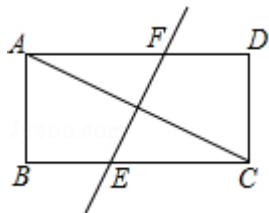


峰城区第二十八中九年级数学期中考试答案解析

参考答案与试题解析

一. 选择题 (共 13 小题)

1. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 的垂直平分线 EF 分别交 BC , AD 于点 E , F , 若 $BE=3$, $AF=5$, 则 AC 的长为 ()



- A. $4\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 10 D. 8

【解答】解: 连接 AE , 如图:

$\because EF$ 是 AC 的垂直平分线,

$\therefore OA=OC$, $AE=CE$,

\because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle B=90^\circ$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle OAF=\angle OCE$,

在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中, $\begin{cases} \angle AOF=\angle COE \\ OA=OC \\ \angle OAF=\angle OCE \end{cases}$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE$ (ASA),

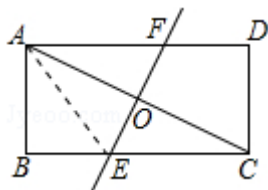
$\therefore AF=CE=5$,

$\therefore AE=CE=5$, $BC=BE+CE=3+5=8$,

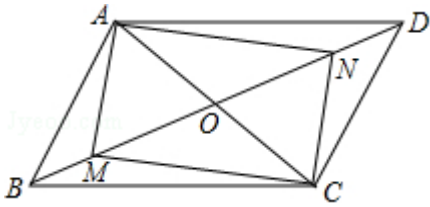
$\therefore AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$;

故选: A.



2. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, M 、 N 是 BD 上两点, $BM=DN$, 连接 AM 、 MC 、 CN 、 NA , 添加一个条件, 使四边形 $AMCN$ 是矩形, 这个条件是 ()



- A. $OM = \frac{1}{2}AC$ B. $MB = MO$ C. $BD \perp AC$ D. $\angle AMB = \angle CND$

【解答】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA = OC, OB = OD$$

∵ 对角线 BD 上的两点 M 、 N 满足 $BM = DN$ ，

$$\therefore OB - BM = OD - DN, \text{ 即 } OM = ON,$$

∴ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形，

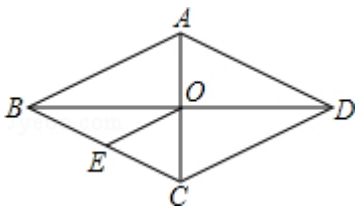
$$\therefore OM = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore MN = AC,$$

∴ 四边形 $AMCN$ 是矩形。

故选：A.

3. 已知：如图，菱形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， E 为 BC 的中点 E ， $AD = 6cm$ ，则 OE 的长为（ ）



- A. $6cm$ B. $4cm$ C. $3cm$ D. $2cm$

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AO = CO, AB = AD = 6cm,$$

∵ E 为 CB 的中点，

∴ OE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore BA = 2OE,$$

$$\therefore OE = 3cm.$$

故选：C.

4. 用配方法解方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ ，下列配方结果正确的是（ ）

- A. $(x - 1)^2 = 2$ B. $(x - 1)^2 = 4$ C. $(x + 1)^2 = 2$ D. $(x + 1)^2 = 4$

【解答】解：∵ $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$\therefore x^2 + 2x = 3$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 1 + 3$$

$$\therefore (x+1)^2 = 4$$

故选：D.

5. 已知 a, b 是方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根，则 $a^2 - b + 2019$ 的值是 ()

A. 2023

B. 2021

C. 2020

D. 2019

【解答】解： a, b 是方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore b = 3 - a^2, a + b = -1, ab = -3,$$

$$\therefore a^2 - b + 2019 = a^2 - 3 + a^2 + 2019 = (a+b)^2 - 2ab + 2016 = 1 + 6 + 2016 = 2023;$$

故选：A.

6. 小刚在解关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 时，只抄对了 $a=1, b=4$ ，解出其中一个根是 $x = -1$ 。他核对时发现所抄的 c 比原方程的 c 值小 2。则原方程的根的情况是 ()

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是 $x = -1$

D. 有两个相等的实数根

【解答】解： \because 小刚在解关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 时，只抄对了 $a=1, b=4$ ，解出其中一个根是 $x = -1$ ，

$$\therefore (-1)^2 - 4 + c = 0,$$

解得： $c=3$ ，

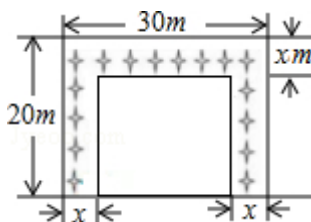
故原方程中 $c=5$ ，

$$\text{则 } b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0,$$

则原方程的根的情况是不存在实数根。

故选：A.

7. 扬帆中学有一块长 $30m$ ，宽 $20m$ 的矩形空地，计划在这块空地上划出四分之一的区域种花，小禹同学设计方案如图所示，求花带的宽度。设花带的宽度为 xm ，则可列方程为 ()



A. $(30 - x)(20 - x) = \frac{3}{4} \times 20 \times 30$

B. $(30 - 2x)(20 - x) = \frac{1}{4} \times 20 \times 30$

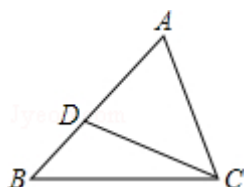
$$C. 30x+2 \times 20x = \frac{1}{4} \times 20 \times 30$$

$$D. (30-2x)(20-x) = \frac{3}{4} \times 20 \times 30$$

【解答】解：设花带的宽度为 xm ，则可列方程为 $(30-2x)(20-x) = \frac{3}{4} \times 20 \times 30$ ，

故选：D.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AB 上一点，下列条件中，能使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDC$ 相似的是（ ）



- A. $\angle B = \angle ACD$ B. $\angle ACB = \angle ADC$ C. $AC^2 = AD \cdot AB$ D. $BC^2 = BD \cdot AB$

【解答】解：选项 A、B、C 的条件无法判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDC$ 相似.

正确答案是 D. 理由如下：

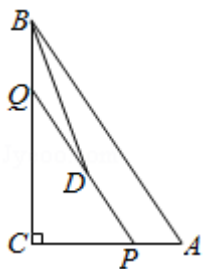
$$\because BC^2 = BD \cdot BA,$$

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}, \because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CBD \text{ (两边成比例夹角相等的两个三角形相似)}.$$

故选：D.

9. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$. 点 P 是边 AC 上一动点，过点 P 作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于点 Q ， D 为线段 PQ 的中点，当 BD 平分 $\angle ABC$ 时， AP 的长度为（ ）



- A. $\frac{8}{13}$ B. $\frac{15}{13}$ C. $\frac{25}{13}$ D. $\frac{32}{13}$

【解答】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 3,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BDQ, \text{ 又 } \angle ABD = \angle QBD,$$

$$\therefore \angle QBD = \angle BDQ,$$

$$\therefore QB=QD,$$

$$\therefore QP=2QB,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CPQ \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}, \text{ 即 } \frac{CP}{3} = \frac{4-QB}{4} = \frac{2QB}{5},$$

$$\text{解得, } CP = \frac{24}{13},$$

$$\therefore AP = CA - CP = \frac{15}{13},$$

故选: B.

10. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 所有的等腰三角形都相似
- B. 所有的菱形都相似
- C. 所有的矩形都相似
- D. 所有的等腰直角三角形都相似

【解答】解: A、所有的等腰三角形, 边的比不一定相等, 对应角不一定对应相等, 故错误;

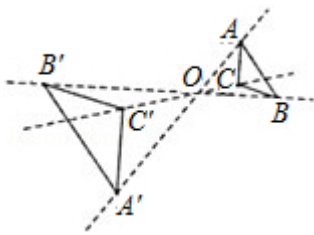
B、所有的菱形, 边的比一定相等, 而对应角不一定对应相等, 故错误;

C、所有的矩形, 对应角的度数一定相同, 但对应边的比值不一定相等, 故错误;

D、所有的等腰直角三角形, 边的比一定相等, 而对应角对应相等, 故正确.

故选: D.

11. 如图, 以点 O 为位似中心, 把 $\triangle ABC$ 放大为原图形的 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$, 以下说法中错误的是 ()



- A. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
- B. 点 C、点 O、点 C' 三点在同一直线上
- C. $AO:AA' = 1:2$
- D. $AB \parallel A'B'$

【解答】解: \because 以点 O 为位似中心, 把 $\triangle ABC$ 放大为原图形的 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 点 C、点 O、点 C' 三点在同一直线上, $AB \parallel A'B'$,

$AO:OA'=1:2$, 故选项 C 错误, 符合题意.

故选: C.

12. 在“践行生态文明, 你我一起行动”主题有奖竞赛活动中, 903 班共设置“生态知识、生态技能、生态习惯、生态文化”四个类别的竞赛内容, 如果参赛同学抽到每一类别的可能性相同, 那么小宇参赛时抽到“生态知识”的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

【解答】解: \because 共设置“生态知识、生态技能、生态习惯、生态文化”四个类别的竞赛内容, 参赛同学抽到每一类别的可能性相同,

\therefore 小宇参赛时抽到“生态知识”的概率是: $\frac{1}{4}$.

故选: B.

二. 填空题 (共 6 小题)

13. 一元二次方程 $2x^2=3x$ 的根是 $x_1=0$, 或 $x_2=\frac{3}{2}$.

【解答】解: $\because 2x^2=3x$,

$$\therefore 2x^2 - 3x = 0,$$

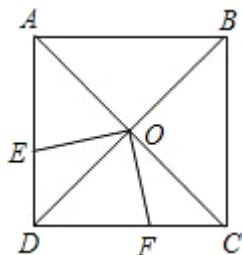
$$x(2x - 3) = 0,$$

$$2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0 \text{ 或 } x_2 = \frac{3}{2},$$

故答案为: $x_1 = 0$ 或 $x_2 = \frac{3}{2}$.

14. 已知: 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O . E 、 F 分别是边 AD 、 CD 上的点, 若 $AE=4\text{cm}$, $CF=3\text{cm}$, 且 $OE \perp OF$, 则 EF 的长为 5 cm .



【解答】解: 连接 EF ,

$$\because OD = OC,$$

$$\because OE \perp OF$$

$$\therefore \angle EOD + \angle FOD = 90^\circ$$

$$\because \text{正方形 } ABCD$$

$$\therefore \angle COF + \angle DOF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EOD = \angle FOC$$

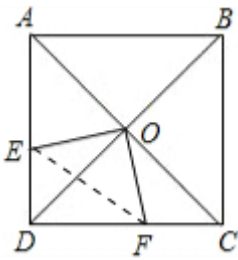
$$\text{而 } \angle ODE = \angle OCF = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle OFC \cong \triangle OED,$$

$$\therefore OE = OF, CF = DE = 3\text{cm}, \text{ 则 } AE = DF = 4,$$

$$\text{根据勾股定理得到 } EF = \sqrt{CF^2 + AE^2} = 5\text{cm}.$$

故答案为 5.



15. 已知线段 AB 及 AB 上一点 P , 当 P 满足下列哪一种关系时, P 为 AB 的黄金分割点 ① $AP^2 = AB \cdot PB$; ② $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$; ③ $PB = \frac{3-\sqrt{5}}{2}AB$; ④ $\frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; ⑤ $\frac{AB}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 其中正确的是 ①②③ (填“序号”)

【解答】解: $\because P$ 为 AB 的黄金分割点,

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP},$$

$$\therefore AP^2 = AB \cdot PB, \text{ 故①小题正确;}$$

$$AP^2 = AB \cdot (AB - AP),$$

$$AP^2 + AB \cdot AP - AB^2 = 0,$$

$$\text{解得 } AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB, \text{ 故②小题正确;}$$

$$(AB - PB) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

$$\text{整理得, } PB = \frac{3-\sqrt{5}}{2}AB, \text{ 故③小题正确;}$$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

$$\therefore PB = AB - AP = \frac{3-\sqrt{5}}{2}AB,$$

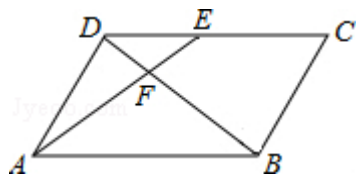
$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ 故④小题错误;}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故⑤小题错误.}$$

综上所述，①②③正确.

故答案为：①②③.

16. 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 为 CD 上一点，连接 AE ， BD 交于点 F ， $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF} = 4 : 25$ ，则 $DE : EC = \underline{2 : 3}$.



【解答】解： \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB, DC = AB,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle FBA, \angle DEF = \angle FAB,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BAF,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF} = (DE)^2 : (AB)^2 = 4 : 25,$$

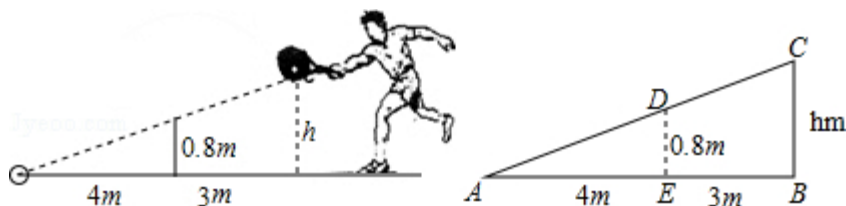
$$\text{即 } DE : AB = 2 : 5,$$

$$\therefore DE : DC = 2 : 5,$$

$$\text{则 } DE : EC = 2 : 3,$$

故答案为：2 : 3

17. 如图，李明打网球时，球恰好打过网，且落在离网 $4m$ 的位置上，则网球的击球的高度 h 为 $\underline{1.4m}$.



【解答】解：由题意得， $DE \parallel BC$ ，

所以， $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，

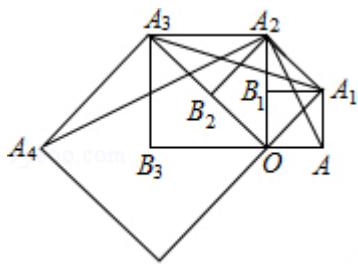
$$\text{所以，} \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{0.8}{h} = \frac{4}{4+3},$$

$$\text{解得 } h = 1.4m.$$

故答案为：1.4m.

18. 如图，四边形 OAA_1B_1 是边长为1的正方形，以对角线 OA_1 为边作第二个正方形 $OA_1A_2B_2$ ，连接 AA_2 ，得到 $\triangle AA_1A_2$ ；再以对角线 OA_2 为边作第三个正方形 $OA_2A_3B_3$ ，连接 A_1A_3 ，得到 $\triangle A_1A_2A_3$ ；再以对角线 OA_3 为边作第四个正方形，连接 A_2A_4 ，得到 $\triangle A_2A_3A_4 \dots$ 记 $\triangle AA_1A_2$ 、 $\triangle A_1A_2A_3$ 、 $\triangle A_2A_3A_4$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，如此下去，则 $S_{2019} = \underline{2^{2017}}$.



【解答】解：∵四边形 OAA_1B_1 是正方形，

$$\therefore OA = AA_1 = A_1B_1 = 1,$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle OAA_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore OA_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

$$\therefore OA_2 = A_2A_3 = 2,$$

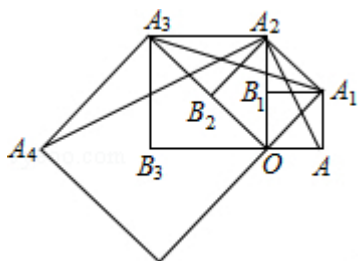
$$\therefore S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

$$\text{同理可求：} S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, S_4 = 4 \dots,$$

$$\therefore S_n = 2^{n-2},$$

$$\therefore S_{2019} = 2^{2017},$$

故答案为： 2^{2017} .



三. 解答题（共 7 小题）

19. (1) 计算： $9\sqrt{45} \div 3\sqrt{\frac{1}{10}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \times \sqrt{2\frac{2}{3}}$;

(2) 解方程： $2(x+2)^2 = x^2 - 4$.

【解答】解：(1) $9(x-1)^2 = (2x+3)^2$ $x_1 = 6, x_2 = -\frac{2}{5}$.

(2) $2(x+2)^2 = x^2 - 4$. $x_1 = -2, x_2 = -6$.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$ 有两不相等的实数根.

①求 m 的取值范围.

②设 x_1, x_2 是方程的两根且 $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 17 = 0$, 求 m 的值.

【解答】解：①根据题意得：

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0,$$

$$\text{解得：} m > -\frac{5}{4},$$

②根据题意得：

$$x_1 + x_2 = -(2m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 - 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 17$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 - 17$$

$$= (2m+1)^2 - (m^2 - 1) - 17$$

$$= 0,$$

$$\text{解得：} m_1 = \frac{5}{3}, \quad m_2 = -3 \text{ (不合题意，舍去),}$$

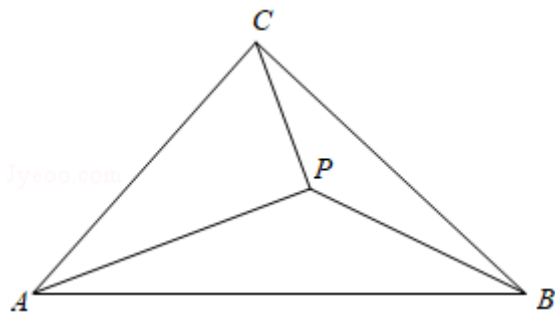
$$\therefore m \text{ 的值为 } \frac{5}{3}.$$

21. 如图，Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， P 为 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle APB = \angle BPC = 135^\circ$ 。

(1) 求证： $\triangle PAB \sim \triangle PBC$ ；

(2) 求证： $PA = 2PC$ ；

(3) 若点 P 到三角形的边 AB ， BC ， CA 的距离分别为 h_1 ， h_2 ， h_3 ，求证 $h_1^2 = h_2 \cdot h_3$ 。



【解答】解：(1) $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ = \angle PBA + \angle PBC$$

$$\text{又 } \angle APB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB + \angle PBA = 45^\circ$$

$$\therefore \angle PBC = \angle PAB$$

$$\text{又 } \because \angle APB = \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PBC$$

(2) $\because \triangle PAB \sim \triangle PBC$

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{BC}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=AC$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$$

$$\therefore PB = \sqrt{2}PC, PA = \sqrt{2}PB$$

$$\therefore PA = 2PC$$

(3) 如图, 过点 P 作 $PD \perp BC$, $PE \perp AC$ 交 BC 、 AC 于点 D 、 E ,

$$\therefore PF = h_1, PD = h_2, PE = h_3,$$

$$\because \angle CPB + \angle APB = 135^\circ + 135^\circ = 270^\circ$$

$$\therefore \angle APC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAP + \angle ACP = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle ACP + \angle PCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EAP = \angle PCD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEP \sim \text{Rt}\triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{PE}{DP} = \frac{AP}{PC} = 2, \text{ 即 } \frac{h_3}{h_2} = 2,$$

$$\therefore h_3 = 2h_2$$

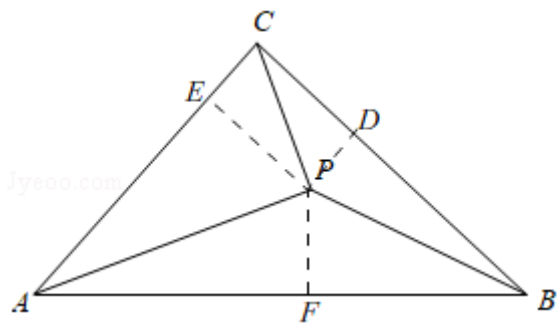
$$\because \triangle PAB \sim \triangle PBC,$$

$$\therefore \frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2},$$

$$\therefore h_1 = \sqrt{2}h_2$$

$$\therefore h_1^2 = 2h_2^2 = 2h_2 \cdot h_2 = h_2 h_3.$$

$$\text{即: } h_1^2 = h_2 \cdot h_3.$$

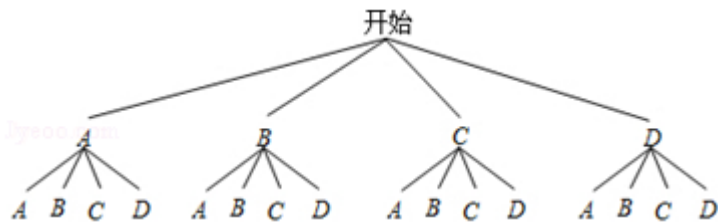


为满足大家的游览需求，倾情打造了 4 条各具特色的趣玩路线，分别是：A. “解密世园会”、B. “爱我家，爱园艺”、C. “园艺小清新之旅”和 D. “快速车览之旅”。李欣和张帆都计划暑假去世园会，他们各自在这 4 条线路中任意选择一条线路游览，每条线路被选择的可能性相同。

- (1) 李欣选择线路 C. “园艺小清新之旅”的概率是多少？
- (2) 用画树状图或列表的方法，求李欣和张帆恰好选择同一线路游览的概率。

【解答】解：(1) 在这四条线路任选一条，每条被选中的可能性相同，
∴在四条线路中，李欣选择线路 C. “园艺小清新之旅”的概率是 $\frac{1}{4}$ ；

(2) 画树状图分析如下：
共有 16 种等可能的结果，李欣和张帆恰好选择同一线路游览的结果有 4 种，
∴李欣和张帆恰好选择同一线路游览的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ 。



23. 某公司今年 1 月份的生产成本是 400 万元，由于改进技术，生产成本逐月下降，3 月份的生产成本是 361 万元。假设该公司 2、3、4 月每个月生产成本的下降率都相同。

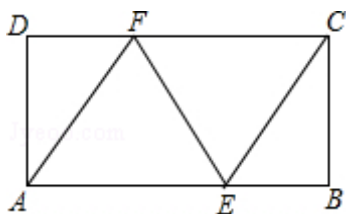
- (1) 求每个月生产成本的下降率；
- (2) 请你预测 4 月份该公司的生产成本。

【解答】解：(1) 设每个月生产成本的下降率为 x ，
根据题意得： $400(1 - x)^2 = 361$ ，
解得： $x_1 = 0.05 = 5\%$ ， $x_2 = 1.95$ （不合题意，舍去）。
答：每个月生产成本的下降率为 5%。

(2) $361 \times (1 - 5\%) = 342.95$ （万元）。
答：预测 4 月份该公司的生产成本为 342.95 万元。

24. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=2$ ，点 E 、 F 分别在 AB 、 CD 上，且 $BE=DF=\frac{3}{2}$ 。

- (1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形；
- (2) 求线段 EF 的长。



【解答】(1) 证明：∵在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=2$ ，

∴ $CD=AB=4$ ， $AD=BC=2$ ， $CD\parallel AB$ ， $\angle D=\angle B=90^\circ$ ，

$$\because BE=DF=\frac{3}{2},$$

$$\therefore CF=AE=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2},$$

$$\therefore AF=CE=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2},$$

$$\therefore AF=CF=CE=AE=\frac{5}{2},$$

∴四边形 $AECF$ 是菱形；

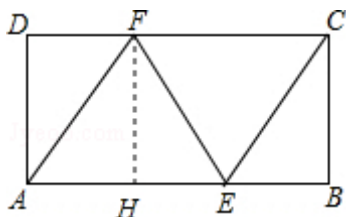
(2) 解：过 F 作 $FH\perp AB$ 于 H ，

则四边形 $AHFD$ 是矩形，

$$\therefore AH=DF=\frac{3}{2}, FH=AD=2,$$

$$\therefore EH=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1,$$

$$\therefore EF=\sqrt{FH^2+HE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

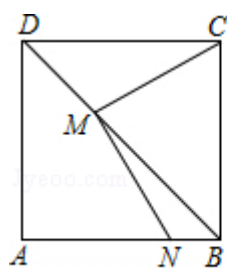


25. 如图①，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， M 为对角线 BD 上任意一点（不与 B 、 D 重合），连接 CM ，过点 M 作 $MN\perp CM$ ，交线段 AB 于点 N

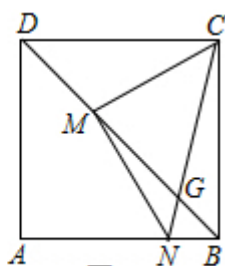
(1) 求证： $MN=MC$ ；

(2) 若 $DM:DB=2:5$ ，求证： $AN=4BN$ ；

(3) 如图②，连接 NC 交 BD 于点 G 。若 $BG:MG=3:5$ ，求 $NG\cdot CG$ 的值。

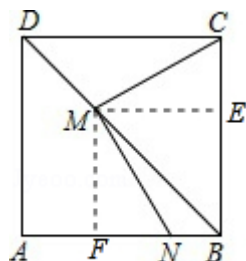


图①



图②

【解答】解：（1）如图①，过 M 分别作 $ME \parallel AB$ 交 BC 于 E ， $MF \parallel BC$ 交 AB 于 F ，



图①

则四边形 $BEMF$ 是平行四边形，

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ABD = \angle CBD = \angle BME = 45^\circ$ ，

$\therefore ME = BE$ ，

\therefore 平行四边形 $BEMF$ 是正方形，

$\therefore ME = MF$ ，

$\because CM \perp MN$ ，

$\therefore \angle CMN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle FME = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CME = \angle FMN$ ，

$\therefore \triangle MFN \cong \triangle MEC$ (ASA)，

$\therefore MN = MC$ ；

（2）由（1）得 $FM \parallel AD$ ， $EM \parallel CD$ ，

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{DM}{BD} = \frac{2}{5}$$

$\therefore AF = 2.4$ ， $CE = 2.4$ ，

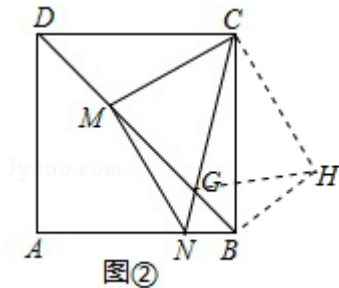
$\because \triangle MFN \cong \triangle MEC$ ，

$\therefore FN = EC = 2.4$ ，

$$\therefore AN=4.8, BN=6-4.8=1.2,$$

$$\therefore AN=4BN;$$

(3) 如图②, 把 $\triangle DMC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle BHC$, 连接 GH ,



$$\because \triangle DMC \cong \triangle BHC, \angle BCD=90^\circ,$$

$$\therefore MC=HC, DM=BH, \angle CDM=\angle CBH=45^\circ, \angle DCM=\angle BCH,$$

$$\therefore \angle MBH=90^\circ, \angle MCH=90^\circ,$$

$$\because MC=MN, MC \perp MN,$$

$\therefore \triangle MNC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle MNC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle NCH=45^\circ,$$

$$\therefore \triangle MCG \cong \triangle HCG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore MG=HG,$$

$$\because BG:MG=3:5,$$

设 $BG=3a$, 则 $MG=GH=5a$,

在 $\text{Rt}\triangle BGH$ 中, $BH=4a$, 则 $MD=4a$,

\because 正方形 $ABCD$ 的边长为6,

$$\therefore BD=6\sqrt{2},$$

$$\therefore DM+MG+BG=12a=6\sqrt{2},$$

$$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BG=\frac{3\sqrt{2}}{2}, MG=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \angle MGC=\angle NGB, \angle MNG=\angle GBC=45^\circ,$$

$$\therefore \triangle MGC \sim \triangle NGB,$$

$$\therefore \frac{GC}{GB}=\frac{MG}{NG},$$

$$\therefore CG \cdot NG = BG \cdot MG = \frac{15}{2}.$$