## **动点问题系列之专题二 —— 几何最值**



**专题考点梳理**

一、动点产生的几何最值问题的七种类型

注：具体见专题

二、初中阶段几何最值问题的本质

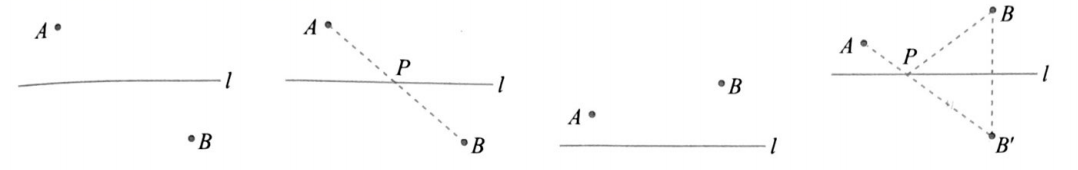
（1）两点之间线段最短（延伸：三角形两边之和大于第三边）

（2）垂线段最短（延伸：斜边大于直角边）

### 方法技巧归纳

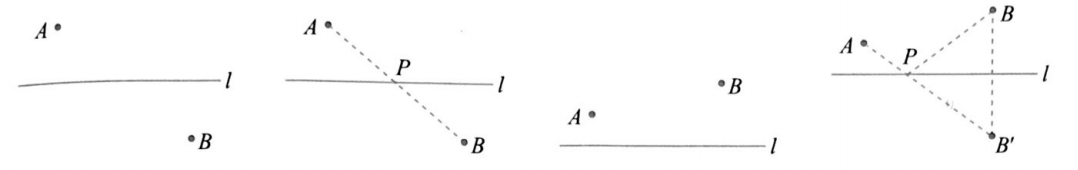
###### 类型一：在直线1上找到一点P，使得PA+PB最短

做法如图，连接A、B与的交点即为所求



###### 类型二：在直线1上找到一点P，使得PA+PB最短

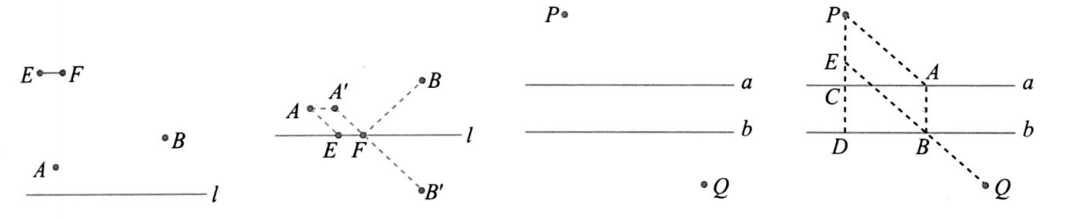
做法如图，做点B关于直线1的对称点B，连接AB与的交点即为点P



注：因为A、B两点是固定的，所以当题目要求找到一点P使得△PAB的周长最小时，做法也是样的

###### 类型三：在直线上找到两点EF（点E在点F的左侧），EF的距离是定值，使得AE+EF+FB最小

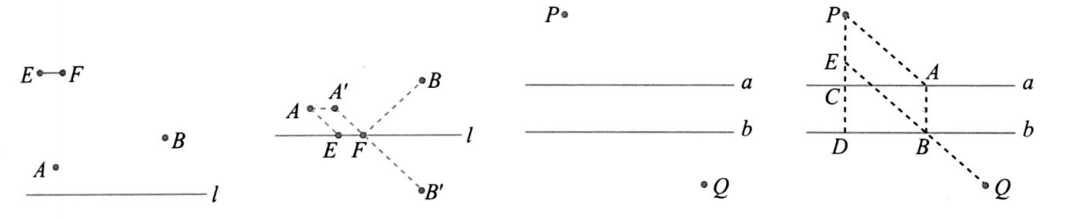
做法如图，过A做AA＇∥且AA＇=EF，做B关于直线的对称点B＂，连接A＇B＇与直线z的交点即为F，过A做A＇F的平行线与直线1的交点即为点E



注：同样地，因为AB两点是固定的，所以当题目要求使得四边形AEFB周长最小时，也是用同样的方法

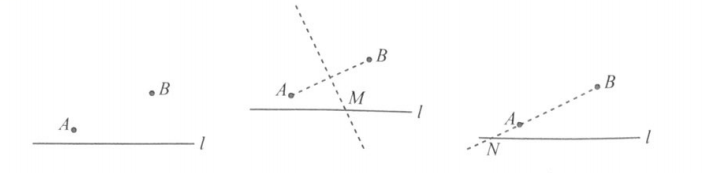
**类型四：直线a与直线b平行，在直线a上找到一点A，过点A作直线b的垂线交于点B，如何确定点A的位置可以使PA+AB+BQ最短**

做法如图，做PD垂直直线b交直线a于点C，交直线b于点D，在PD上截取PE=CD，连接EQ，EQ与直线b的交点即为点B，过点B做直线a的垂线，交点即为点A，连接PA即可（这种方法在实际生活中的应用就是著名的修桥问题）



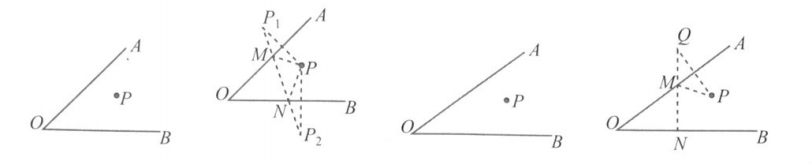
###### 类型五：在直线l上找到一点M，使得|MA - MB|最小；直线l上找到一点N，使得|NA - NB|最大

做法如图，做AB的中垂线与直线相交，交点即为M，此时|MA - MB|有最小值0；延长BA与直线1相交，交点即为N，此时|NA - NB|有最大值为AB



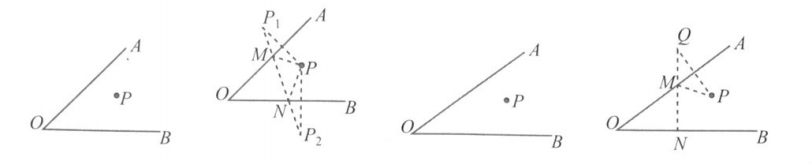
###### 类型六：点P是∠AOB内部一点，在OA上找到一点M，OB上找到一点N使得三角形PMN的周长最小

做法如图，分别作点P关于OA、OB的对称点，，连接，与OA的交点即为M，与OB的交点即为N.此时，三角形PMN的周长最短



**类型七：点P是∠AOB内部一点，在OA上找到一点M，过点M作MN垂直OB交OB于点N，使得PM+MN的最小**

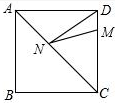
做法如图，作点P关于OA的对称点Q，做QN垂直OB于N，则QN与OA的交点即为M

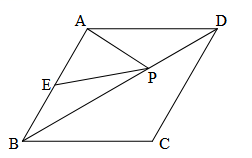


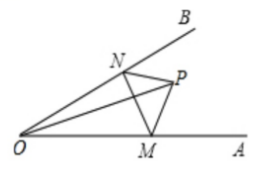
### 经典例题精讲

例1.在正方形ABCD中, AB=4,M是DC上的一点,且DM=1,N是AC上的动点,

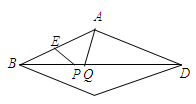
（1）求DN+MN的最小值与最大值. （2）求|DN - NM|的最小值与最大值.



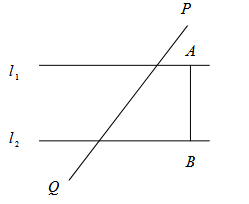
1. （山东东营中考）如图5-2-15，已知形ABCD的周长为16，面积为8，E为AB的动点，若P为对角线BD上一动点，则EP+AP的最小值为（ ）
2. （辽宁营口中考）如图所示，点P是∠AOB内任意一点，OP=5cm，点M和点N分别是射线OA和射线OB上的动点，△PMN周长的最小值是5cm，则∠AOB的度数是（ ）



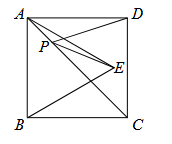
例4.（福建荔城区二模）如图8-6-11所示在边长为10的菱形ABCD中，对角线BD=6.点E是AB的中点，P，Q是BD上的动点，且始终保持PQ=2.则四边形AEPQ周长的最小值为（ ）



例5. 如图，已知直线，直线之间的距离为8，点P到直线的距离为6，点Q到直线 的距离为4，PQ=，在直线上有一动点A，直线上有一动点B，满足AB⊥，且PA+AB+BQ最小，此时PA+BQ=



例6.（山东日照模拟）如图所示，正方形ABCD的面积为12，△ABE是等边三角形，点E在正方形ABCD内，在对角线AC上有一点P，使PD+PE的和最小，则这个最小值为（ ）



例7. （安徽中考）如图，在矩形ABCD中，AB=5，AD=3，动点P满足3S△PAB=S矩形ABCD，则点P到A、B两点距离之和PA+PB的最小值为（）

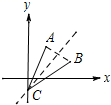
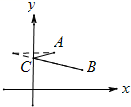
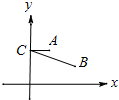
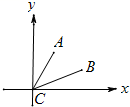
A. B. C.52 D.

D C

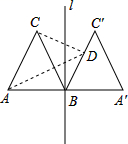
P

A B

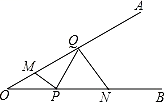
例8.在直角坐标系中有A,B两点,要在y轴上找一点C,使得它到A,B的距离之和最小,现有如下四种方案,其中正确的是(    )



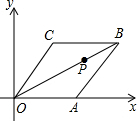
例9.如图,正△ABC的边长为2,过点B的直线L⊥AB,且△ABC与关于直线l对称,D为线段BC’上一动点,则AD+CD的最小值是(    )

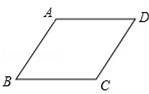


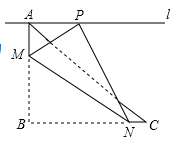
例10.如图，∠AOB=30°，点M、N分别在边OA、OB上，且OM=1，ON=3，点P、Q分别在边OB、OA上，则MP+PQ+QN的最小值是\_\_\_\_\_．



例11.已知菱形OABC在平面直角坐标系的位置如图所示,顶点A（5,0）,OB=4,点P是对角线OB上的一个动点,D（0,1）,当CP+DP最短时,点P的坐标为(    )



例12. 如图，在菱形ABCD中，∠ABC=60°，AB=2，点P是这个菱形内部或边上的一点，若以点P、B、C为顶点的三角形是等腰三角形，则P、D（P、D两点不重合）两点间的最短距离为 　　 .   


例13.如图所示，在三角形纸片ABC中，已知∠ABC=90°，AC=5，BC=4.过点A作直线l平行于BC，折叠三角形纸片AB，使直角顶点B落在直线l上的点P处，折痕为MN.当点P在直线l上移动时，折痕的端点M，N也随之移动，若限定端点MN分别在AB，BC边上（包括端点）移动，则线段AP长度的最大值与最小值之差为（ ）

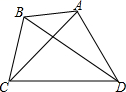
A.

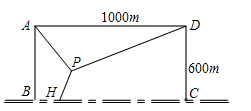
B.6

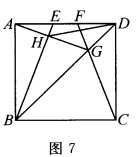
C.6+1

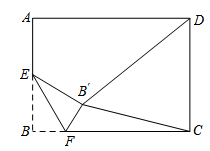
1. 

例14.如图,四边形ABCD中,AC⊥BD相交于E，且EC＞EA，ED﹤EB，,求证:.BC+AD＞AB+CD



例15.如图,矩形ABCD是一个长为1000米、宽为600米的货场,A、D是入口.现拟在货场内建一个收费站P,在铁路线BC段上建一个发货站台H,设铺设公路AP、DP及PH之长度和为L.  
(1)求L的最小值.  
(2)请指出当l取最小值时,收费站P和发货站台H的几何位置.

1. 如图 , *E* , *F* 是正方形 *ABCD* 的边 *AD* 上两个动点,满足  连接 *CF* 交 *BD* 于点 *G* ,连接 *BE* 交  于点 *H* .若正方形的边长为 2 ,则线段  长度的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

例17.如图所示,在矩形ABC中,,,E是线段AB的中点,F是线段BC上的动点,沿直线EF翻折到,连结,,.当最短时,则=\_\_\_\_\_\_

例18.如图1,平行四边形ABCD中,于E,,于G,延长GE、DC交于点F,连接AF.  
(1)若,,求AD的长;  
(2)求证:;  
(3)如图2,若,,点M是线段AG上的一个动点,连接ME,将沿ME翻折得,连接,试求当取得最小值时GM的长.

