $EF$ , 试猜想  $EF, BE, DF$  之间的数量关系, 并给出证明.

(3) **联想拓展** 如图 3, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC=90^\circ$ ,  $AB=AC$ , 点  $D, E$  均在边  $BC$  上, 且  $\angle DAE=45^\circ$ , 若  $BD=1, EC=2$ , 则  $DE$  的长为 \_\_\_\_\_.

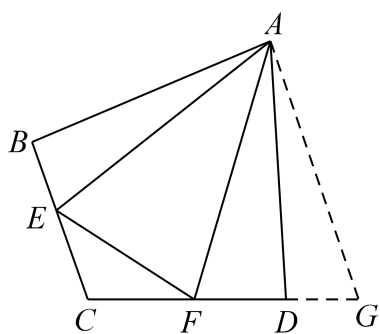


图 1

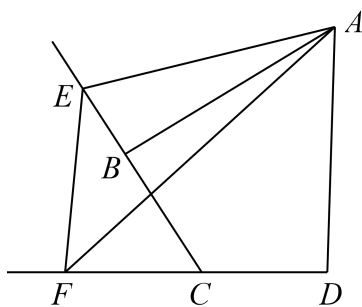


图 2

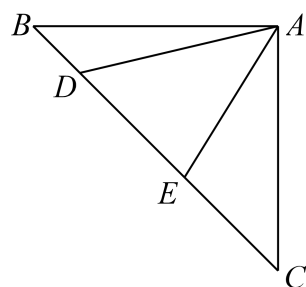


图 3

9. (1) 如图 1, 已知  $\triangle ABC$ , 以  $AB, AC$  为边向  $\triangle ABC$  外作等边  $\triangle ABD$  和等边  $\triangle ACE$ , 连接  $BE, CD$ , 请你完成图形, 并证明:  $BE=CD$ . (尺规作图, 不写做法, 保留作图痕迹)

(2) 如图 2, 已知  $\triangle ABC$ , 以  $AB, AC$  为边向外作正方形  $ABFD$  和正方形  $ACGE$ , 连接  $BE, CD$ ,  $BE$  与  $CD$  有什么数量关系? 简单说明理由.

(3) 运用 (1)、(2) 解答中所积累的经验 and 知识, 完成下题: 如图 3, 要测量池塘两岸相对的两点  $B, E$  的距离, 已经测得  $\angle ABC=45^\circ$ ,  $\angle CAE=90^\circ$ ,  $AB=BC=100$  米,  $AC=AE$ , 求  $BE$  的长.

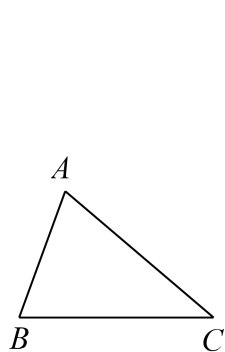


图1

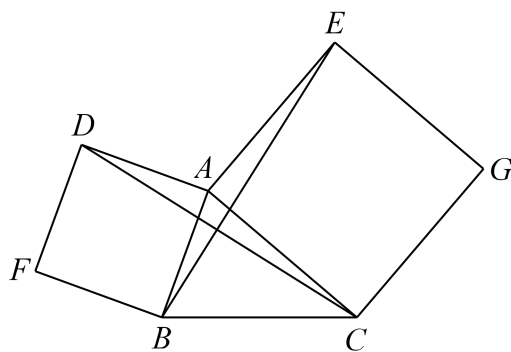


图2

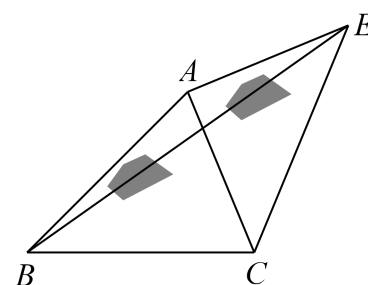


图3

10. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， $\angle EAC=90^\circ$ ，点  $M$  为射线  $AE$  上任意一点（不与点  $A$  重合），连接  $CM$ ，将线段  $CM$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转  $90^\circ$  得到线段  $CN$ ，直线  $NB$  分别交直线  $CM$ ，射线  $AE$  于点  $F$ ， $D$ 。
- (1) 问题发现：直接写出  $\angle NDE=$ \_\_\_\_\_度。
- (2) 拓展探究：如图 2，当  $\angle EAC$  为钝角时，其他条件不变， $\angle NDE$  的大小有无变化？请给出证明。
- (3) 如图 3，若  $\angle EAC=15^\circ$ ， $BD=\sqrt{2}$ ，直线  $CM$  与  $AB$  交于点  $G$ ，其他条件不变，请求出  $AC$  的长。

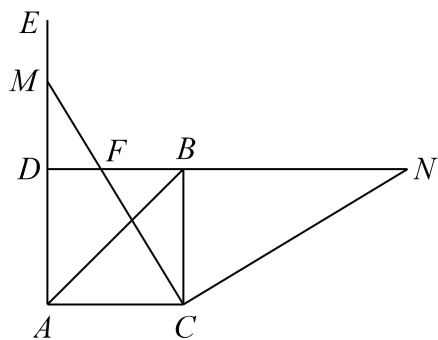


图1

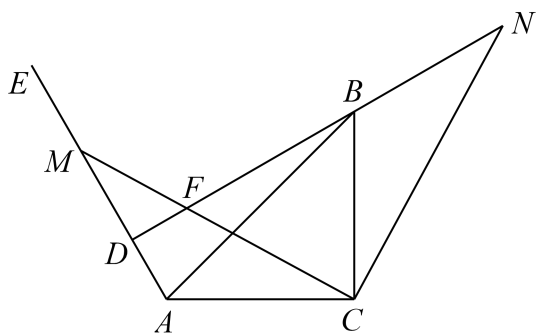


图2

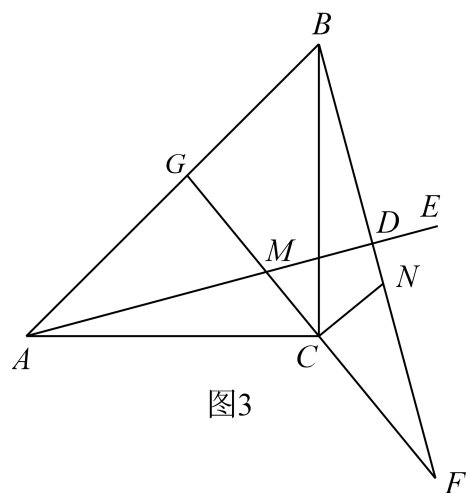


图3

11. 已知  $\angle ACD = 90^\circ$ ,  $AC = DC$ ,  $MN$  是过点  $A$  的直线, 过点  $D$  作  $DB \perp MN$  于点  $B$ , 连接  $CB$ .

(1) **问题发现** 如图 1, 过点  $C$  作  $CE \perp CB$ , 与  $MN$  交于点  $E$ , 则易发现  $BD$  和  $EA$  之间的数量关系为\_\_\_\_\_,  $BD, AB, CB$  之间的数量关系为\_\_\_\_\_;

(2) **拓展探究** 当  $MN$  绕点  $A$  旋转到如图 2 的位置时,  $BD, AB, CB$  之间满足怎样的数量关系? 请写出你的猜想, 并给予证明;

(3) **解决问题** 当  $MN$  绕点  $A$  旋转到如图 3 的位置时 (点  $C, D$  在直线  $MN$  两侧), 若此时  $\angle BCD = 30^\circ$ ,  $BD = 2$  时,  $CB =$ \_\_\_\_\_.

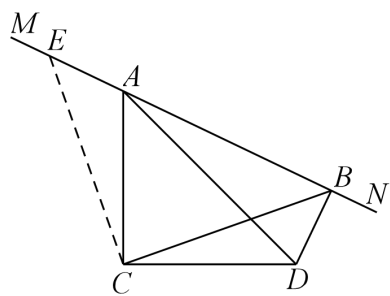


图 1

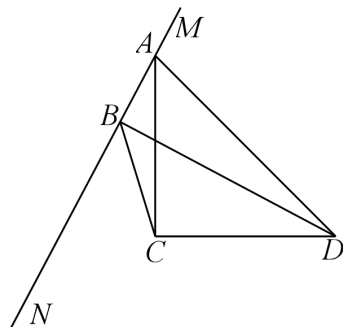


图 2

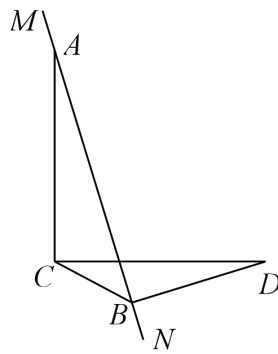


图 3