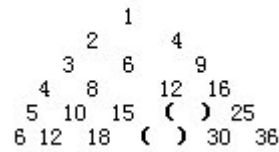


第一讲 从数表中找规律

在前面学习了数列找规律的基础上，这一讲将从数表的角度出发，继续研究数列的规律性。

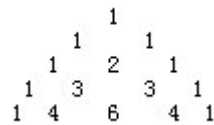
例1 下图是按一定的规律排列的数学三角形，请你按规律填上空缺的数字。



分析与解答 这个数字三角形的每一行都是等差数列（第一行除外），因此，第5行中的括号内填20，第6行中的括号内填 24。

例2 用数字摆成下面的三角形，请你仔细观察后回答下面的问题：

- ① 这个三角阵的排列有何规律？
- ② 根据找出的规律写出三角阵的第6行、第7行。
- ③ 推断第20行的各数之和是多少？



分析与解答

①首先可以看出，这个三角阵的两边全由1组成；其次，这个三角阵中，第一行由1个数组成，第2行有两个数…第几行就由几个数组成；最后，也是最重要的一点是：三角阵中的每一个数（两边上的数1除外），都等于上一行中与它相邻的两数之和. 如：2=1+1，3=2+1，4=3+1，6=3+3。

②根据由①得出的规律，可以发现，这个三角阵中第6行的数为1，5，10，10，5，1；第7行的数为1，6，15，20，15，6，1。

③要求第20行的各数之和，我们不妨先来看看开始的几行数。

第1行	1=1	
第2行	1 + 1=2 ¹	
第3行	1 + 2 + 1=2 ²	
第4行	1+3+3 + 1=2 ³	
第5行	1 + 4 + 6 + 4 + 1=2 ⁴	
第6行	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1=2 ⁵	

行数-1

至此，我们可以推断，第20行各数之和为2¹⁹。

注：其中，2ⁿ表示n个2相乘，即 $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \uparrow 2}$ ，其中n为自然数。

[本题中的数表就是著名的杨辉三角，这个数表在组合论中将得到广泛的应用]

例3 将自然数中的偶数2，4，6，8，10…按下表排成5列，问2000出现在哪一列？

A	B	C	D	E
	2	4	6	8
16	14	12	10	
18	20	22	24	
32	30	28	26	
34	36	38	40	
48	46	44	42	
	50	...		

分析与解答

方法1: 考虑到数表中的数呈S形排列, 我们不妨把每两行分为一组, 每组8个数, 则按照组中数字从小到大的顺序, 它们所在的列分别为B、C、D、E、D、C、B、A. 因此, 我们只要考察2000是第几组中的第几个数就可以了, 因为2000是自然数中的第1000个偶数, 而 $1000 \div 8 = 125$, 即2000是第125组中的最后一个数, 所以, 2000位于数表中的第250行的A列。

方法2: 仔细观察数表, 可以发现: A列中的数都是16的倍数, B列中数除以16余2或者14, C列中的数除以16余4或12, D列的数除以16余6或10, E列中的数除以16余8. 这就是说, 数表中数的排列与除以16所得的余数有关, 我们只要考察2000除以16所得的余数就可以了, 因为 $2000 \div 16 = 125$, 所以 2000位于A列。

学习的目的不仅仅是为了会做一道题, 而是要学会思考问题的方法. 一道题做完了, 我们还应该仔细思考一下, 哪种方法更简洁, 题目主要考察的问题是什么...这样学习才能举一反三, 不断进步。

就例 3而言, 如果把偶数改为奇数, 2000改为 1993, 其他条件不变, 你能很快得到结果吗?

例4 按图所示的顺序数数, 问当数到1500时, 应数到第几列? 1993呢?

①	②	③	④	⑤
1	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	18	19	20	21
25	24	23	22	
	26	27	28	29
33	32	31	30	
	34	...		

分析与解答

方法1: 同例3的考虑, 把数表中的每两行分为一组, 则第一组有9个数, 其余各组都只有8个数。

$$(1500-9) \div 8 = 186 \cdots 3$$

$$(1993-9) \div 8 = 248$$

所以, 1500位于第188组的第3个数, 1993位于第249组的最后一个数, 即1500位于第④列, 1993位于第①列。

方法2: 考虑除以8所得的余数. 第①列除以8余1, 第②列除以8余2或是8的倍数, 第③列除以8余3或7, 第④列除以8余4或6, 第⑤列除以8余5; 而 $1500 \div 8 = 187 \cdots 4$, $1993 \div 8 = 249 \cdots 1$, 则1993位于第①列, 1500位于第④列。

例5 从1开始的自然数按下图所示的规则排列, 并用一个平行四边形框出九个数, 能否使这九个数的和等于①1993; ②1143; ③1989. 若能办到, 请写出平行四边形框内的最大数和最小数; 若不能办到, 说明理由。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
...							

分析与解答

我们先来看这九个数的和有什么规律. 仔细观察, 容易发现: $12+28=2\times 20$, $13+27=2\times 20$, $14+26=2\times 20$, $19+21=2\times 20$, 即: 20是框中九个数的平均数. 因此, 框中九个数的和等于20与9的乘积. 事实上, 由于数表排列的规律性, 对于任意由这样的平行四边形框出的九个数来说, 都有这样的规律, 即这九个数的和等于平行四边形正中间的数乘以9.

① 因为1993不是9的倍数, 所以不可能找到这样的平行四边形, 使其中九个数的和等于1993。

② $1143\div 9=127$, $127\div 8=15\cdots 7$. 这就是说, 如果1143是符合条件的九个数的和, 则正中间的数一定是127, 而127位于数表中从右边数的第2列. 但从题中的图容易看出, 平行四边形正中间的数不能位于第1行, 也不能位于从左数的第1列、第2列、第7列和第8列, 因此, 不可能构成以127为中心的平行四边形。

③ $1989\div 9=221$, $221\div 8=27\cdots 5$, 即1989是9的倍数, 且数221位于数表中从左起的第5列, 故可以找到九个数之和为1989的平行四边形, 如图:

其中最大的数是229, 最小的数是213.

213	214	215
220	221	222
227	228	229

习题一

1. 观察下面已给出的数表，并按规律填空：

```

      1
    3  5
  7  9 11
13 15 17 19
21 23 ( ) 27 29
31 33 35 ( ) 39 41

```

2. 下面一张数表里数的排列存在着某种规律，请你找出规律之后，按照规律填空。

2	5	6	7	11
8	10	()	4	18
6	10	12	9	20

3. 下图是自然数列排成的数表，按照这个规律，1993在哪一列？

```

  A  B  C  D  E  F
    1      2      3
  6      5      4
    7      8      9
 12      11     10
    13     14     15
 18     17     16
    19...

```

4. 从1开始的自然数如下排列，则第2行中的第7个数是多少？

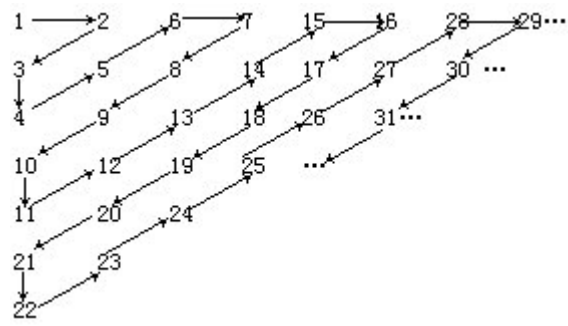
```

  1   2   6   7   15  16   ...
  3   5   8   14  17   ...
  4   9   13  18   ...
10  12   ...
11   ...
...

```

习题一解答

- 第5行的括号中填25；第6行的括号中填37。
- 这个数表的规律是：第二行的数等于相应的第三行的数与第一行的数的差的2倍。即： $8=2 \times (6-2)$ ， $10=2 \times (10-5)$ ， $4=2 \times (9-7)$ ， $18=2 \times (20-11)$ 。因此，括号内填12。
- 1993应排在B列。
- 参看下表：



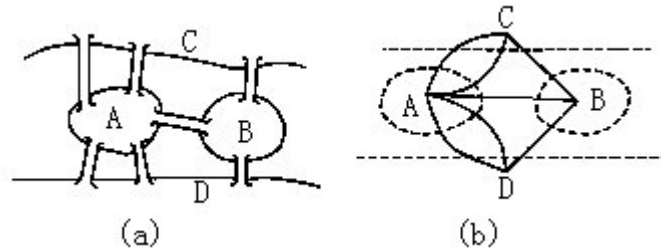
第2行的第7个数为30.

第二讲 从哥尼斯堡七桥问题谈起

故事发生在18世纪的哥尼斯堡城. 流经那里的一条河中有两个小岛, 还有七座桥把这两个小岛与河岸联系起来, 那里风景优美, 游人众多. 在这美丽的地方, 人们议论着一个有趣的问题: 一个游人怎样才能不重复地一次走遍七座桥, 最后又回到出发点呢?

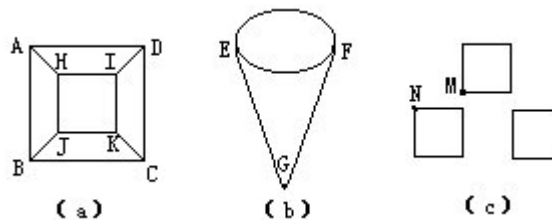
对于这个貌似简单的问题, 许多人跃跃欲试, 但都没有获得成功. 直到1836年, 瑞士著名的数学家欧拉才证明了这个问题的不可能性。

欧拉解决这个问题的方法非常巧妙. 他认为: 人们关心的只是一次不重复地走遍这七座桥, 而并不关心桥的长短和岛的大小, 因此, 岛和岸都可以看作一个点, 而桥则可以看成是连接这些点的一条线. 这样, 一个实际问题就转化为一个几何图形 (如下图) 能否一笔画出的问题了。



那么, 什么叫一笔画? 什么样的图可以一笔画出? 欧拉又是如何彻底证明七桥问题的不可能性呢? 下面, 我们就来介绍这一方面的简单知识。

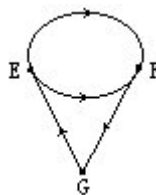
数学中, 我们把由有限个点和连接这些点的线 (线段或弧) 所组成的图形叫做图 (如图 (a)) ; 图中的点叫做图的结点; 连接两结点的线叫做图的边. 如图 (b) 中, 有三个结点: E、F、G, 四条边: 线段EG、FG以及连接E、F的两段弧. 从图 (a)、(b) 中可以看出, 任意两点之间都有一条通路 (即可以从其中一点出发, 沿着图的边走到另一点, 如A到I的通路为A→H→I或A→D→I…), 这样的图, 我们称为连通图; 而下图中 (c) 的一些结点之间却不存在通路 (如M与N), 像这样的图就不是连通图。



所谓图的一笔画, 指的就是: 从图的一点出发, 笔不离纸, 遍历每条边恰好一次, 即每条边都只画一次, 不准重复. 从上图中容易看出: 能一笔画出的图首先必须是连通图. 但是否所有的连通图都可以一笔画出呢? 下面, 我们就来探求解决这个问题的方法。

为了叙述的方便, 我们把与奇数条边相连的结点叫做奇点, 把与偶数条边相连的点称为偶点. 如上图 (a) 中的八个结点全是奇点, 上图 (b) 中E、F为奇点, G为偶点。

容易知道, 上图 (b) 可以一笔画出, 即从奇点E出发, 沿箭头所指方向, 经过F、G、E, 最后到达奇点F; 同理, 从奇点F出发也可以一笔画出, 最后到达奇点E. 而从偶点G出发, 却不能一笔画出. 这是为什么呢?



事实上, 这并不是偶然现象. 假定某个图可以一笔画成, 且它的结点X既不是起点, 也不是终点, 而是中间点, 那么X一定是一个偶点. 这是因为无论何时通过一条边到达X, 由于不能重复, 必须从另一条边离开X. 这样与X连接的边一定成对出现, 所以X必为偶点, 也就是说: 奇点在一笔画中只能作为起或终点. 由此可以看出, 在一个可以一笔画出的图中, 奇点的个数最多只有两个。

在七桥问题的图中有四个奇点, 因此, 欧拉断言: 这个图无法一笔画出, 也即游人不可能不重复地一次走遍七座桥. 更进一步地, 欧拉在解决七桥问题的同时彻底地解决了一笔画的问题, 给出了下面的欧拉定理:

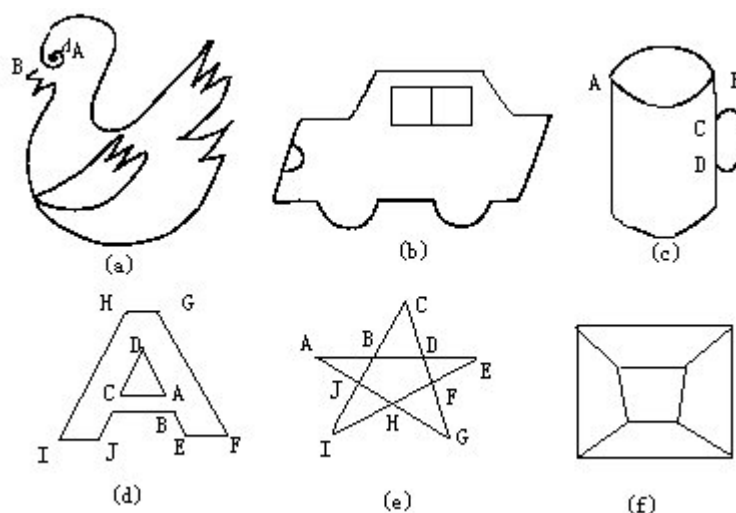
①凡是由偶点组成的连通图, 一定可以一笔画成; 画时可以任一偶点为起点, 最后一定能以这个点为终点画完此图。

②凡是只有两个奇点 (其余均为偶点) 的连通图, 一定可以一笔画完; 画时必须以一个奇点为起点, 另一个奇点为终点。

③其他情况的图, 都不能一笔画出。

下面我们就来研究一笔画问题的具体应用:

例1 观察下面的图形, 说明哪些图可以一笔画完, 哪些不能, 为什么? 对于可以一笔画的图形, 指明画法。



分析与解答

(a) 图: 可以一笔画, 因为只有两个奇点A、B; 画法为A→头部→翅膀→尾部→翅膀→嘴。

(b) 图: 不能一笔画, 因为此图不是连通图。

(c) 图: 不能一笔画, 因图中有四个奇点: A、B、C、D。

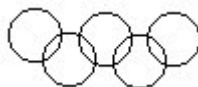
(d) 图: 可以一笔画, 因为只有两个奇点; 画法为: A→C→D→A→B→E→F→G→H→I→J→K→B。

(e) 图: 可以一笔画, 因为没有奇点; 画法可以是: A→B→C→D→E→F→G→H→I→J→B→D→F→H→J→A。

(f) 图: 不能一笔画出, 因为图中有八个奇点。

注意: 在上面能够一笔画出的图中, 画法并不是惟一的. 事实上, 对于有两个奇点的图来说, 任一个奇点都可以作为起点, 以另一个奇点作为终点; 对于没有奇点的图来说, 任一个偶点都可以作为起点, 最后仍以这点作为终点。

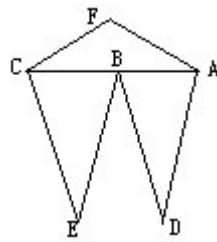
例2 下图是国际奥委会的会标, 你能一笔画把它画出来吗?



分析与解答

一个图能否一笔画出, 关键取决于这个图中奇点的个数. 通过观察可以发现, 上图中所有的结点都是偶点, 因此, 这个图可以一笔画出. 画时可以任一结点作为起点。

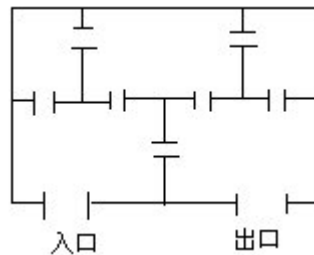
例3 下图是某地区所有街道的平面图. 甲、乙二人同时分别从A、B出发, 以相同的速度走遍所有的街道, 最后到达C. 如果允许两人在遵守规则的条件下可以选择最短路径的话, 问两人谁能最先到达C?



分析与解答

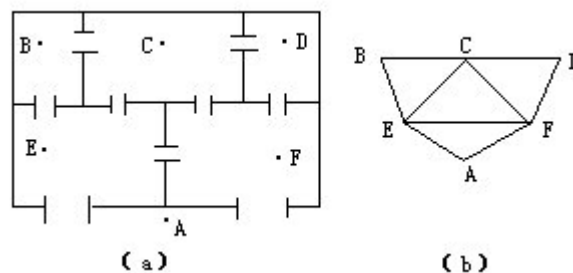
本题要求二人都必须走遍所有的街道最后到达C, 而且两人的速度相同. 因此, 谁走的路程少, 谁便可以先到达C. 容易知道, 在题目的要求下, 每个人所走路程都至少是所有街道路程的总和. 仔细观察上图, 可以发现图中有两个奇点: A和C. 这就是说, 此图可以以A、C两点分别作为起点和终点而一笔画成. 也就是说, 甲可以从A出发, 不重复地走遍所有的街道, 最后到达C; 而从B出发的乙则不行. 因此, 甲所走的路程正好等于所有街道路程的总和, 而乙所走的路程则必定大于这个总和, 这样甲先到达C.

例4 下图是某展览厅的平面图, 它由五个展室组成, 任两展室之间都有门相通, 整个展览厅还有一个进口和一个出口, 问游人能否一次不重复地穿过所有的门, 并且从入口进, 从出口出?



分析与解答

这种应用题, 表面看起来不易解决, 事实上, 只要认真分析, 就可以发现: 我们并不关心展室的大小以及路程的远近, 关心的只是能否一次不重复地走遍所有的门, 与七桥问题较为类似. 因此, 仿照七桥问题的解法, 我们可以把每个展室看作一个结点, 整个展厅的外部也看作一个点, 两室之间有门相通, 可以看作两点之间有边相连. 这样, 展厅的平面图就转化成了我们数学中的图, 一个实际问题也就转化为这个图 (如下图) 能否一笔画成的问题了, 即能否从A出发, 一笔画完此图, 最后再回到A.



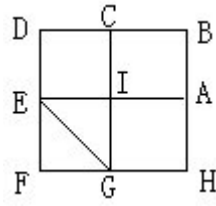
上图 (b) 中, 所有的结点都是偶点, 因此, 一定可以以A作为起点和终点而一笔画完此图. 也即游人可以从入口进, 一次不重复地穿过所有的门, 最后从出口出来.

下面仅给出一种参观路线:

$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow A$.

注意: 本题中, 必须以A分别作为起点和终点. 这就要求图中必须没有奇点, 否则, 若有两个奇点, 虽能一笔画出, 但与从入口入、出口出 (即游人的出发和终止点都在展厅外) 有矛盾, 其他有多个奇点的情况则根本不可能一笔画出. 另外, 通过前面的学习, 大家已经知道: 一个图如果能够一笔画出, 则画的方法不止一种, 但各种方法大同小异. 因此, 本书中, 一笔画的问题, 一般我们只给出一种画法.

例5 一张纸上画有如下图所示的图, 你能否用剪刀一次连续剪下图中的三个正方形和两个三角形?



分析与解答

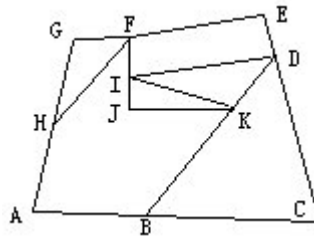
一次连续剪下图中的三个正方形和两个三角形, 必须要求剪刀连续剪过图中所有的线. 即上述问题实质上是这个图能否一笔画出的问题。

显然, 图中有两个奇点, 因此可以一笔画出, 剪刀所走的路线可以是: $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow I \rightarrow C$. 这样, 就能用剪刀一次连续剪下三个正方形和两个三角形。

例6 下图是一个公园的平面图. 要使游客走遍每条路而不重复, 问出入口应设在哪里?

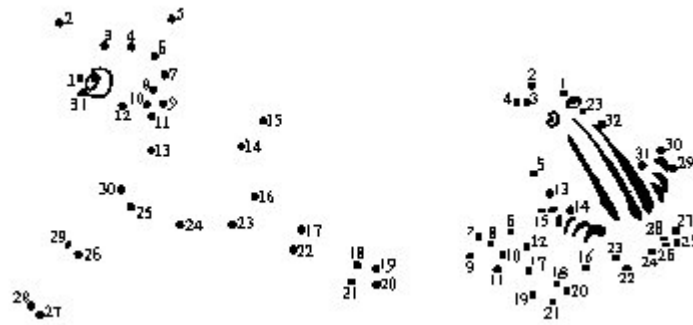
分析与解答

本题实际上是这个图以哪两点为起点和终点一笔画出的问题. 观察左图, 可以发现仅有两个奇点: H与B点. 因此, 出入口应分别设在H点与B点.

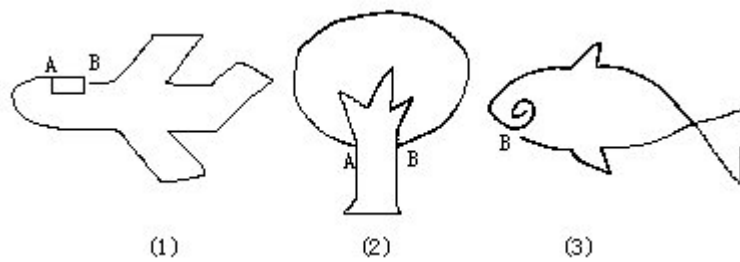


习题二

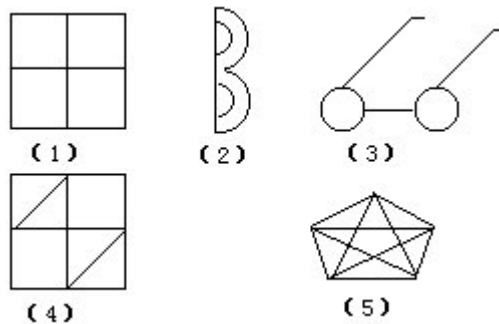
1. 请将图中的小黑点按1, 2, 3, 4, 5...的顺序, 用线连接起来, 看看是什么?



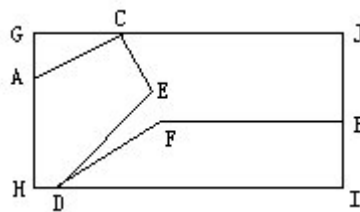
2. 请一笔画出下列各图.



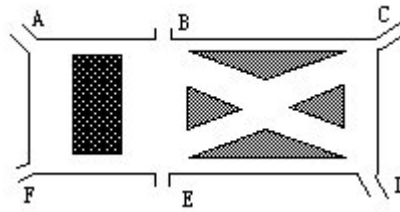
3. 判断下列各图能否一笔画出, 并说明理由.



4. 下图是一公园的平面图, 要使游客走遍每一条路且不重复, 问出入口应设在哪里?

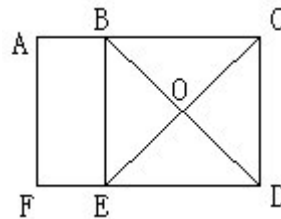


5. 下图是一个商场的平面图, 顾客可以从六个门进出商场 (阴影部分为各商品部, 空白处为通道), 请你设计一种能够一次走遍各通道而又不必走重复路线的进出方法.



习题二解答

1. 左图是鹿，右图是青蛙。
2. 图（1）（2）都可从A开始，最后到B，或从B开始画，最后到A. 图（3）则可以从眼睛开始，沿线画至点B。
3. 前面图中，（1）（2）（3）均不能一笔画出，这是因为：图（1）中有四个奇点，图（2）有四个奇点，图（3）有六个奇点。
- 图（4）和图（5）均可一笔画出，这是因为图（4）和图（5）都没有奇点. 画时可以从任一点开始。
4. 出入口应分别设在两个奇点处，即A、B处。
5. 可选C、D分别作为入口和出口. 事实上，本题是把每条通道看作是边，通道的交点看作是结点（每个门也作为结点），于是问题就转化为右图能否一笔画出的问题. 显然以D、C分别作为起点和终点可一笔画完此图. 如右图，顾客的行进路线可以是：D→C→O→E→F→A→B→E→D→O→B→C.



第三讲 多笔画及应用问题

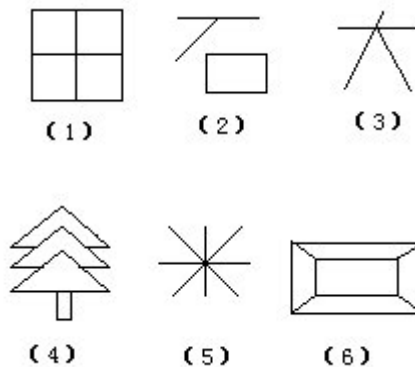
上一讲中, 我们主要研究了利用奇偶点来判别一笔画, 学习了利用一笔画来研究一些简单的实际问题. 然而, 实际生活中, 许多问题的图并不能一笔画出, 也就是说, 一笔画理论不能直接用来解决这些问题. 因此, 在一笔画的基础上, 我们有必要对这一类的问题作一些深入研究.

一、多笔画

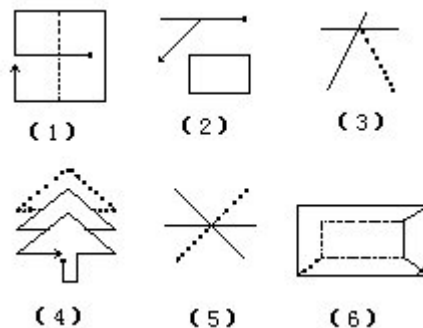
我们把不能一笔画成的图, 归纳为多笔画. 首先, 我们来考虑一个不能一笔画成的图, 至少用几笔才能画完呢? (为了研究的方便, 我们仍然只研究连通图, 非连通图可转化为连通图.)

下面, 我们就用简单熟悉的图来研究这个问题. 通过前面的学习我们已经知道: 当奇点个数不是0或2时, 图不能一笔画出. 因此, 我们可以猜想: 奇点个数是研究多笔画问题的关键.

观察下面的图形, 并列出奇点的个数与笔画数 (至少几笔画完此图) 的关系表格.



为了表示得清楚一些, 我们把图中第一笔画出的部分用实线表示, 第二笔画出的部分用虚线表示, 第三笔画出的部分用点线表示, 其余部分请大家自己画出.



奇点个数与笔画数的关系可列表如下:

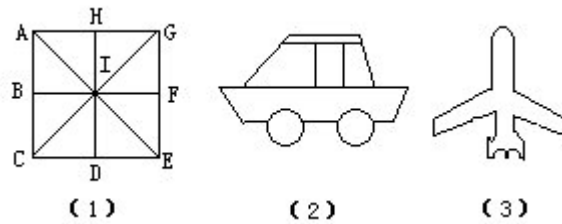
图	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
奇点数	4	4	6	6	8	8
笔画数	2	2	3	3	4	4

容易看出, 笔画数恰等于奇点个数的一半. 事实上, 对于任意的连通图来说, 如果有 $2n$ 个奇点 (n 为自然数), 那么这个图一定可以用 n 笔画成. 公式如下:

奇点数 $\div 2$ = 笔画数, 即 $2n \div 2 = n$.

细心的同学可能会问: $2n$ 是表示一个偶数, 但假若有奇数个奇点怎么办? 实际上, 这种情况不可能出现, 连通图中, 奇点的个数只能是偶数. 想一想, 这是为什么呢?

例1 观察下面的图, 看各至少用几笔画成?



分析解答

(1) 图中有8个奇结点, 因此需用4笔画成。

(2) 图中有12个奇点, 需6笔画成。

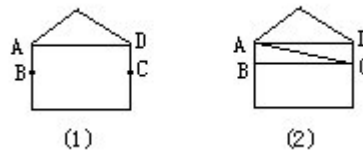
(3) 图是无奇点的连通图, 可一笔画成。

例2 判断下面的图能否一笔画成; 若不能, 你能用什么方法把它改成一笔画?

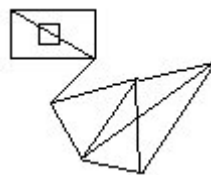


分析解答

图中共有4个奇点, 因此, 显然无法一笔画成. 要想改为一笔画, 关键在于减少奇点的数目 (把奇点的个数减少到0或2), 具体方法有两种:



①去边. 即将多余的两奇点间的边去掉. 这种方法只适用于多余的两奇点间有边相连的情况, 如对下图就不适用.



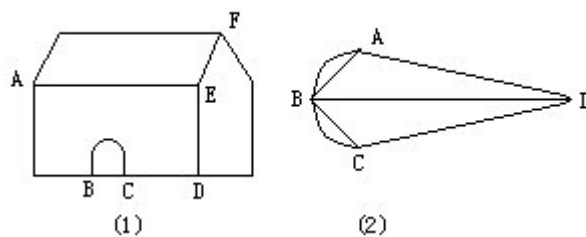
本题中, 可去掉连结奇点B、C的边BC。

②添边. 即在多余的两奇点间添上一条边. 本题中, 可以在奇点A、C间添上边AC. 添边的方法适用于任意多笔画的图。

改为一笔画时, 具体实现的方案很多, 如本题中, 我们可以通过上述两种方法把奇点个数减少到0。

小结: 对于有 $2n$ (n 为大于1的自然数) 个奇点的连通图来说, 改为一笔画的方法一般是: 在多余的 $n-1$ (或 n) 对奇点间, 各添上一条边; 如果这 $n-1$ 对 (或 n 对) 奇点间都有边相连, 也可以在这 $n-1$ (或 n) 对间各去掉一条边。

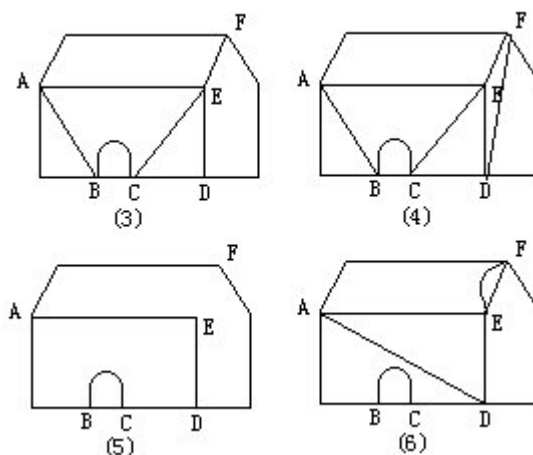
例3 将下图改为一笔画。



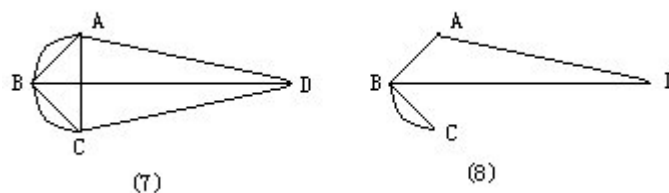
分析解答

图(1)中有6个奇点, 因此可添上两条(或3条)边后可改为一笔画; 又因为这个图中, 把这6个奇点任意分为3对后, 最多只有两对奇点间有边相连, 因此, 可去掉两条边后改为一笔画, 举例如图(3)~(6)。

图(2)中有4个奇点, 因此, 可添上2条(或1条)边后改为一笔画; 又因为把奇点按A与B, C与D(或A与D, B与C)分为两对后, 每对间均有边相连, 因此, 可去掉两条(或1条)边后改为一笔画. 举例如图(7)~(8)。



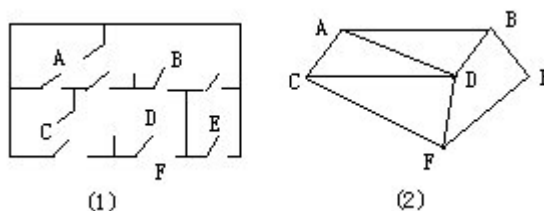
说明: 图(6)运用了两种方法, 去掉边BC, 添上边AD与EF.



二、应用问题

在学习了一笔画与多笔画的理论以后, 我们来看看这些理论在实际问题中的应用。

例4 下图是某少年宫的平面图, 共有五个大厅, 相邻两厅之间都有门相通(D与E两厅除外), 并且有一个入口和一个出口. 问游人能否从入口入口, 一次不重复地穿过所有的门? 如果可以, 请指明穿行路线; 如果不能, 请你想一想, 关闭哪扇门后就可以办到?



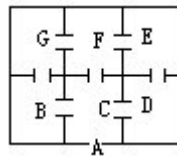
分析解答

类似于上一节中的问题, 我们把每个厅看作一个结点(室外也看作一个结点), 两厅之间有门相通可看作两结点之间有线相连, 于是问题转化为图(2)能否一笔画完的问题. 显然, 图中有四个奇点: A、B、C、F, 不可能一笔画出, 即游人不可能一次不重复地穿过所有的门。

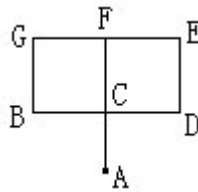
4个奇点时, 只要把连接其中两个奇点的一条边去掉, 这个图就只剩下两个奇点, 就可以一笔画出, 即游人可以用剩下的两个奇点分别作为起点和终点, 不重复地穿过所有的门. 关掉一扇门实际上就是去掉一条边. 因此, 我们可以考虑去掉边AC或AB. 但是, 值得注意的是: 游人必须从入口进入, 也即结点F必须作为起点, 而本题中有4个奇点且只允许去掉一条边, 因此F必须是奇点, 也即不能去掉与F相连的边。

通过上面的分析, 我们知道: 只要关闭A、C之间的门, 或A、B之间的门, 游人就可以从入口(边FC或FD或FE)入, 一次不重复地穿过所有的门。

例5 下图是某个花房的平面图, 它由六间展室组成, 每相邻两室间有一门相通. 请你设计一个出口, 使参观者能够从入口处A进去, 一次不重复地经过所有的门, 最后由出口走出花房。

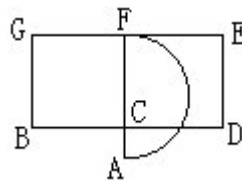


分析解答



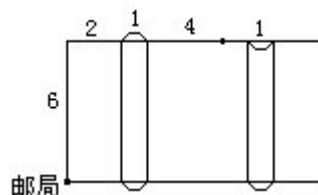
同上分析, 可把每个花室看作一个点(花房外也看作是一个结点), 每个门看作是连接两结点的边, 于是, 上图就转化为右图. 设计一个出口, 实际上是添一条与结点A相连的边, 使新图能够以A为起点和终点一笔画出, 也就是说, 新图中, 所有的点都必须是偶点。

观察右图, 发现只有A、F两个奇点, 所以, 应把边添在A与F之间(如右图), 即: 把出口开在花室F处。



例4与例5都是把多笔画改为一笔画的实际应用。

例6 下图中的每条线都表示一条街道, 线上的数字表示这条街道的里数. 邮递员从邮局出发, 要走遍各条街道, 最后回到邮局. 问: 邮递员怎样走, 路线最合理?

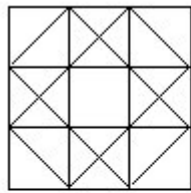


分析解答

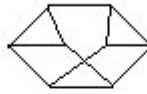
邮递员走的路程最短时, 路线最合理. 利用一笔画的知识分析可得: 因为邮递员从邮局作为起点和终点, 所以没有奇点是最理想的, 但实际上图中却有8个奇点, 邮递员必须重复走某些路线. 根据多笔画改为一笔画的方法得知:

习题三

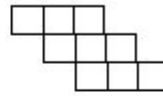
1. 下列各图至少要用几笔画完?



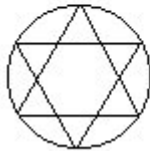
(1)



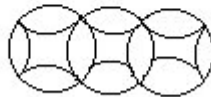
(2)



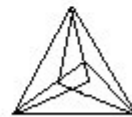
(3)



(4)

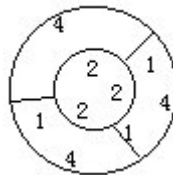


(5)

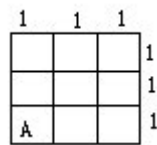


(6)

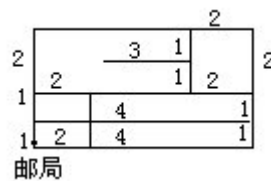
2. 游人在林间小路(如右图)上散步, 问能否一次不重复地走遍所有的路后回到出发点? 如不能, 应选择怎样的路线才能使全程最短, 其最短路程是多少?



3. 一辆清洁车清扫街道, 每段街道长1公里, 清洁车由A出发, 走遍所有的街道再回到A. 怎样走路程最短, 全程多少公里?



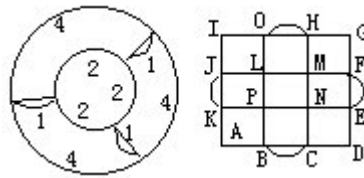
4. 一个邮递员的投递范围如右图, 图上的数字表示各段街道的长度. 请你设计一条最短的投递路线, 并求出全程是多少?



习题三解答

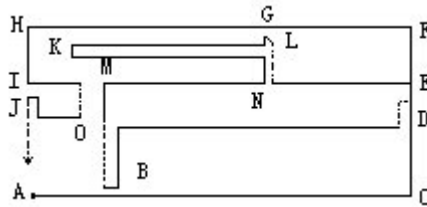
1. (1) 4笔; (2) 4笔; (3) 2笔; (4) 1笔; (5) 1笔; (6) 1笔。

2. 游人不能一次不重复地走遍所有路后返回出发点, 他必须至少重复三段路(即三段长为1的小路)才能使全程最短. 其最短路程为24, 如下左图.



3. 清洁车走的路径为: ABCNPBCDEFMNEFGHOLMH0IJKPLJKA. 即: 清洁车必须至少重复走4段1公里的街道, 如上右图. 最短路线全程为28公里。

4. 邮递员的投递路线如下图, 即: 路线为: ABCDEDOBOMNLKGLNEFGHIMOJIJA. 最短路线的全程为 $39+9=48$.



第四讲 最短路线问题

在日常工作、生活和娱乐中,经常会遇到有关行程路线的问题.在这一讲里,我们主要解决的问题是如何确定从某处到另一处最短路线的条数。

例1 下图4—1中的线段表示的是汽车所能经过的所有马路,这辆汽车从A走到B处共有多少条最短路线?

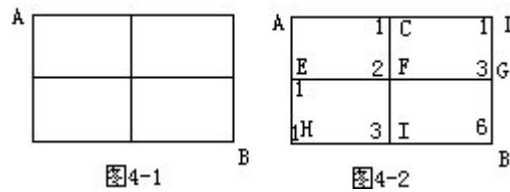


图4-1

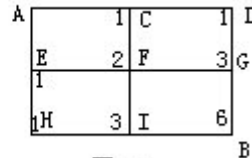


图4-2

分析 为了叙述方便,我们在各交叉点都标上字母.如图4—2.在这里,首先我们应该明确从A到B的最短路线到底有多长?从A点走到B点,不论怎样走,最短也要走长方形AHBD的一个长与一个宽,即 $AD+DB$.因此,在水平方向上,所有线段的长度和应等于AD;在竖直方向上,所有线段的长度和应等于DB.这样我们走的这条路线才是最短路线.为了保证这一点,我们就不应该走“回头路”,即在水平方向上不能向左走,在竖直方向上不能向上走.因此只能向右和向下走。

有些同学很快找出了从A到B的所有最短路线,即:

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow B$ $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow B$

$A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow B$ $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow B$

$A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow B$ $A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow B$

通过验证,我们确信这六条路线都是从A到B的最短路线.如果按照上述方法找,它的缺点是不能保证找出所有的最短路线,即不能保证“不漏”.当然如果图形更复杂些,做到“不重”也是很困难的。

现在观察这种题是否有规律可循。

1. 看C点:由A、由F和由D都可以到达C,而由F→C是由下向上走,由D→C是由右向左走,这两条路线不管以后怎样走都不可能是最短路线.因此,从A到C只有一条路线。

同样道理:从A到D、从A到E、从A到H也都只有一条路线。

我们把数字“1”分别标在C、D、E、H这四个点上,如图4—2。

2. 看F点:从上向下走是C→F,从左向右走是E→F,那么从A点出发到F,可以是A→C→F,也可以是A→E→F,共有两种走法.我们在图4—2中的F点标上数字“2”. $2=1+1$.第一个“1”是从A→C的一种走法;第二个“1”是从A→E的一种走法。

3. 看G点:从上向下走是D→G,从左向右走是F→G,那么从A→G

可以这样走: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G$, $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G$, $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$, 共有三种走法.

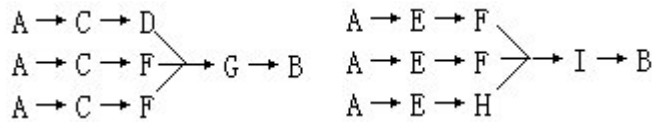
我们在G点标上数字“3”. $3=2+1$,“2”是从A→F的两种走法,“1”是从A→D的一种走法。

4. 看I点:从上向下走是F→I,从左向右走是H→I,那么从出发点

$A \rightarrow I$ 可以这样走: $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I$, $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I$, $A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I$, 共有三种走法,

在I点标上“3”. $3=2+1$.“2”是从A→F的两种走法;“1”是从A→H的一种走法。

5. 看B点:从上向下走是G→B,从左向右走是I→B,那么从出发点A→B可以这样走:



共有六种走法. $6=3+3$, 第一个“3”是从A→G共有三种走法, 第二个“3”是从A→I共有三种走法. 在B点标上“6”。

我们观察图4—2发现每一个小格右下角上标的数正好是这个格右上角与左下角的数的和, 这个和就是从出发点A到这点的所有最短路线的条数. 这样, 我们可以通过计算来确定从A→B的最短路线的条数, 而且能够保证“不重”也“不漏”。

解: 由上面的分析可以得到如下的规律: 每个格右上角与左下角所标的数字和即为这格右下角应标的数字. 我们称这种方法为对角线法, 也叫标号法。

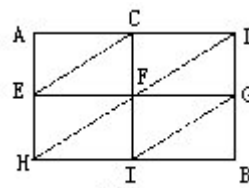


图4-3

根据这种“对角线法”, B点标6, 那么从A到B就有6条不同的最短路线(见图4—3)。

答: 从A到B共有6条不同的最短路线。

例2 图4—4是一个街道的平面图, 纵横各有5条路, 某人从A到B处(只能从北向南及从西向东), 共有多少种不同的走法?

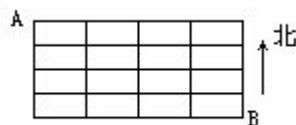


图4-4

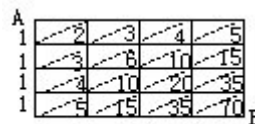


图4-5

分析因为B点在A点的东南方向, 题目要求我们只能从北向南及从西向东, 也就是要求我们走最短路线. 解: 如图4—5所示。

答: 从A到B共有70种不同的走法。

例3 如图4—6, 从甲地到乙地最近的道路有几条?

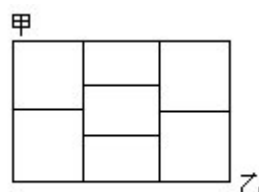


图4-6

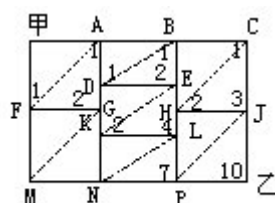


图4-7

分析 要求从甲地到乙地最近的道路有几条, 也就是求从甲地到乙地的最短路线有几条. 把各交叉点标上字母, 如图4—7. 这道题的图形与例1、例2的图形又有所区别, 因此, 在解题时要格外注意是由哪两点的数之和来确定另一点的。

- ①由甲→A有1种走法, 由甲→F有1种走法, 那么就可以确定从甲→G共有 $1+1=2$ (种) 走法。
- ②由甲→B有1种走法, 由甲→D有1种走法, 那么可以确定由甲→E共有 $1+1=2$ (种) 走法.
- ③由甲→C有1种走法, 由甲→H有2种走法, 那么可以确定由甲→J共有 $1+2=3$ (种) 走法。
- ④由甲→G有2种走法, 由甲→M有1种走法, 那么可以确定从甲→N共有 $2+1=3$ (种) 走法。
- ⑤从甲→K有2种走法, 从甲→E有2种走法, 那么从甲→L共有 $2+2=4$ (种) 走法。
- ⑥从甲→N有3种走法, 从甲→L有4种走法, 那么可以确定从甲→P共有 $3+4=7$ (种) 走法。
- ⑦从甲→J有3种走法, 从甲→P有7种走法, 那么从甲→乙共有 $3+7=10$ (种) 走法。

解: 在图4—7中各交叉点标上数, 乙处标上10, 则从甲到乙共有10条最近的道路。

例4 某城市的街道非常整齐, 如图4—8所示, 从西南角A处到东北角B处要求走最近的路, 并且不能通过十字路口C (因正在修路). 问共有多少种不同的走法?

分析 因为B点在A点的东北角, 所以只能向东和向北走. 为了叙述方便, 在各交叉点标上字母, 如图4—9.

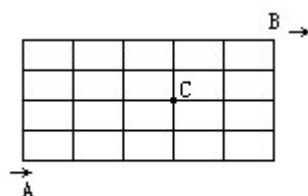


图4-8

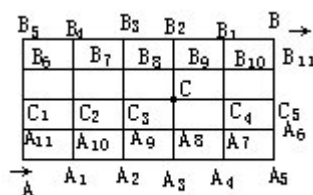


图4-9

- ① 从A→A₁有1种走法, A→A₁₁有1种走法, 那么可以确定从A→A₁₀共有 $1+1=2$ (种) 走法。
- ② 从A→A₂有1种走法, A→A₁₀有2种走法, 那么可以确定从A→A₉共有 $1+2=3$ (种) 走法。
- ③ 从A→A₃有1种走法, A→A₉有3种走法, 那么可以确定从A→A₈共有 $1+3=4$ (种) 走法。
- ④从A→A₄有1种走法, A→A₈有4种走法, 那么可以确定A→A₇, 共有 $1+4=5$ (种) 走法。
- ⑤ 从A→A₅有1种走法, A→A₇有5种走法, 那么可以确定A→A₆共有 $1+5=6$ (种) 走法。

⑥ 从 $A \rightarrow C_1$ 有1种走法, $A \rightarrow A_{10}$ 有2种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow C_2$ 共有 $1+2=3$ (种) 走法。

⑦ 从 $A \rightarrow C_2$ 有3种走法, $A \rightarrow A_9$ 有3种走法, 那么可以确定 $A \rightarrow C_3$ 共有 $3+3=6$ (种) 走法。

⑧ 从 $A \rightarrow C_4$ 可以是 $A \rightarrow C \rightarrow C_4$, 也可以是 $A \rightarrow A_7 \rightarrow C_4$, 因为C处正在修路, 所以 $A \rightarrow C \rightarrow C_4$ 行不通, 只能由 $A_7 \rightarrow C_4$, 由于 $A \rightarrow A_7$ 有5种走法, 所以 $A \rightarrow C_4$ 也有5种走法, 从 $A \rightarrow A_6$ 有6种走法, 所以从 $A \rightarrow C_5$ 共有 $5+6=11$ (种) 走法。

⑨ 从 $A \rightarrow B_6$ 有1种走法, $A \rightarrow C_2$ 有3种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B_7$ 共有 $1+3=4$ (种) 走法。

⑩ 从 $A \rightarrow B_7$ 有4种走法, $A \rightarrow C_3$ 有6种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B_8$ 共有 $4+6=10$ (种) 走法。

(11) 从 $A \rightarrow B_9$ 可以是 $A \rightarrow B_8 \rightarrow B_9$, 也可以是 $A \rightarrow C \rightarrow B_9$, 因为C处正在修路, 所以 $A \rightarrow C \rightarrow B_9$ 行不通, 只能由 $B_8 \rightarrow B_9$, 由于 $A \rightarrow B_8$ 有10种走法, 所以 $A \rightarrow B_9$ 也有10种走法. 从 $A \rightarrow C_4$ 有5种走法, 所以从 $A \rightarrow B_{10}$ 共有 $10+5=15$ (种) 走法。

(12) 从 $A \rightarrow C_5$ 有11种走法, $A \rightarrow B_{10}$ 有15种走法, 那么从 $A \rightarrow B_{11}$ 共有 $15+11=26$ (种) 走法。

(13) 从 $A \rightarrow B_5$ 有1种走法, $A \rightarrow B_7$ 有4种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B_4$ 共有 $1+4=5$ (种) 走法。

(14) 从 $A \rightarrow B_4$ 有5种走法, $A \rightarrow B_8$ 有10种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B_3$ 共有 $5+10=15$ (种) 走法。

(15) 从 $A \rightarrow B_3$ 有15种走法, $A \rightarrow B_9$ 有10种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B_2$ 共有 $15+10=25$ (种) 走法。

(16) 从 $A \rightarrow B_2$ 有25种走法, $A \rightarrow B_{10}$ 有15种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B_1$ 共有 $25+15=40$ (种) 走法。

(17) 从 $A \rightarrow B_1$ 有40种走法, $A \rightarrow B_{11}$ 有26种走法, 那么可以确定从 $A \rightarrow B$ 共有 $40+26=66$ (种) 走法。

解: 如图4-10所示。

答: 从A到B共有66种不同的走法。

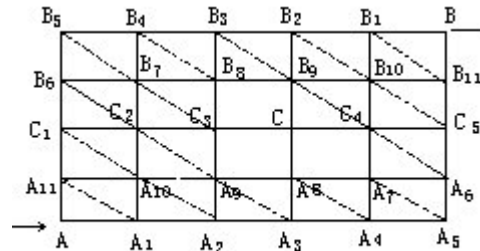
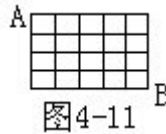


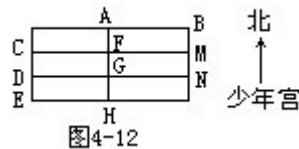
图4-10

习题四

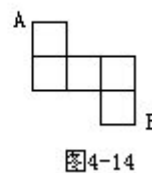
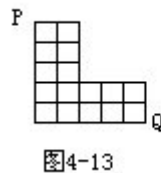
1. 如果沿图4-11中的线段，以最短的路程，从A点出发到B点，共有多少种不同的走法？



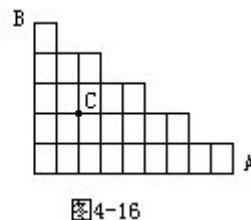
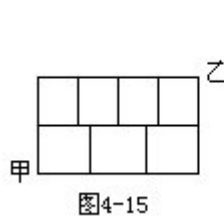
2. 从学校到少年宫有4条东西向的马路和3条南北向的马路相通. 如图4-12, 李楠从学校出发, 步行到少年宫 (只许向东和向南行进), 最多有多少种不同的行走路线？



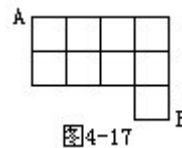
3. 如图 4-13, 从P到Q共有多少种不同的最短路线？
4. 如图4-14所示为某城市的街道图, 若从A走到B (只能由北向南、由西向东), 则共有多少种不同的走法？



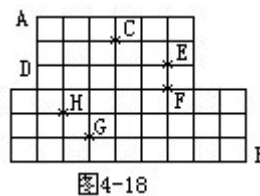
5. 如图4-15所示, 从甲地到乙地, 最近的道路有几条？
6. 图4-16为某城市的街道示意图, C处正在挖下水道, 不能通车, 从A到B处的最短路线共有多少条？



7. 如图4-17所示是一个街道的平面图, 在不走回头路、不走重复路的条件下, 可以有多少种不同的走法？

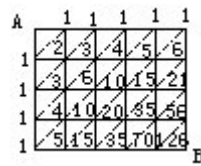


8. 图4-18是某城市的主要公路示意图, 今在C、D、E、F、G、H路口修建立交桥, 车辆不能通行, 那么从A到B的最近路线共有几条？



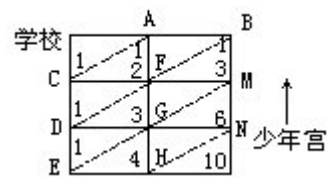
习题四解答

1. 解:



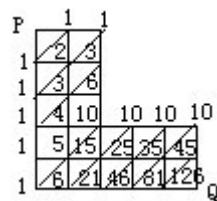
答: 从A到B共有126种走法。

2. 解:



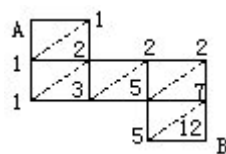
答: 从学校到少年宫最多有10种不同的行走路线。

3. 解:



答: 从P到Q共有126条不同的最短路线.

4. 解:



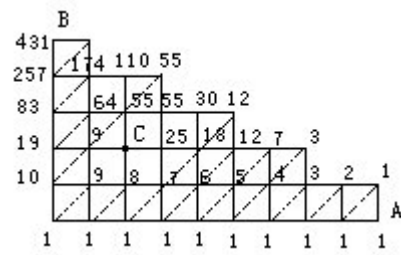
答: 从A到B共有12种走法。

5. 解:



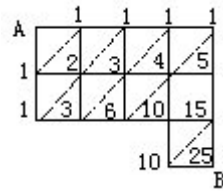
答: 从甲到乙最近的道路有11条。

6. 解:



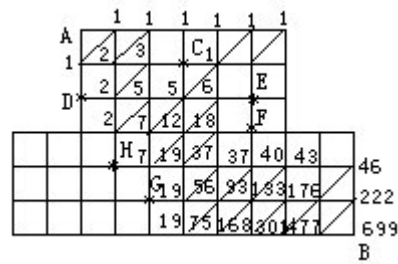
答：从A到B的最短路线有431条.

7. 解:



答：从A到B有25种不同的走法。

8. 解:



答：从A到B最短的路线有699条.

第五讲 归一问题

为什么把有的问题叫归一问题？我国珠算除法中有一种方法，称为归除法. 除数是几，就称几归；除数是8，就称为8归. 而归一的意思，就是用除法求出单一量，这大概就是归一说法的来历吧！

归一问题有两种基本类型. 一种是正归一，也称为直进归一. 如：一辆汽车3小时行150千米，照这样，7小时行驶多少千米？另一种是反归一，也称为返回归一. 如：修路队6小时修路180千米，照这样，修路240千米需几小时？

正、反归一问题的相同点是：一般情况下第一步先求出单一量；不同点在第二步. 正归一问题是求几个单一量是多少，反归一是求包含多少个单一量。

例1 一只小蜗牛6分钟爬行12分米，照这样速度1小时爬行多少米？

分析 为了求出蜗牛1小时爬多少米，必须先求出1分钟爬多少分米，即蜗牛的速度，然后以这个数目为依据按要求算出结果。

解：①小蜗牛每分钟爬行多少分米？ $12 \div 6 = 2$ （分米）

② 1小时爬几米？1小时=60分。

$2 \times 60 = 120$ （分米）=12（米）

答：小蜗牛1小时爬行12米。

还可以这样想：先求出题目中的两个同类量（如时间与时间）的倍数（即60分是6分的几倍），然后用1倍数（6分钟爬行12分米）乘以倍数，使问题得解。

解：1小时=60分钟

$12 \times (60 \div 6) = 12 \times 10 = 120$ （分米）=12（米）

或 $12 \div (6 \div 60) = 12 \div 0.1 = 120$ （分米）=12（米）

答：小蜗牛1小时爬行12米。

例2 一个粮食加工厂要磨面粉20000千克. 3小时磨了6000千克. 照这样计算，磨完剩下的面粉还要几小时？

方法1：

分析 通过3小时磨6000千克，可以求出1小时磨粉数量. 问题求磨完剩下的要几小时，所以剩下的量除以1小时磨的数量，得到问题所求。

解： $(20000 - 6000) \div (6000 \div 3) = 7$ （小时）

答：磨完剩下的面粉还要7小时。

方法2：用比例关系解。

解：设磨剩下的面粉还要x小时。

$$\frac{20000 - 6000}{x} = \frac{6000}{3}$$

$$6000x = 3 \times 14000$$

$$x = 7 \text{（小时）}$$

答：磨完剩下的面粉还要7小时。

例3 学校买来一些足球和篮球. 已知买3个足球和5个篮球共花了281元；买3个足球和7个篮球共花了355元. 现在

要买5个足球、4个篮球共花多少元？

分析 要求5个足球和4个篮球共花多少元，关键在于先求出每个足球和每个篮球各多少元. 根据已知条件分析出第一次和第二次买的足球个数相等，而篮球相差 $7-5=2$ （个），总价差 $355-281=74$ （元）. 74元正好是两个篮球的价钱，从而可以求出一个篮球的价钱，一个足球的价钱也可以随之求出，使问题得解。

解：①一个篮球的价钱： $(355-281) \div (7-5)$

$=37$ 元

②一个足球的价钱： $(281-37 \times 5) \div 3=32$ （元）

③共花多少元？ $32 \times 5 + 37 \times 4=308$ （元）

答：买5个足球，4个篮球共花308元。

例4 一个长方体的水槽可容水480吨. 水槽装有一个进水管和一个排水管. 单开进水管8小时可以把空池注满；单开排水管6小时可把满池水排空. 两管齐开需多少小时把满池水排空？

分析 要求两管齐开需要多少小时把满池水排光，关键在于先求出进水速度和排水速度. 当两管齐开时要把满池水排空，排水速度必须大于进水速度，即单位时间内排出的水等于进水与排水速度差. 解决了这个问题，又知道总水量，就可以求出排空满池水所需时间。

解：①进水速度： $480 \div 8=60$ （吨/小时）

②排水速度： $480 \div 6=80$ （吨/小时）

③排空全池水所需的时间： $480 \div (80-60)=24$ （小时）

列综合算式：

$480 \div (480 \div 6 - 480 \div 8) = 24$ （小时）

答：两管齐开需24小时把满池水排空。

例5 7辆“黄河牌”卡车6趟运走336吨沙土. 现有沙土560吨，要求5趟运完，求需要增加同样的卡车多少辆？

方法1：

分析 要想求增加同样卡车多少辆，先要求出一共需要卡车多少辆；要求5趟运完560吨沙土，每趟需多少辆卡车，应该知道一辆卡车一次能运多少吨沙土。

解：①一辆卡车一次能运多少吨沙土？

$336 \div 6 \div 7=56 \div 7=8$ （吨）

②560吨沙土，5趟运完，每趟必须运走几吨？

$560 \div 5=112$ （吨）

③需要增加同样的卡车多少辆？

$112 \div 8 - 7=7$ （辆）

列综合算式：

$560 \div 5 \div (336 \div 6 \div 7) - 7=7$ （辆）

答：需增加同样的卡车7辆。

方法2:

在求一辆卡车一次能运沙土的吨数时, 可以列出两种不同情况的算式: ① $336 \div 6 \div 7$, ② $336 \div 7 \div 6$. 算式①先除以6, 先求出7辆卡车1次运的吨数, 再除以7求出每辆卡车的载重量; 算式②, 先除以7, 求出一辆卡车6次运的吨数, 再除以6, 求出每辆卡车的载重量。

在求560吨沙土5次运完需要多少辆卡车时, 有以下几种不同的计算方法:

$$\textcircled{1} \quad 560 \div 5 \div 8 = 112 \div 8 = 14 \text{ (辆)}$$

↳ 所需的卡车一趟运走的吨数

$$\textcircled{2} \quad 560 \div 8 \div 5 = 70 \div 5 = 14 \text{ (辆)}$$

↳ (运走 560 吨沙土需要的车次)

$$\textcircled{3} \quad 560 \div (8 \times 5) = 560 \div 40 = 14 \text{ (辆)}$$

↳ 一辆卡车 5 次运走 40 吨

求出一共用车14辆后, 再求增加的辆数就容易了。

例6 某车间要加工一批零件, 原计划由18人, 每天工作8小时, 7.5天完成任务. 由于缩短工期, 要求4天完成任务, 可是又要增加6人. 求每天加班工作几小时?

分析 我们把1个工人工作1小时, 作为1个工时. 根据已知条件, 加工这批零件, 原计划需要多少“工时”呢? 求出“工时”数, 使我们知道了工作总量. 有了工作总量, 以它为标准, 不管人数增加或减少, 工期延长或缩短, 仍然按照原来的工作效率, 只要能够达到加工零件所需“工时”总数, 再求出要加班的工时数, 问题就解决了。

解: ①原计划加工这批零件需要的“工时”:

$$8 \times 18 \times 7.5 = 1080 \text{ (工时)}$$

②增加6人后每天工作几小时?

$$1080 \div (18+6) \div 4 = 11.25 \text{ (小时)}$$

③每天加班工作几小时? $11.25 - 8 = 3.25 \text{ (小时)}$

答: 每天要加班工作3.25小时。

例7 甲、乙两个打字员4小时共打字3600个. 现在二人同时工作, 在相同时间内, 甲打字2450个, 乙打字2050个. 求甲、乙二人每小时各打字多少个?

分析 已知条件告诉我们: “在相同时间内甲打字2450个, 乙打字2050个.” 既然知道了“时间相同”, 问题就容易解决了. 题目里还告诉我们: “甲、乙二人4小时共打字3600个.” 这样可以先求出“甲乙二人每小时打字个数之和”, 就可求出所用时间了。

解: ①甲、乙二人每小时共打字多少个?

$$3600 \div 4 = 900 \text{ (个)}$$

②“相同时间”是几小时?

$$(2450 + 2050) \div 900 = 5 \text{ (小时)}$$

③甲打字员每小时打字的个数:

$$2450 \div 5 = 490 \text{ (个)}$$

④乙打字员每小时打字的个数:

$$2050 \div 5 = 410 \text{ (个)}$$

答：甲打字员每小时打字490个，乙打字员每小时打字410个。

还可以这样想：这道题的已知条件可以分两层. 第一层，甲乙二人4小时共打字3600个；第二层，在相同时间内甲打字2450个，乙打字2050个. 由这两个条件可以求出在相同的时间内，甲乙二人共打字 $2450+2050=4500$ （个）；打字 3600个用4小时，打字4500个用几小时呢？先求出4500是3600的几倍，也一定是4小时的几倍，即“相同时间”。

解：① “相同时间” 是几小时？

$$4 \times [(2450 + 2050) \div 3600] = 5 \text{ (小时)}$$

②甲每小时打字多少个？

$$2450 \div 5 = 490 \text{ (个)}$$

③乙每小时打字多少个？

$$2050 \div 5 = 410 \text{ (个)}$$

答：甲每小时打字490个，乙每小时打字410个.

习题五

1. 花果山上桃树多, 6只小猴分180棵. 现有小猴72只, 如数分后还余90棵, 请算出桃树有几棵?
2. 5箱蜜蜂一年可以酿75千克蜂蜜, 照这样计算, 酿300千克蜂蜜要增加几箱蜜蜂?
3. 4辆汽车行驶300千米需要汽油240公升. 现有5辆汽车同时运货到相距800千米的地方, 汽油只有1000公升, 问是否够用?
4. 5台拖拉机24天耕地12000公亩. 要18天耕完54000公亩土地, 需要增加同样拖拉机多少台?

习题五解答

$$1. 180 \div 6 \times 72 + 90 = 2250 \text{ (棵)}$$

$$\text{或: } 180 \times (72 \div 6) + 90 = 2250 \text{ (棵)}$$

答: 桃树共有2250棵。

$$2. 300 \div (75 \div 5) - 5 = 15 \text{ (箱)}$$

$$\text{或 } 5 \times [(300 - 75) \div 75] = 5 \times 3 = 15 \text{ (箱)}$$

答: 要增加 15箱蜜蜂。

3. 提示: 要想得知1000公升汽油是否够用, 先算一算行800千米需要的汽油, 然后进行比较. 如果大于1000公升, 说明不够用; 小于或等于 1000公升, 说明够用。

$$240 \div 4 \div 300 \times 5 \times 800 = 800 \text{ (公升)}$$

800公升 < 1000公升, 说明够用.

答: 1000公升汽油够用。

4. 提示: 先求出1台拖拉机1天耕地公亩数, 然后求出18天耕54000公亩需要拖拉机台数, 再求增加台数。

$$54000 \div 18 \div (12000 \div 24 \div 5) - 5 = 25 \text{ (台)}$$

这一步还可以用以下方法计算

$$\text{① } 12000 \div 5 \div 24$$

$$\text{② } 12000 \div (5 \times 24)$$

└→ 24 天需要的总台数

$$\text{③ } 12000 \div (24 \times 5)$$

└→ 5 台需要的总天数

答: 需要增加 25台拖拉机.

第六讲 平均数问题

求平均数问题是小学学习阶段经常接触的一类典型应用题, 如“求一个班级学生的平均年龄、平均身高、平均分数……”。

平均数问题包括算术平均数、加权平均数、连续数和求平均数、调和平均数和基准数求平均数。

解答这类应用题时, 主要是弄清楚总数、份数、一份数三量之间的关系, 根据总数除以它相对应的份数, 求出一份数, 即平均数。

一、算术平均数

例1 用4个同样的杯子装水, 水面高度分别是4厘米、5厘米、7厘米和8厘米, 这4个杯子水面平均高度是多少厘米?

分析 求4个杯子水面的平均高度, 就相当于把4个杯子里的水合在一起, 再平均倒入4个杯子里, 看每个杯子里水面的高度。

解: $(4+5+7+8) \div 4=6$ (厘米)

答: 这4个杯子水面平均高度是6厘米。

例2 蔡琛在期末考试中, 政治、语文、数学、英语、生物五科的平均分是 89分. 政治、数学两科的平均分是 91.5分. 语文、英语两科的平均分是84分. 政治、英语两科的平均分是86分, 而且英语比语文多10分. 问蔡琛这次考试的各科成绩应是多少分?

分析 解题关键是根据语文、英语两科平均分是84分求出两科的总分, 又知道两科的分数差是10分, 用和差问题的解法求出语文、英语各得多少分后, 就可以求出其他各科成绩。

解: ①英语: $(84 \times 2 + 10) \div 2 = 89$ (分)

②语文: $89 - 10 = 79$ (分)

③政治: $86 \times 2 - 89 = 83$ (分)

④数学: $91.5 \times 2 - 83 = 100$ (分)

⑤生物: $89 \times 5 - (89 + 79 + 83 + 100) = 94$ (分)

答: 蔡琛这次考试英语、语文、政治、数学、生物的成绩分别是89分、79分、83分、100分、94分。

二、加权平均数

例3 果品店把2千克酥糖, 3千克水果糖, 5千克奶糖混合成什锦糖. 已知酥糖每千克4.40元, 水果糖每千克4.20元, 奶糖每千克7.20元. 问: 什锦糖每千克多少元?

分析 要求混合后的什锦糖每千克的价钱, 必须知道混合后的总钱数和与总钱数相对应的总千克数。

解: ①什锦糖的总价:

$4.40 \times 2 + 4.20 \times 3 + 7.20 \times 5 = 57.4$ (元)

②什锦糖的总千克数: $2 + 3 + 5 = 10$ (千克)

③什锦糖的单价: $57.4 \div 10 = 5.74$ (元)

答: 混合后的什锦糖每千克5.74元。

我们把上述这种平均数问题叫做“加权平均数”. 例3中的5.74元叫做4.40元、4.20元、7.20元的加权平均数. 2千克、3千克、5千克这三个数很重要, 对什锦糖的单价产生不同影响, 有权衡轻重的作用, 所以这样的数叫做“权数”。

例4 甲乙两块棉田, 平均亩产籽棉185斤. 甲棉田有5亩, 平均亩产籽棉203斤; 乙棉田平均亩产籽棉170斤, 乙棉田有多少亩?

分析 此题是已知两个数的加权平均数、两个数和其中一个数的权数, 求另一个数的权数的问题. 甲棉田平均亩产籽棉203斤比甲乙棉田平均亩产多18斤, 5亩共多出90斤. 乙棉田平均亩产比甲乙棉田平均亩产少15斤, 乙少的部分用甲多的部分补足, 也就是看90斤里面包含几个15斤, 从而求出的是乙棉田的亩数, 即“权数”。

解: ①甲棉田5亩比甲乙平均亩产多多少斤?

$$(203-185) \times 5 = 90 \text{ (斤)}$$

②乙棉田有几亩?

$$90 \div (185-170) = 6 \text{ (亩)}$$

答: 乙棉田有6亩。

三、连续数平均问题

我们学过的连续数有“连续自然数”、“连续奇数”、“连续偶数”. 已知几个连续数的和求出这几个数, 也叫平均问题。

例5 已知八个连续奇数的和是144, 求这八个连续奇数。

分析 已知偶数个奇数的和是144. 连续数的个数为偶数时, 它的特点是首项与末项之和等于第二项与倒数第二项之和, 等于第三项与倒数第三项之和……即每两个数分为一组, 八个数分成4组, 每一组两个数的和是 $144 \div 4 = 36$. 这样可以确定出中间的两个数, 再依次求出其他各数。

解: ①每组数之和: $144 \div 4 = 36$

②中间两个数中较大的一个: $(36+2) \div 2 = 19$

③中间两个数中较小的一个: $19-2=17$

∴这八个连续奇数为11、13、15、17、19、21、23和25。

答: 这八个连续奇数分别为: 11、13、15、17、19、21、23和25。

四、调和平均数

例6 一个运动员进行爬山训练. 从A地出发, 上山路长11千米, 每小时行4.4千米. 爬到山顶后, 沿原路下山, 下山每小时行5.5千米. 求这位运动员上山、下山的平均速度。

分析 这道题目是行程问题中关于求上、下山平均速度的问题. 解题时应区分平均速度和速度的平均数这两个不同的概念. 速度的平均数= (上山速度+下山速度) $\div 2$, 而平均速度=上、下山的总路程 \div 上、下山所用的时间和。

解: ①上山时间: $11 \div 4.4 = 2.5$ (小时)

②下山时间: $11 \div 5.5 = 2$ (小时)

$$\text{③上、下山平均速度: } 11 \times 2 \div (2.5 + 2) = 4\frac{8}{9} \text{ (千米)}$$

答: 上、下山的平均速度是每小时 $4\frac{8}{9}$ 千米。

我们把 $4\frac{8}{9}$ 千米叫做4.4千米和5.5千米的调和平均数。

五、基准数平均数

例7 中关村三小有15名同学参加跳绳比赛，他们每分钟跳绳的个数分别为93、94、85、92、86、88、94、91、88、89、92、86、93、90、89，求每个人平均每分钟跳绳多少个？

分析 从他们每人跳绳的个数可以看出，每人跳绳的个数很接近，所以可以选择其中一个数90做为基准数，再找出每个加数与这个基准数的差. 大于基准数的差作为加数，如 $93=90+3$ ，3作为加数；小于基准数的差作为减数，如 $87=90-3$ ，3作为减数. 把这些差累计起来，用和数的项数乘以基准数，加上累计差，再除以和数的个数就可以算出结果。

解：①跳绳总个数。

$$93+94+85+92+86+88+94+91+88+89+92+86+93+90+89$$

$$=90 \times 15 + (3+4+2+4+1+2+3) - (5+4+2+2+1+4+1)$$

$$=1350+19-19$$

$$=1350 \text{ (个)}$$

②每人平均每分钟跳多少个？

$$1350 \div 15 = 90 \text{ (个)}$$

答：每人平均每分钟跳90个.

习题六

1. 某次数学考试, 甲乙的成绩和是184分, 乙丙的成绩和是187分, 丙丁的成绩和是188分, 甲比丁多1分, 问甲、乙、丙、丁各多少分?
2. 求1962、1973、1981、1994、2005的平均数。
3. 缝纫机厂第一季度平均每月生产缝纫机750台, 第二季度生产的是第一季度生产的2倍多66台, 下半年平均月生产1200台, 求这个厂一年的平均月产量。
4. 甲种糖每千克8.8元, 乙种糖每千克7.2元, 用甲种糖5千克和多少乙种糖混合, 才能使每千克糖的价钱为8.2元?
5. 7个连续偶数的和是1988, 求这7个连续偶数。
6. 6个学生的年龄正好是连续自然数, 他们的年龄和与小明爸爸的年龄相同, 7个人年龄一共是126岁, 求这6个学生各几岁?
7. 食堂买来5只羊, 每次取出两只合称一次重量, 得到十种不同的重量(千克):
47、50、51、52、53、54、55、57、58、59. 问这五只羊各重多少千克?

习题六解答

$$1. \because \text{甲} + \text{乙} = 184 \quad (1)$$

$$\text{乙} + \text{丙} = 187 \quad (2)$$

$$\text{丙} + \text{丁} = 188 \quad (3)$$

$$(2) - (1) \quad \text{丙} - \text{甲} = 3 \quad (4)$$

$$(3) - (4) \quad \text{丁} + \text{甲} = 185$$

$$\therefore \text{甲} = (185 + 1) \div 2 = 93 \quad (\text{分})$$

$$\text{丁} = 93 - 1 = 92 \quad (\text{分})$$

$$\text{乙} = 184 - 93 = 91 \quad (\text{分})$$

$$\text{丙} = 187 - 91 = 96 \quad (\text{分})$$

答: 甲、乙、丙、丁的成绩分别为93分、91分、96分、和92分。

$$2. 1962 + 1973 + 1981 + 1994 + 2005$$

$$= 1981 \times 5 + (13 + 24) - (8 + 19)$$

$$= 9915。$$

$$9915 \div 5 = 1983。$$

3. ①上半年总产量:

$$750 \times 3 + 750 \times 3 \times 2 + 66 = 6816 \quad (\text{台})$$

$$\text{②下半年总产量: } 1200 \times 6 = 7200 \quad (\text{台})$$

$$\text{③平均月产量: } (6816 + 7200) \div 12 = 1168 \quad (\text{台})$$

答：平均月产量是1168台。

$$4. (8.8-8.2) \times 5 \div (8.2-7.2) = 3 \text{ (千克)}$$

答：与乙种糖3千克混合。

5. 分析 已知奇数个偶数的和，可以用和除以个数求出中间数，再求出其他各偶数。

$$\text{中间数：} 1988 \div 7 = 284$$

其他六个数分别为278、280、282、284、286、288、290。

答：这7个偶数分别为：278、280、282、284、286、288、290。

6. 分析 6个孩子年龄和与小明爸爸年龄相同，说明小明爸爸年龄是126岁的一半，是63岁。其他6个学生的年龄和也是63岁。 $63 \div 3 = 21$ （岁）， $21 = 10 + 11$ 为中间两个数，所以其他四人年龄依次为8、9、12、13岁。

答：这六个学生的年龄分别为：8、9、10、11、12、13岁。

7. 解：设5只羊的重量从轻到重依次为 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 。 $A_1 + A_2 = 47$ ， $A_1 + A_3 = 50 \cdots \cdots A_3 + A_5 = 58$ ， $A_4 + A_5 = 59$ 。10次称重5只羊各称过4次，所以它们的重量和应是：

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$= (47 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 57 + 58 + 59) \div 4 = 134$$

$$A_3 = 134 - (A_1 + A_2) - (A_4 + A_5) = 28$$

$$A_1 = 50 - 28 = 22 \quad A_2 = 47 - 22 = 25$$

$$A_5 = 58 - 28 = 30 \quad A_4 = 59 - 30 = 29$$

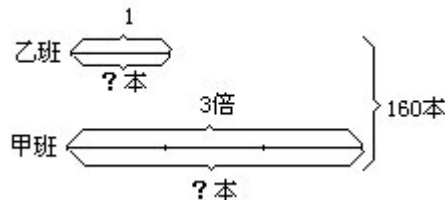
答：这5只羊的重量分别为22千克、25千克、28千克、29千克、30千克。

第七讲 和倍问题

和倍问题是已知大小两个数的和与它们的倍数关系, 求大小两个数的应用题. 为了帮助我们理解题意, 弄清两种量彼此间的关系, 常采用画线段图的方法来表示两种量间的这种关系, 以便于找到解题的途径。

例1 甲班和乙班共有图书160本. 甲班的图书本数是乙班的3倍, 甲班和乙班各有图书多少本?

分析 设乙班的图书本数为1份, 则甲班图书为乙班的3倍, 那么甲班和乙班图书本数的和相当于乙班图书本数的4倍. 还可以理解为4份的数量是160本, 求出1份的数量也就求出了乙班的图书本数, 然后再求甲班的图书本数. 用下图表示它们的关系:



解: 乙班: $160 \div (3+1) = 40$ (本)

甲班: $40 \times 3 = 120$ (本)

或 $160 - 40 = 120$ (本)

答: 甲班有图书120本, 乙班有图书40本。

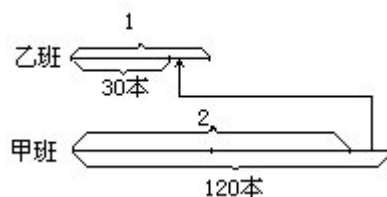
这道应用题解答完了, 怎样验算呢?

可把求出的甲班本数和乙班本数相加, 看和是不是160本; 再把甲班的本数除以乙班本数, 看是不是等于3倍. 如果与条件相符, 表明这题作对了. 注意验算决不是把原式再算一遍。

验算: $120 + 40 = 160$ (本)

$120 \div 40 = 3$ (倍)。

例2 甲班有图书120本, 乙班有图书30本, 甲班给乙班多少本, 甲班的图书是乙班图书的2倍?



分析 解这道题的关键是找出哪个量是变量, 哪个量是不变量. 从已知条件中得出, 不管甲班给乙班多少本书, 还是乙班从甲班得到多少本书, 甲、乙两班图书总和是不变的量. 最后要求甲班图书是乙班图书的2倍, 那么甲、乙两班图书总和相当于乙班现有图书的3倍. 依据解和倍问题的方法, 先求出乙班现有图书多少本, 再与原有图书本数相比较, 可以求出甲班给乙班多少本书 (见上图)。

解: ①甲、乙两班共有图书的本数是:

$30 + 120 = 150$ (本)

②甲班给乙班若干本图书后, 甲、乙两班共有的倍数是:

$2 + 1 = 3$ (倍)

③乙班现有的图书本数是: $150 \div 3 = 50$ (本)

④甲班给乙班图书本数是： $50-30=20$ （本）

综合算式：

$$(30+120) \div (2+1) = 50 \text{（本）}$$

$$50-30=20 \text{（本）}$$

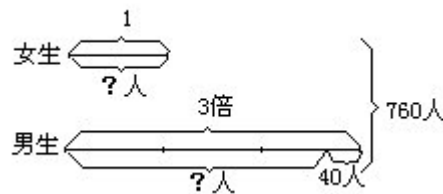
答：甲班给乙班20本图书后，甲班图书是乙班图书的2倍。

验算： $(120-20) \div (30+20) = 2$ （倍）

$$(120-20) + (30+20) = 150 \text{（本）。}$$

例3 光明小学有学生760人，其中男生比女生的3倍少40人，男、女生各有多少人？

分析 把女生人数看作一份，由于男生人数比女生人数的3倍还少40人，如果用男、女生人数总和760人再加上40人，就等于女生人数的4倍（见下图）。



解：①女生人数： $(760+40) \div (3+1) = 200$ （人）

②男生人数： $200 \times 3 - 40 = 560$ （人）

或 $760 - 200 = 560$ （人）

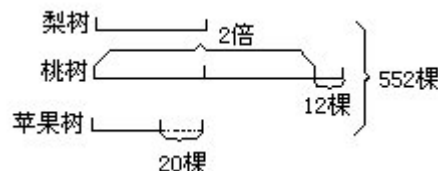
答：男生有560人，女生有200人。

验算： $560 + 200 = 760$ （人）

$$(560+40) \div 200 = 3 \text{（倍）。}$$

例4 果园里有桃树、梨树、苹果树共552棵。桃树比梨树的2倍多12棵，苹果树比梨树少20棵，求桃树、梨树和苹果树各有多少棵？

分析 下图可以看出桃树比梨树的2倍多12棵，苹果树比梨树少20棵，都是同梨树相比较、以梨树的棵数为标准、作为1份数容易解答。又知三种树的总数是552棵。如果给苹果树增加20棵，那么就与梨树同样多了；再从桃树里减少12棵，那么就相当于梨树的2倍了，而总棵数则变为 $552+20-12=560$ （棵），相当于梨树棵数的4倍。



解：①梨树的棵数：

$$(552+20-12) \div (1+1+2)$$

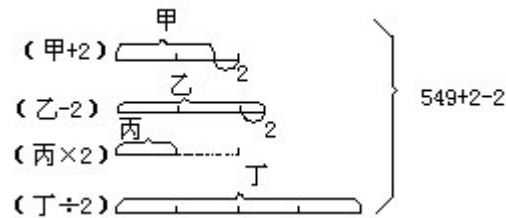
$$= 560 \div 4 = 140 \text{（棵）}$$

②桃树的棵数： $140 \times 2 + 12 = 292$ （棵）

③苹果树的棵数: $140-20=120$ (棵)

答: 桃树、梨树、苹果树分别是292棵、140棵和120棵。

例5 549是甲、乙、丙、丁4个数的和. 如果甲数加上2, 乙数减少2, 丙数乘以2, 丁数除以2以后, 则4个数相等. 求4个数各是多少?



分析 上图可以看出, 丙数最小. 由于丙数乘以2和丁数除以2相等, 也就是丙数的2倍和丁数的一半相等, 即丁数相当于丙数的4倍. 乙减2之后是丙的2倍, 甲加上2之后也是丙的2倍. 根据这些倍数关系, 可以先求出丙数, 再分别求出其他各数。

解: ①丙数是: $(549+2-2) \div (2+2+1+4)$

$=549 \div 9$

$=61$

②甲数是: $61 \times 2 - 2 = 120$

③乙数是: $61 \times 2 + 2 = 124$

④丁数是: $61 \times 4 = 244$

验算: $120+124+61+244=549$

$120+2=122$ $124-2=122$

$61 \times 2=122$ $244 \div 2=122$

答: 甲、乙、丙、丁分别是120、124、61、244.

习题七

1. 小明和小强共有图书120本, 小强的图书本数是小明的2倍, 他们两人各有图书多少本?
2. 果园里一共种340棵桃树和杏树, 其中桃树的棵数比杏树的3倍多20棵, 两种树各种了多少棵?
3. 一个长方形, 周长是30厘米, 长是宽的2倍, 求这个长方形的面积。
4. 甲水池有水2600立方米, 乙水池有水1200立方米, 如果甲水池里的水以每分钟23立方米的速度流入乙水池, 那么多少分种后, 乙水池中的水是甲水池的4倍?
5. 甲桶里有油470千克, 乙桶里有油190千克, 甲桶的油倒入乙桶多少千克, 才能使甲桶油是乙桶油的2倍?
6. 有3条绳子, 共长95米, 第一条比第二条长7米, 第二条比第三条长8米, 问3条绳子各长多少米?

习题七解答

1. ①小明的本数: $120 \div (2+1) = 40$ (本). ②小强的本数: $40 \times 2 = 80$ (本)。
2. ①杏树的棵数: $(340-20) \div (3+1) = 80$ (棵). ②桃树的棵数: $80 \times 3 + 20 = 260$ (棵)。
3. ①长方形的宽: $(30 \div 2) \div (2+1) = 5$ (厘米). ②长方形的长: $5 \times 2 = 10$ (厘米)。
③长方形的面积: $10 \times 5 = 50$ (平方厘米)。
4. ①甲、乙两水池共有水:
 $2600 + 1200 = 3800$ (立方米)
②甲水池剩下的水:
 $3800 \div (4+1) = 760$ (立方米)
③甲水池流入乙水池中的水:
 $2600 - 760 = 1840$ (立方米)
④经过的时间 (分钟): $1840 \div 23 = 80$ (分钟)。
5. ①甲、乙两桶油总重量:
 $470 + 190 = 660$ (千克):
②当甲桶油是乙桶油2倍时, 乙桶油是:
 $660 \div (2+1) = 220$ (千克):
③由甲桶倒入乙桶中的油: $220 - 190 = 30$ (千克)。
6. ①变化后的绳子总长 $95 - 7 + 8 = 96$ (米). ②第二条绳长: $96 \div (1+1+1) = 32$ (米)。
③第一条绳长: $32 + 7 = 39$ (米)。
④第三条绳长: $32 - 8 = 24$ (米)。

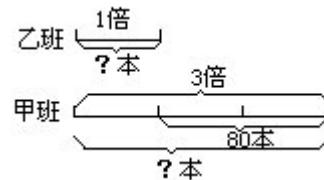
第八讲 差倍问题

前面讲了应用线段图分析“和倍”应用题,这种方法使分析的问题具体、形象,使我们能比较顺利地解答此类应用题.下面我们再研究“和倍”问题有相似之处的“差倍”应用题。

“差倍问题”就是已知两个数的差和它们的倍数关系,求这两个数。

差倍问题的解题思路与和倍问题一样,先要在题目中找到1倍量,再画图确定解题方法.被除数的数量和除数的倍数关系要相对应,相除后得到的结果是一倍量,然后求出另一个数,最后再写出验算和答题。

例1 甲班的图书本数比乙班多80本,甲班的图书本数是乙班的3倍,甲班和乙班各有图书多少本?



分析 上图把乙班的图书本数看作1倍,甲班的图书本数是乙班的3倍,那么甲班的图书本数比乙班多2倍.又知“甲班的图书比乙班多80本”,即2倍与80本相对应,可以理解为2倍是80本,这样可以算出1倍是多少本.最后就可以求出甲、乙班各有图书多少本。

解: ①乙班的本数: $80 \div (3-1) = 40$ (本)

②甲班的本数: $40 \times 3 = 120$ (本)

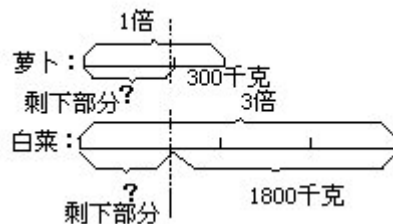
或 $40 + 80 = 120$ (本)。

验算: $120 - 40 = 80$ (本)

$120 \div 40 = 3$ (倍)

答: 甲班有图书120本,乙班有图书40本。

例2 菜站运来的白菜是萝卜的3倍,卖出白菜1800千克,萝卜300千克,剩下的两种蔬菜的重量相等,菜站运来的白菜和萝卜各是多少千克?



分析 这样想:根据“菜站运来的白菜是萝卜的3倍”应把运来的萝卜的重量看作1倍;“卖出白菜1800千克,萝卜300千克后,剩下两种蔬菜的重量正好相等”,说明运来的白菜比萝卜多 $1800 - 300 = 1500$ (千克).从上图清楚地看到这个重量相当于萝卜重量的 $3 - 1 = 2$ (倍),这样就可以先求出运来的萝卜是多少千克,再求运来的白菜是多少千克。

解: ①运来萝卜: $(1800 - 300) \div (3 - 1) = 750$ (千克)

②运来白菜: $750 \times 3 = 2250$ (千克)

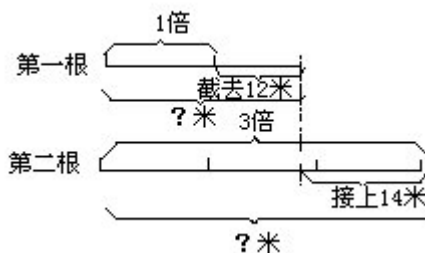
验算:

$2250 - 1800 = 450$ (千克) (白菜剩下部分)

$750 - 300 = 450$ (千克) (萝卜剩下部分)

答：菜站运来白菜2250千克，萝卜750千克。

例3 有两根同样长的绳子，第一根截去12米，第二根接上14米，这时第二根长度是第一根长的3倍，两根绳子原来各长多少米？



分析 上图，两根绳子原来的长度一样长，但是从第一根截去12米，第二根绳子又接上14米后，第二根的长度是第一根的3倍. 应该把变化后的第一根长度看作1倍，而 $12+14=26$ （米），正好相当于第一根绳子剩下的长度的2倍. 所以，当从第一根截去12米后剩下的长度可以求出来了，那么第一根、第二根原有长度也就可以求出来了。

解：①第一根截去12米剩下的长度：

$$(12+14) \div (3-1) = 13 \text{ (米)}$$

②两根绳子原来的长度： $13+12=25$ （米）

答：两根绳子原来各长25米。

自己进行验算，看答案是否正确. 另外还可以想想，有无其他方法求两根绳子原来各有多长。

小结：解答这类题的关键是要找出两个数量的差与两个数量的倍数的差的对应关系. 用除法求出1倍数，也就是较小的数，再求几倍数。

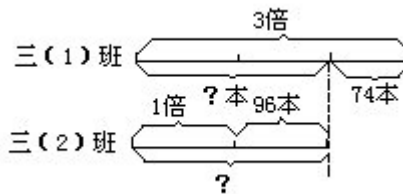
解题规律：

差 \div 倍数的差=1倍数（较小数）

1倍数 \times 几倍=几倍的数（较大的数）

或：较小的数+差=较大的数。

例4 三（1）班与三（2）班原有图书数一样多. 后来，三（1）班又买来新书74本，三（2）班从本班原书中拿出96本送给一年级小同学，这时，三（1）班图书是三（2）班的3倍，求两班原有图书各多少本？



分析 两个班原有图书一样多. 后来三（1）班又买新书74本，即增加了74本；三（2）班从本班原有图书中取出96本送给一年级同学，则图书减少了96本. 结果是一个班增加，另一个班减少，这样两个班图书就相差 $96+74=170$ （本），也就是三（1）班比三（2）班多了170本图书. 又知三（1）班现有图书是三（2）班图书的3倍，可见这170本图书就相当于三（2）班所剩图书的 $3-1=2$ 倍，三（2）班所剩图书本数就可以求出来了，随之原有图书本数也就求出来了（见上图）。

解：①后来三（1）班比三（2）班图书多多少本？

$$74+96=170 \text{ (本)}$$

②三（2）班剩下的图书是多少本？

$$170 \div (3-1) = 85 \text{ (本)}$$

③三(2)班原有图书多少本?

$$85 + 96 = 181 \text{ (本)} \quad (\text{两个班原有图书一样多})$$

综合算式:

$$(74 + 96) \div (3-1) + 96$$

$$= 170 \div 2 + 96$$

$$= 85 + 96$$

$$= 181 \text{ (本)}$$

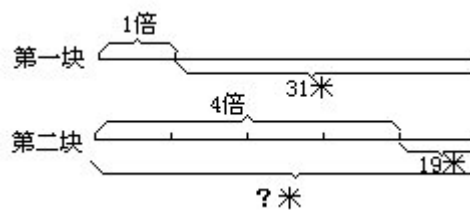
$$\text{验算: } 181 + 74 = 255 \text{ (本)}$$

$$181 - 96 = 85 \text{ (本)}$$

$$255 \div 85 = 3 \text{ (倍)}$$

答: 两班原来各有图书181本。

例5 两块同样长的花布, 第一块卖出31米, 第二块卖出19米后, 第二块是第一块的4倍, 求每块花布原有多少米?



分析 已知两块花布同样长, 由于第一块卖出的多, 第二块卖出的少, 因此第一块剩下的少, 第二块剩下的多. 所剩的布第二块比第一块多 $31 - 19 = 12$ (米). 又知第二块所剩下的布是第一块的4倍, 那么第二块比第一块多出的12米正好相当于所剩布的 $(4-1)$ 倍, 这样, 第一块所剩布的长度即可求出 (见上图)。

解: ①第二块布比第一块布多剩多少米?

$$31 - 19 = 12 \text{ (米)}$$

②第一块布剩下多少米?

$$12 \div (4-1) = 4 \text{ (米)}$$

③第一块布原有多少米?

$$4 + 31 = 35 \text{ (米)} \quad (\text{两块布原有长度相等})$$

综合列式:

$$(31 - 19) \div (4-1) + 31$$

$$= 12 \div 3 + 31$$

$$= 4 + 31$$

$$= 35 \text{ (米)}$$

验算： $35-31=4$ （米）

$35-19=16$ （米）

$16\div 4=4$ （倍）

答：每块布原有35米长。

习题八

1. 一只大象的体重比一头牛重4500千克, 又知大象的重量是一头牛的10倍, 一只大象和一头牛的重量各是多少千克?
2. 果园里的桃树比杏树多90棵, 桃树的棵数是杏树的3倍, 桃树和杏树各有多少棵?
3. 有两块布, 第一块长74米, 第二块长50米, 两块布各剪去同样长的一块布后, 剩下的第一块米数是第二块的3倍, 问每块布各剪去多少米?
4. 甲、乙两校教师的人数相等, 由于工作需要, 从甲校调30人到乙校去, 这时乙校教师人数正好是甲校教师人数的3倍, 求甲、乙两校原有教师各多少人?
5. 两筐重量相同的苹果, 从甲筐取出7千克, 乙筐加入19千克, 这时乙筐是甲筐苹果的3倍, 问两筐原有苹果多少千克?
6. 甲、乙两个数, 如果甲数加上320就等于乙数了. 如果乙数加上460就等于甲数的3倍, 两个数各是多少?
7. 有两块同样长的布, 第一块卖出25米, 第二块卖出14米, 剩下的布第二块是第一块的2倍, 求每块布原有多少米?

习题八解答

1. 一头牛重量是: $4500 \div (10-1) = 500$ (千克) 一只大象重量: $500 \times 10 = 5000$ (千克)。
2. 杏树棵数: $90 \div (3-1) = 45$ (棵) 桃树棵数: $45 \times 3 = 135$ (棵)。
3. 把第二块布剩下的米数看作1倍数:

$$(74-50) \div (3-1) = 12 \text{ (米)}$$

剪去的米数: $50-12=38$ (米)。

4. 把甲校调走30人后的甲校人数看作1倍:

$$(30 \times 2) \div (3-1) = 30 \text{ (人)}$$

甲、乙两校原有教师各 $30+30=60$ (人)。

5. 甲筐重量: $(19+7) \div (3-1) = 13$ (千克)

乙筐重量: $13 \times 3 = 39$

原有重量: $13+7=20$ (千克)。

6. 甲数: $(320+460) \div 2 = 390$

乙数: $390+320=710$ 。

7. $(25-14) \div (2-1) + 25$

$$= 11 \div 1 + 25$$

$$= 11 + 25$$

$$= 36 \text{ (米)} .$$

第九讲 和差问题

和差问题是已知大小两个数的和与两个数的差, 求大小两个数各是多少的应用题。

为了解答这种应用题, 首先要弄清两个数相差多少的不同叙述方式. 有些题目明确给了两个数的差, 而有些应用题把两个数的差“暗藏”起来, 我们管暗藏的差叫“暗差”。

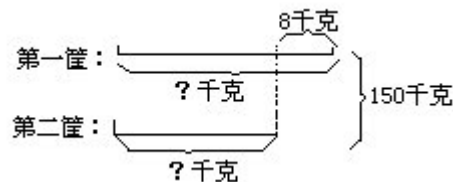
例: “把姐姐的铅笔拿出3支后, 姐姐、弟弟的铅笔支数就同样多.” 这说明姐姐的铅笔比弟弟多3支, 也说明姐姐和弟弟铅笔相差3支。

再例: “把姐姐的铅笔给弟弟3支后, 两人铅笔支数就同样多.” 如果认为姐姐的铅笔比弟弟多3支(差是3), 那就错了. 实际上姐姐比弟弟多2个3支. 姐姐给弟弟3支后, 自己留下3支, 再加上他们原有的铅笔数, 他们的铅笔支数才可能一样多. 这里 $3 \times 2 = 6$ 支, 就是暗差。

“把姐姐的铅笔给弟弟3支后还比弟弟多1支”, 这就说明姐姐的铅笔支数比弟弟多 $3 \times 2 + 1 = 7$ (支)。

例1 两筐水果共重150千克, 第一筐比第二筐多8千克, 两筐水果各多少千克?

分析 这样想: 假设第二筐和第一筐重量相等时, 两筐共重 $150 + 8 = 158$ (千克); 假设第一筐重量和第二筐相等时, 两筐共重 $150 - 8 = 142$ (千克)。



解法1: ①第二筐重多少千克?

$$(150 - 8) \div 2 = 71 \text{ (千克)}$$

②第一筐重多少千克?

$$71 + 8 = 79 \text{ (千克)}$$

或 $150 - 71 = 79$ (千克)

解法2: ①第一筐重多少千克?

$$(150 + 8) \div 2 = 79 \text{ (千克)}$$

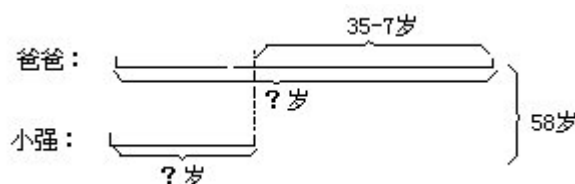
②第二筐重多少千克?

$$79 - 8 = 71 \text{ (千克)}$$

$$\text{或 } 150 - 79 = 71 \text{ (千克)}$$

答: 第一筐重79千克, 第二筐重71千克。

例2 今年小强7岁, 爸爸35岁, 当两人年龄和是58岁时, 两人年龄各多少岁?



分析 题中没有给出小强和爸爸年龄之差, 但是已知两人今年的年龄, 那么今年两人的年龄差是 $35 - 7 = 28$ (岁)。

不论过多少年, 两人的年龄差是保持不变的. 所以, 当两人年龄和为58岁时他们年龄差仍是28岁. 根据和差问题的解题思路就能解此题。

解: ①爸爸的年龄:

$$[58 + (35 - 7)] \div 2$$

$$=[58 + 28] \div 2$$

$$=86 \div 2$$

$$=43 \text{ (岁)}$$

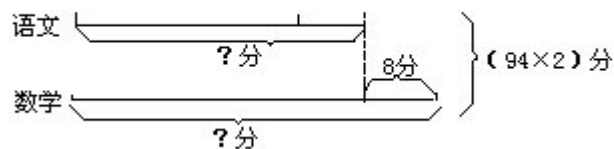
②小强的年龄:

$$58 - 43 = 15 \text{ (岁)}$$

答: 当父子两人的年龄和是58岁时, 小强15岁, 他爸爸43岁。

例3 小明期末考试时语文和数学的平均分数是94分, 数学比语文多8分, 问语文和数学各得了几分?

分析 解和差问题的关键就是求得和与差, 这道题中数学与语文成绩之差是8分, 但是数学和语文成绩之和没有直接告诉我们. 可是, 条件中给出了两科的平均成绩是94分, 这就可以求得这两科的总成绩。



解: ①语文和数学成绩之和是多少分?

$$94 \times 2 = 188 \text{ (分)}$$

②数学得多少分?

$$(188 + 8) \div 2 = 196 \div 2 = 98 \text{ (分)}$$

③ 语文得多少分?

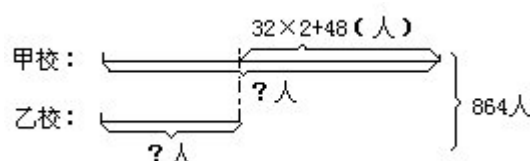
$$(188 - 8) \div 2 = 180 \div 2 = 90 \text{ (分)}$$

$$\text{或 } 98 - 8 = 90 \text{ (分)}$$

答: 小明期末考试语文得90分, 数学得98分。

例4 甲乙两校共有学生864人, 为了照顾学生就近入学, 从甲校调入乙校32名同学, 这样甲校学生还比乙校多48人, 问甲、乙两校原来各有学生多少人?

分析 这样想: 甲、乙两校学生人数的和是864人, 根据由甲校调入乙校32人, 这样甲校比乙校还多48人可以知道, 甲校比乙校多 $32 \times 2 + 48 = 112$ (人). 112是两校人数差。



解：①乙校原有的学生：

$$(864-32\times 2-48)\div 2=376\text{ (人)}$$

②甲校原有学生：

$$864-376=488\text{ (人)}$$

答：甲校原有学生488人，乙校原有学生376人。

小结：从以上4个例题可以看出题目给的条件虽然不同，但是解题思路和解题方法是一致的. 和差问题的一般解题规律是：

$$(\text{和}+\text{差})\div 2=\text{较大数} \quad \text{较大数}-\text{差}=\text{较小数}$$

$$\text{或} (\text{和}-\text{差})\div 2=\text{较小数} \quad \text{较小数}+\text{差}=\text{较大数}$$

也可以求出一个数后，用和减去这个数得到另一个数.

下面我们用和差问题的思路来解答一个数学问题。

例5 在每两个数字之间填上适当的加或减符号使算式成立。

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9=5$$

分析 这样想：从1至9这几个数字相加是不会得到5的，只能从一部分数字相加再减去一部分字后差是5，也就是说1到9的和是45，而两部分的差是5，先要求出这两部分数字，利用和差问题的方法便可以求出。

$$(45-5)\div 2=20, 20+5=25$$

可求出其中几个数的和是25，而另外几个数的和是20. 在组成和是25的几个数前面添上“+”号，而在组成和是20的几个数前面添上“-”号，此题就算出来了。

例如：5+6+9=20可得到。

$$1+2+3+4-5-6+7+8-9=5$$

又如：5+7+8=20可得到。

$$1+2+3+4-5+6-7-8+9=5$$

又如：3+4+6+7=20可得到。

$$1+2-3-4+5-6-7+8+9=5$$

同学们，这道题你还有其他解法吗？试试看！

习题九

1. 果园里有桃树和梨树共150棵，桃树比梨树多20棵，两种果树各有多少棵？
2. 甲、乙两桶油共重30千克，如果把甲桶中6千克油倒入乙桶，那么两桶油重量相等，问甲、乙两桶原有多少油？
3. 用锡和铝制成500千克的合金，铝的重量比锡多100千克，锡和铝各是多少千克？
4. 某工厂去年与今年的平均产值为96万元，今年比去年多10万元，今年与去年的产值各是多少万元？
5. 甲、乙两个学校共有学生1245人，如果从甲校调20人去乙校后，甲校比乙校还多5人，两校原有学生各多少人？
6. 三个物体平均重量是31千克，甲物体比乙、丙两个物体重量之和轻1千克，乙物体比丙物体重量的2倍还重2千克，三个物体各重多少千克？
7. 甲、乙两个工程队共有1980人，甲队为了支援乙队，抽出285人加入乙队，这时乙队人数还比甲队少24人，求甲、乙两队原有工人多少人？
8. 四年级有3个班，如果把甲班的1名学生调整到乙班，两班人数相等；如果把乙班1名学生调到丙班，丙班比乙班多2人，问甲班和丙班哪班人数多？多几人？

习题九解答

1. 桃树的棵树： $(150 + 20) \div 2 = 85$ （棵）梨树的棵树： $150 - 85 = 65$ （棵）

答：有桃树85棵，梨树65棵。

2. 甲桶油重： $(30 + 6 \times 2) \div 2 = 21$ （千克）乙桶油重： $30 - 21 = 9$ （千克）

答：甲桶油重21千克，乙桶油重9千克。

3. 锡的重量： $(500 - 100) \div 2 = 200$ （千克）铝的重量： $500 - 200 = 300$ （千克）

答：锡重量是300千克，铝的重量是200千克。

4. 今年的产值： $(96 \times 2 + 10) \div 2 = 101$ （万元）去年的产值： $101 - 10 = 91$ （万元）

答：今年的产值是101万元，去年的产值是91万元。

5. 乙校原有人数：

$$[1245 - (20 \times 2 + 5)] \div 2 = 600 \text{（人）}$$

$$\text{甲校原有人数：} 1245 - 600 = 645 \text{（人）}$$

答：甲校原有学生645人，乙校原有学生600人。

6. 三个物体的总重量： $31 \times 3 = 93$ （千克）

$$\text{甲物体的重量：} (93 - 1) \div 2 = 46 \text{（千克）}$$

$$\text{丙物体的重量：} (93 - 46 - 2) \div (2 + 1) = 15 \text{（千克）}$$

$$\text{乙物体的重量：} 93 - 46 - 15 = 32 \text{（千克）}$$

答：甲、乙、丙三个物体的重量分别为46千克、32千克、15千克。

7. 甲队原有人数：

$$(285 \times 2 + 24 + 1980) \div 2 = 1287 \text{ (人)}$$

$$\text{乙队原有人数: } 1287 - 594 = 693 \text{ (人)}$$

答: 甲队原有1287人, 乙队原有693人。

8. 解 (略), 答: 甲班比丙班人数多, 多2名学生.

第十讲 年龄问题

年龄问题是小学数学中常见的一类问题.例如:已知两个人或若干个人的年龄,求他们年龄之间的某种数量关系等等.年龄问题又往往是和倍、差倍、和差等问题的综合.它有一定的难度,因此解题时需抓住其特点。

年龄问题的主要特点是:大小年龄差是个不变的量,而年龄的倍数却年年不同.我们可以抓住差不变这个特点,再根据大小年龄之间的倍数关系与年龄之和等条件,解答这类应用题。

解答年龄问题的一般方法是:

几年后年龄=大小年龄差÷倍数差-小年龄,

几年前年龄=小年龄-大小年龄差÷倍数差。

例1 爸爸妈妈现在的年龄和是72岁;五年后,爸爸比妈妈大6岁.今年爸爸妈妈二人各多少岁?

分析 五年后,爸比妈大6岁,即爸妈的年龄差是6岁.它是一个不变量.所以爸爸、妈妈现在的年龄差仍然是6岁.这样原问题就归结成“已知爸爸、妈妈的年龄和是72岁,他们的年龄差是6岁,求二人各是几岁”的和差问题。

解:①爸爸年龄: $(72+6) \div 2=39$ (岁)

②妈妈的年龄: $39-6=33$ (岁)

答:爸爸的年龄是39岁,妈妈的年龄是33岁。

例2 在一个家庭里,现在所有成员的年龄加在一起是73岁.家庭成员中有父亲、母亲、一个女儿和一个儿子.父亲比母亲大3岁,女儿比儿子大2岁.四年前家庭里所有人的年龄总和是58岁.现在家里的每个成员各是多少岁?

分析 根据四年前家庭里所有人的年龄总和是58岁,可以求出到现在每个人长4岁以后的实际年龄和是 $58+4 \times 4=74$ (岁)。

但现在实际的年龄总和只有73岁,可见家庭成员中最小的一个儿子今年只有3岁.女儿比儿子大2岁,女儿是 $3+2=5$ (岁).现在父母的年龄和是 $73-3-5=65$ (岁).又知父母年龄差是3岁,可以求出父母现在的年龄。

解:①从四年前到现在全家人的年龄和应为:

$58+4 \times 4=74$ (岁)

②儿子现在几岁? $4-(74-73)=3$ (岁)

③女儿现在几岁? $3+2=5$ (岁)

④父亲现在年龄: $(73-3-5+3) \div 2=34$ (岁)

⑤母亲现在年龄: $34-3=31$ (岁)

答:父亲现在34岁,母亲31岁,女儿5岁,儿子3岁。

例3 父亲现年50岁,女儿现年14岁.问:几年前父亲年龄是女儿的5倍?

分析 父女年龄差是 $50-14=36$ (岁).不论是几年前还是几年后,这个差是不变的.当父亲的年龄恰好是女儿年龄的5倍时,父亲仍比女儿大36岁.这36岁是父亲比女儿多的 $5-1=4$ (倍)所对应的年龄。

解: $(50-14) \div (5-1)=9$ (岁)

当时女儿9岁, $14-9=5$ (年),也就是5年前。

答:5年前,父亲年龄是女儿的5倍。

例4 6年前,母亲的年龄是儿子的5倍.6年后母子年龄和是78岁.问:母亲今年多少岁?

分析 6年后母子年龄和是78岁, 可以求出母子今年年龄和是 $78-6\times 2=66$ (岁). 6年前母子年龄和是 $66-6\times 2=54$ (岁). 又根据6年前母子年龄和与母亲年龄是儿子的5倍, 可以求出6年前母亲年龄, 再求出母亲今年的年龄。

解: ①母子今年年龄和: $78-6\times 2=66$ (岁)

②母子6年前年龄和: $66-6\times 2=54$ (岁)

③母亲6年前的年龄: $54\div (5+1)\times 5=45$ (岁)

④母亲今年的年龄: $45+6=51$ (岁)

答: 母亲今年是51岁。

例5 10年前吴昊的年龄是他儿子年龄的7倍. 15年后, 吴昊的年龄是他儿子的2倍. 现在父子俩人的年龄各是多少岁?

分析 根据15年后吴昊的年龄是他儿子年龄的2倍, 得出父子年龄差等于儿子当时的年龄. 因此年龄差等于10年前儿子的年龄加上25岁。

10年前吴昊的年龄是他儿子年龄的7倍, 父子年龄差相当于儿子当时年龄的 $7-1=6$ 倍。

由于年龄差不变, 所以儿子10年前的年龄的 $6-1=5$ 倍正好是25岁, 可以求出儿子当时的年龄, 从而使问题得解。

解: ①儿子10年前的年龄: $(10+15)\div (7-2)=5$ (岁)

②儿子现在年龄: $5+10=15$ (岁)

③吴昊现在年龄: $5\times 7+10=45$ (岁)

答: 吴昊现在45岁, 儿子15岁。

例6 甲对乙说: “我在你这么大岁数的时候, 你的岁数是我今年岁数的一半.” 乙对甲说: “我到你这么大岁数的时候, 你的岁数是我今年岁数的2倍减7.” 问: 甲、乙二人现在各多少岁?

分析 从已知条件中可以看出甲比乙年龄大, 甲乙年龄差这是一个不变的量。

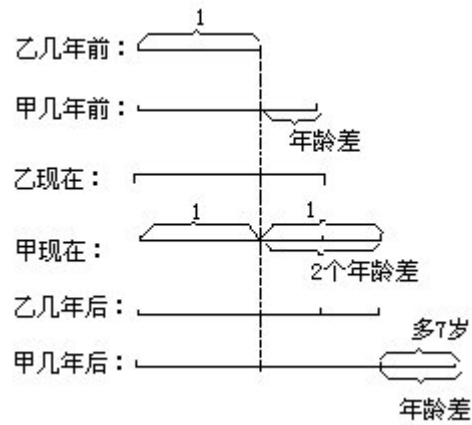
甲对乙说“我在你这么大岁数的时候”, 意思是说几年以前. 这几年就是甲乙的年龄差. 因此, 甲整句话可理解为: 乙今年的岁数, 减去年龄差, 正好是甲今年岁数的一半。

$$\text{即 } \text{乙}_{\text{今}} - \text{一年龄差} = \frac{1}{2} \text{甲}_{\text{今}} \quad (1)$$

乙对甲说“我到你这么大岁数的时候”, 意思是说几年后. 因此, 乙整句话可理解为: 甲今年的岁数, 加上年龄差, 正好是乙今年岁数的2倍减去7。

$$\text{即 } \text{甲}_{\text{今}} + \text{年龄差} = 2 \times \text{乙}_{\text{今}} - 7 \quad (2)$$

把甲乙的对话用下图表示为:



由 (1) 得 $甲_{今} = 2 \times 乙_{今} - 2 \times \text{年龄差}$ (3)

由 (2) 得 $甲_{今} = 2 \times 乙_{今} - 7 - \text{年龄差}$ (4)

由 (3) (4) 年龄差 = 7 (岁)

...

从上图不难看出, 甲现在的年龄是乙几年前年龄的2倍, 1倍相当于2个年龄差, 2倍相当于4个年龄差. 乙现在的年龄相当3个年龄差。

乙几年后的年龄和甲现在的年龄相等, 所以乙几年后相当4个年龄差. 甲几年后的年龄比乙几年后的年龄多一个年龄差, 正好是7岁, 从而得出年龄差是7岁。

解: ①乙现在年龄: $7 \times 3 = 21$ (岁)

②甲现在年龄: $7 \times 4 = 28$ (岁)

答: 乙现在21岁, 甲现在28岁.

习题十

1. 兄弟俩今年的年龄和是30岁, 当哥哥像弟弟现在这样大时, 弟弟的年龄恰好是哥哥年龄的一半, 哥哥今年几岁?
2. 赵、田、钱、李、吴五位老师, 赵老师比田老师大4岁, 钱老师比赵老师大3岁, 李老师比赵老师小3岁, 吴老师比钱老师小2岁. 这五位老师的年龄加在一起是122岁. 问: 五位老师各多少岁?
3. 哥哥6年前的岁数等于弟弟8年后的岁数. 哥哥5年后与弟弟3年前的年龄和是38岁. 求兄弟二人今年各几岁?
4. 母女的年龄和是64岁, 女儿年龄的3倍比母亲大8岁, 求母女二人的年龄各是多少岁?
5. 哥哥今年比小丽大12岁, 8年前哥哥的年龄是小丽的4倍, 今年二人各几岁?
6. 爷爷今年72岁, 孙子今年12岁, 几年后爷爷的年龄是孙子的5倍? 几年前爷爷的年龄是孙子的13倍?

习题十解答

1. 提示: 根据条件“当哥哥像弟弟现在这样大时, 弟弟的年龄恰好是哥哥年龄的一半”, 说明兄弟二人的年龄和30岁正好相当5个年龄差. 其中哥哥今年年龄相当3个年龄差. 所以 $30 \div 5 \times 3 = 18$ (岁) 就是今年哥哥的年龄。

答: 哥哥今年18岁。

2. 提示: 解题时先确定以赵老师年龄为标准量.

①赵老师年龄的五倍: $122 + 4 - 3 + 3 - 1 = 125$ (岁)

②赵老师年龄: $125 \div 5 = 25$ (岁)

③田老师年龄: $25 - 4 = 21$ (岁)

④钱老师年龄: $25 + 3 = 28$ (岁)

⑤李老师年龄: $25 - 3 = 22$ (岁)

⑥吴老师年龄: $25 + 1 = 26$ (岁)

答: 赵、田、钱、李、吴这五位老师的年龄分别是: 25岁、21岁、28岁、22岁、26岁。

3. 解: ①今年哥哥比弟弟大几岁? $6 + 8 = 14$ (岁)

②哥、弟今年年龄和: $38 - 5 + 3 = 36$ (岁)

③哥哥今年年龄: $(36 + 14) \div 2 = 25$ (岁)

④弟弟今年年龄: $25 - 14 = 11$ (岁)

答: 哥哥今年25岁, 弟弟今年11岁。

4. ①女儿的年龄: $(64 + 8) \div (3 + 1) = 18$ (岁)

②母亲的年龄: $3 \times 18 - 8 = 46$ (岁)

答: 母亲今年46岁, 女儿今年18岁。

5. ①8年前小丽的年龄: $12 \div (4 - 1) = 4$ (岁)

②今年小丽的年龄: $4 + 8 = 12$ (岁)

③哥哥今年的年龄: $12 + 12 = 24$ (岁)

答：哥哥今年24岁，小丽今年12岁。

6. ①爷爷是孙子年龄5倍时，孙子的年龄：

$$(72-12) \div (5-1) = 15 \text{ (岁)}$$

②几年后： $15-12=3$ (年)

③爷爷年龄是孙子的13倍时，孙子的年龄：

$$(72-12) \div (13-1) = 5 \text{ (岁)}$$

④几年前： $12- 5= 7$ (年)

答：3年后，爷爷是孙子年龄的5倍；7年前，爷爷年龄是孙子的13倍.

第十一讲 鸡兔同笼问题

例1 （古典题）鸡兔同笼，头共46，足共128，鸡兔各几只？

分析 如果 46只都是兔，一共应有 $4 \times 46 = 184$ 只脚，这和已知的128只脚相比多了 $184 - 128 = 56$ 只脚. 如果用一只鸡来置换一只兔，就要减少 $4 - 2 = 2$ （只）脚. 那么，46只兔里应该换进几只鸡才能使56只脚的差数就没有了呢？显然， $56 \div 2 = 28$ ，只要用28只鸡去置换28只兔就行了. 所以，鸡的只数就是28，兔的只数是 $46 - 28 = 18$ 。

解：①鸡有多少只？

$$(4 \times 46 - 128) \div (4 - 2)$$

$$= (184 - 128) \div 2$$

$$= 56 \div 2$$

$$= 28 \text{（只）}$$

②兔有多少只？

$$46 - 28 = 18 \text{（只）}$$

答：鸡有28只，兔有18只。

我们来总结一下这道题的解题思路：先假设它们全是兔. 于是根据鸡兔的总只数就可以算出在假设下共有几只脚，把这样得到的脚数与题中给出的脚数相比较，看相差多少. 每差2只脚就说明有一只鸡；将所差的脚数除以2，就可以算出共有多少只鸡. 我们称这种解题方法为假设法. 概括起来，解鸡兔同笼问题的基本关系式是：

$$\text{鸡数} = (\text{每只兔脚数} \times \text{兔总数} - \text{实际脚数}) \div (\text{每只兔子脚数} - \text{每只鸡的脚数})$$

$$\text{兔数} = \text{鸡兔总数} - \text{鸡数}$$

当然，也可以先假设全是鸡。

例2 鸡与兔共有100只，鸡的脚比兔的脚多80只，问鸡与兔各多少只？

分析 这个例题与前面例题是有区别的，没有给出它们脚数的总和，而是给出了它们脚数的差. 这又如何解答呢？

假设100只全是鸡，那么脚的总数是 $2 \times 100 = 200$ （只）. 这时兔的脚数为0，鸡脚比兔脚多200只，而实际上鸡脚比兔脚多80只. 因此，鸡脚与兔脚的差数比已知多了 $(200 - 80) = 120$ （只），这是因为把其中的兔换成了鸡. 每把一只兔换成鸡，鸡的脚数将增加2只，兔的脚数减少4只. 那么，鸡脚与兔脚的差数增加 $(2 + 4) = 6$ （只），所以换成鸡的兔子有 $120 \div 6 = 20$ （只）. 有鸡 $(100 - 20) = 80$ （只）。

$$\text{解：} (2 \times 100 - 80) \div (2 + 4) = 20 \text{（只）。}$$

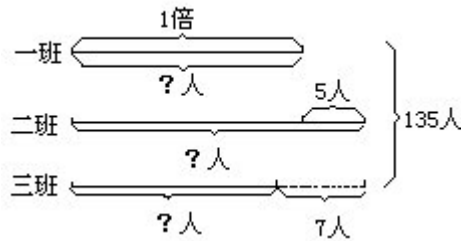
$$100 - 20 = 80 \text{（只）。}$$

答：鸡与兔分别有80只和20只。

例3 红英小学三年级有3个班共135人，二班比一班多5人，三班比二班少7人，三个班各有多少人？

分析1 我们设想，如果条件中三个班人数同样多，那么，要求每班有多少人就很容易了. 由此得到启示，是否可以通过假设三个班人数同样多来分析求解。

结合下图可以想，假设二班、三班人数和一班人数相同，以一班为标准，则二班人数要比实际人数少5人. 三班人数要比实际人数多 $7 - 5 = 2$ （人）. 那么，请你算一算，假设二班、三班人数和一班人数同样多，三个班总人数应该是多少？



解法1:

$$\text{一班: } [135 - 5 + (7 - 5)] \div 3 = 132 \div 3$$

$$= 44 \text{ (人)}$$

$$\text{二班: } 44 + 5 = 49 \text{ (人)}$$

$$\text{三班: } 49 - 7 = 42 \text{ (人)}$$

答: 三年级一班、二班、三班分别有44人、49人和42人。

分析2 假设一、三班人数和二班人数同样多, 那么, 一班人数比实际要多5人, 而三班要比实际人数多7人. 这时的总人数又该是多少?

$$\text{解法2: } (135 + 5 + 7) \div 3$$

$$= 147 \div 3$$

$$= 49 \text{ (人)}$$

$$49 - 5 = 44 \text{ (人)}, 49 - 7 = 42 \text{ (人)}$$

答: 三年级一班、二班、三班分别有44人、49人和42人。

想一想: 根据解法1、解法2的思路, 还可以怎样假设? 怎样求解?

例4 刘老师带了41名同学去北海公园划船, 共租了10条船. 每条大船坐6人, 每条小船坐4人, 问大船、小船各租几条?

分析 我们分步来考虑:

①假设租的10条船都是大船, 那么船上应该坐 $6 \times 10 = 60$ (人)。

②假设后的总人数比实际人数多了 $60 - (41 + 1) = 18$ (人), 多的原因是把小船坐的4人都假设成坐6人。

③一条小船当成大船多出2人, 多出的18人是把 $18 \div 2 = 9$ (条) 小船当成大船。

$$\text{解: } [6 \times 10 - (41 + 1)] \div (6 - 4)$$

$$= 18 \div 2 = 9 \text{ (条)}$$

$$10 - 9 = 1 \text{ (条)}$$

答: 有9条小船, 1条大船。

例5 有蜘蛛、蜻蜓、蝉三种动物共18只, 共有腿118条, 翅膀20对 (蜘蛛8条腿; 蜻蜓6条腿, 两对翅膀; 蝉6条腿, 一对翅膀), 求蜻蜓有多少只?

分析 这是在鸡兔同笼基础上发展变化的问题. 观察数字特点, 蜻蜓、蝉都是6条腿, 只有蜘蛛8条腿. 因此, 可先从腿数入手, 求出蜘蛛的只数. 我们假设三种动物都是6条腿, 则总腿数为 $6 \times 18 = 108$ (条), 所差 $118 - 108 = 10$

（条），必然是由于少算了蜘蛛的腿数而造成的. 所以，应有 $(118-108) \div (8-6) = 5$ （只）蜘蛛. 这样剩下的 $18-5=13$ （只）便是蜻蜓和蝉的只数. 再从翅膀数入手，假设13只都是蝉，则总翅膀数 $1 \times 13 = 13$ （对），比实际数少 $20-13=7$ （对），这是由于蜻蜓有两对翅膀，而我们只按一对翅膀计算所差，这样蜻蜓只数可求 $7 \div (2-1) = 7$ （只）.

解：①假设蜘蛛也是6条腿，三种动物共有多少条腿？

$$6 \times 18 = 108 \text{（条）}$$

②有蜘蛛多少只？

$$(118-108) \div (8-6) = 5 \text{（只）}$$

③蜻蜓、蝉共有多少只？

$$18-5=13 \text{（只）}$$

④假设蜻蜓也是一对翅膀，共有多少对翅膀？ $1 \times 13 = 13$ （对）

⑤蜻蜓多少只？

$$(20-13) \div (2-1) = 7 \text{（只）}$$

答：蜻蜓有7只.

习题十一

1. 小华用二元五角钱买了面值二角和一角的邮票共17张, 问两种邮票各买多少张?
2. 有鸡兔共20只, 脚44只, 鸡兔各几只?
3. 松鼠妈妈采松子, 晴天每天可采20个, 雨天每天可采12个, 它一连几天采了112个松子, 平均每天采14个. 问这几天当中有几天有雨?
4. 蜘蛛有8条腿, 蝴蝶有6条腿和2对翅膀, 蝉有6条腿和一对翅膀, 现有这三种动物共21只, 共140条腿和 23对翅膀, 问蜘蛛、蝴蝶、蝉各有几只?
5. 体育老师买了运动服上衣和裤子共21件, 共用了439元, 其中上衣每件24元、裤子每件19元, 问老师买上衣和裤子各多少件?
6. 鸡、兔共笼, 鸡比兔多26只, 足数共274只, 问鸡、兔各几只?

习题十一解答

1. 解: 二元五角= 250分; 1角=10分; 2角=20分.

①假设都是10分邮票: $10 \times 17 = 170$ (分)

②比实际少了多少钱? $250 - 170 = 80$ (分)

③每张邮票相差钱数: $20 - 10 = 10$ (分)

④有二角邮票多少张? $80 \div 10 = 8$ (张)

⑤有一角邮票多少张? $17 - 8 = 9$ (张)

答: 二角的邮票有8张, 一角的邮票有9张。

2. 解: 假设全是鸡, 则可求得到兔子只数:

$$(44 - 2 \times 20) \div (4 - 2) = 2 \text{ (只)}$$

鸡的只数: $20 - 2 = 18$ (只)

答: 鸡有18只, 兔有2只。

3. 解: ①松鼠妈妈一共采了几天松子?

$$112 \div 14 = 8 \text{ (天)}$$

②假设8天全是晴天, 一共应采松子

$$20 \times 8 = 160 \text{ (个)}$$

③比实际采的松子多多少?

$$160 - 112 = 48 \text{ (个)}$$

④晴天和雨天每天采的松子相差个数:

$$20 - 12 = 8 \text{ (个)}$$

⑤用晴天换雨天的天数: $48 \div 8 = 6$ (天)

答: 这几天中有6天有雨。

4. 解：蜘蛛数： $(140 - 6 \times 21) \div (8 - 6)$

$= 14 \div 2 = 7$ （只）

蝴蝶和蝉共有只数： $21 - 7 = 14$ （只）

蝉的只数： $(2 \times 14 - 23) \div (2 - 1) = 5$ （只）

蝴蝶只数： $14 - 5 = 9$ （只）

答：蜘蛛有7只，蝴蝶有9只，蝉有5只。

5. 解：裤子： $(24 \times 21 - 439) \div (24 - 19) = 13$ （件）上衣： $21 - 13 = 8$ （件）

答：买来上衣8件，裤子13件。

6. 设鸡与兔只数一样多： $274 - 2 \times 26 = 222$ （只）

每一对鸡、兔共有足： $2 + 4 = 6$ （只）

鸡兔共有对数（也就是兔子的只数）：

$222 \div 6 = 37$ （对）

则鸡有 $37 + 26 = 63$ （只）

答：兔的只数为37，鸡的只数为63.

第十二讲 盈亏问题

解盈亏问题，常常用到比较法。

例1 三年级一班少先队员参加学校搬砖劳动. 如果每人搬4块砖，还剩7块；如果每人搬5块，则少2块砖. 这个班少先队员有几个人？要搬的砖共有多少块？

分析 比较两种搬砖法中各个量之间的关系：

每人搬4块，还剩7块砖；每人搬5块，就少2块. 这两次搬砖，每人相差 $5-4=1$ （块）。

第一种余7块，第二种少2块，那么第二次与第一次总共相差砖数： $7+2=9$ （块）

每人相差1块，结果总数就相差9块，所以有少先队员 $9\div 1=9$ （人）。

共有砖： $4\times 9+7=43$ （块）。

解： $(7+2)\div (5-4)=9$ （人）

$4\times 9+7=43$ （块）或 $5\times 9-2=43$ （块）

答：共有少先队员9人，砖的总数是43块。

如果把例1中的“少2块砖”改为“多1块砖”，你能计算出有多少少先队员，有多少块砖吗？

由本题可见，解这类问题的思路是把盈余数与不足数之和看作采用两种不同搬法产生的总差数，被每人搬砖的差即单位差除，就可得出单位的个数，对这题来说就是搬砖的人数。

例2 妈妈买回一筐苹果，按计划吃的天数算了一下，如果每天吃4个，要多出48个苹果；如果每天吃6个，则又少8个苹果. 那么妈妈买回的苹果有多少个？计划吃多少天？

分析 题中告诉我们每天吃4个，多出48个苹果；每天吃6个，少8个苹果. 观察每天吃的个数与苹果剩余个数的变化就能看出，由每天吃4个变为每天吃6个，也就是每天多吃2个时，苹果从多出48个到少8个，也就是所需的苹果总数要相差 $48+8=56$ （个）. 从这个对应的变化中可以看出，只要求56里面含有多少个2，就是所求的计划吃的天数；有了计划吃的天数，就不难求出具共有多少个苹果了。

解： $(48+8)\div (6-4)$

$=56\div 2$

$=28$ （天）

$6\times 28-8=160$ （个）或 $4\times 28+48=160$ （个）

答：妈妈买回苹果160个，计划吃28天。

如果条件“每天吃4个，多出48个”不变，另一条件改为“每天吃6个，则还多出8个”，问苹果应该有多少个，计划吃多少天？

分析 改题后每天吃的苹果个数没有变，也就是说每天多吃2个条件没变，苹果总数由原来多出48个变为多出8个. 那么所需苹果总数要相差： $48-8=40$ （个）

解： $(48-8)\div (6-4)$

$=40\div 2$

$=20$ （天）

$4\times 20+48=128$ （个）或 $6\times 20+8=128$ （个）

答：有苹果128个，计划吃20天.

例3 学校规定上午8时到校, 小明去上学, 如果每分钟走60米, 可提早10分钟到校; 如果每分钟走50米, 可提早8分钟到校, 求小明几时几分离家刚好8时到校? 由家到学校的路程是多少?

分析 小明每分钟走60米, 可提早10分钟到校, 即到校后还可多走 $60 \times 10 = 600$ (米); 如果每分钟走50米, 可提早8分钟到校, 即到校后还可多走 $50 \times 8 = 400$ (米), 第一种情况比第二种情况每分钟多走 $60 - 50 = 10$ (米), 就可以多走 $600 - 400 = 200$ (米), 从而可以求出小明由家到校所需时间。

解: ①10分钟走多少米? $60 \times 10 = 600$ (米)

② 8分钟走多少米? $50 \times 8 = 400$ (米)

③需要多长时间?

$(600 + 400) \div (60 - 50) = 20$ (分钟)

④由家到校的路程:

$60 \times (20 - 10) = 600$ (米)

或: $50 \times (20 - 8) = 600$ (米)

答: 小明7点40分离家去上学刚好8时到校; 小明的家离校有600米。

例4 学校为新生分配宿舍. 每个房间住3人, 则多出23人; 每个房间住5人, 则空出3个房间. 问宿舍有多少间? 新生有多少人?

分析 每个房间住3人, 则多出23人, 每个房间住5人, 就空出3个房间, 这3个房间如果住满人应该是 $5 \times 3 = 15$ (人). 由此可见, 每一个房间增加 $5 - 3 = 2$ (人). 两次安排人数总共相差 $23 + 15 = 38$ (人), 因此, 房间总数是:

$38 \div 2 = 19$ (间), 学生总数是: $3 \times 19 + 23 = 80$ (人), 或者 $5 \times 19 - 5 \times 3 = 80$ (人)。

解: $(23 + 5 \times 3) \div (5 - 3)$

$= (23 + 15) \div 2$

$= 38 \div 2$

$= 19$ (间)

$3 \times 19 + 23 = 80$ (人) 或 $5 \times 19 - 5 \times 3 = 80$ (人)。

答: 有19间宿舍, 新生有80人。

例5 少先队员去植树. 如果每人种5棵, 还有3棵没人种; 如果其中2人各种4棵, 其余的人各种6棵, 这些树苗正好种完. 问有多少少先队员参加植树, 一共种多少树苗?

分析 这是一道较难的盈亏问题, 主要难在对第二个已知条件的理解上: 如果其中2人各种4棵, 其余的人各种6棵, 就恰好种完. 这组条件中包含着两种种树的情况——2人各种4棵, 其余的人各种6棵。如果我们把它统一成一种情况, 让每人都种6棵, 那么, 就可以多种树 $(6 - 4) \times 2 = 4$ (棵). 因此, 原问题就转化为: 如果每人各种5棵树苗, 还有3棵没人种; 如果每人种6棵树苗, 还缺4棵. 问有多少少先队员, 一共种多少树苗?

解: $[3 + (6 - 4) \times 2] \div (6 - 5) = 7$ (人)

$5 \times 7 + 3 = 38$ (棵)

或 $6 \times 7 - 4 = 38$ (棵)

答: 有7个少先队员, 一共种38棵树。

例6 红山小学学生乘汽车到香山春游. 如果每车坐65人, 则有5人不能乘上车; 如果每车多坐5人, 恰多余了一辆车, 问一共有几辆汽车, 有多少学生?

分析 每车多坐5人，实际是每车可坐 $5+65=70$ （人），恰好多余了一辆车，也就是还差一辆汽车的人，即70人. 因而原问题转化为：如果每车坐65人，则多出5人无车乘坐；如果每车坐70人，还少70人，求有多少人和多少辆车？

解： $(5+5+65) \div 5=15$ （辆）

$65 \times 15 + 5=980$ （人）

或 $(5+65) \times (15-1)=980$ （人）

答：一共有15辆汽车，980名学生。

习题十二

1. 阿姨给幼儿园小朋友分饼干. 如果每人分3块, 则多出16块饼干; 如果每人分5块, 那么就缺4块饼干. 问有多少小朋友, 有多少块饼干?
2. 某校同学排队上操. 如果每行站9人, 则多37人; 如果每行站12人, 则少20人. 一共有多少学生?
3. 小强由家里到学校, 如果每分钟走50米, 上课就要迟到3分钟; 如果每分钟走60米, 就可以比上课时间提前2分钟到校. 小强家到学校的路程是多少米?
4. 少先队员参加绿化植树, 他们准备栽的苹果树苗是梨树苗的2倍. 如果每人栽3棵梨树苗, 还余2棵; 如果每人栽7棵苹果树苗, 要少6棵. 问有多少少先队员? 他们准备栽多少棵苹果树和梨树?
5. 学校进行大扫除, 分配若干人擦玻璃, 其中两人各擦4块, 其余各擦5块, 则余12块; 若每人擦6块, 则正好擦完, 求擦玻璃的人数及玻璃的块数?

习题十二解答

1. 解: $(4+16) \div (5-3) = 10$ (人)

$$3 \times 10 + 16 = 46 \text{ (块)}$$

答: 有10个小朋友, 有46块饼干。

2. 解: $(37+20) \div (12-9) = 19$ (行)

$$9 \times 19 + 37 = 208 \text{ (人)}$$

答: 共有学生208人。

3. 解: 迟到3分钟转化成米数: $50 \times 3 = 150$ (米) 提前两分钟到校转化成米数: $60 \times 2 = 120$ (米)

$$(150+120) \div (60-50) = 27 \text{ (分钟)}$$

$$50 \times (27+3) = 1500 \text{ (米)}$$

答: 小强家到学校的路程是1500米。

4. 解: 每人栽 3×2 (棵) 则余 2×2 (棵);

每人栽7棵则少6棵

$$(2 \times 2 + 6) \div (7 - 3 \times 2) = 10 \text{ (人)}; 7 \times 10 - 6 = 64 \text{ (棵)} \quad 64 \div 2 = 32 \text{ (棵)} \text{ 或 } 3 \times 10 + 2 = 32 \text{ (棵)}$$

答: 有少先队员10人, 要栽苹果树苗64棵, 梨树32棵。

5. 解: 由其中两人各擦4块、其余各擦5块则余12块, 可知, 若每人都擦5块, 则余 $12 - (5-4) \times 2 = 10$ 块, 而每人擦6块则正好. 可见每人多擦一块可把余下的10块擦完. 则擦玻璃人数是 $[12 - (5-4) \times 2] \div (6-5) = 10$ (人), 玻璃的块数是 $6 \times 10 = 60$ (块)。

答: 有10人擦玻璃, 共有60块玻璃。

第十三讲 巧求周长

我们已经会计算长方形和正方形的周长了, 但对于一些不是长方形、正方形而是多边形的图形, 怎样求它的周长呢? 可以把求多边形的周长转化为求长方形和正方形的周长。

例1 如图13—1所示, 求这个多边形的周长是多少厘米?

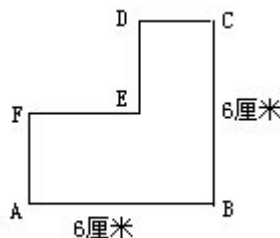


图13-1

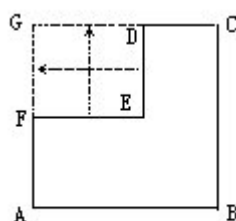


图13-2

分析 要求这个多边形的周长, 也就是求线段 $AB+BC+CD+DE+EF+FA$ 的和是多少, 而在这六条线段中, 只有 AB 和 BC 这两条线段的长度是已知的, 其余四条线段的长度均是未知的. 当然, 这个多边形的周长还是可以求的. 用一个大正方形把这个图形圈起来, 如图13—2所示, 这个大正方形是 $ABCG$. 把线段 EF 水平向上移动, 移到 CG 边上, 这样 $CD+EF$ 的长度正好与 AB 的长度相等. 同样把竖直方向上的 DE 边向左移动, 移到 AG 边上, 这样 $AF+DE$ 的长度正好与 BC 边的长度相等. 这样虽然 CD 、 DE 、 EF 、 FA 这四条线段的长度不知道, 但这四条线段的长度和我们可以求出来, 这样求这个多边形的周长就转化为求一个正方形的周长, 这个多边形的周长就可以巧妙地求出来了。

解: $6 \times 4 = 24$ (厘米)

答: 这个多边形的周长是24厘米。

说明: 本例图中的 E 点在竖直方向上不论移动到什么位置 (当然 F 点也随着上下移动), 这个多边形的周长都不变, 当然 D 点在水平方向上移动 (E 点也随着移动), 所得到的多边形周长也不变. 这里点的移动不能超出大正方形 $ABCG$ 这个范围。

例2 把长2厘米宽1厘米的长方形一层、两层、三层地摆下去, 摆完第十五层, 这个图形的周长是多少厘米?

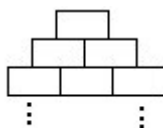


图13-3

分析 先观察图13—3, 第一层有一个长方形, 第二层有两个长方形, 第三层有三个长方形……找到规律, 第十五层有十五个长方形. 同样, 用一个大长方形把这个图形圈起来. 因此求这个多边形的周长就转化为求一个长为 $2 \times 15 = 30$ (厘米)、宽为 $1 \times 15 = 15$ (厘米)的长方形周长。

解: $(2 \times 15 + 1 \times 15) \times 2$

$= 45 \times 2 = 90$ (厘米)

答: 这个图形的周长为90厘米。

例3 把长2厘米、宽1厘米的长方形摆成如图13—4的形状，求该图形的周长。

分析 用一个大长方形把这个图形圈起来，如图13—5所示，这个大长方形的长为： $2 \times 10 = 20$ （厘米）、宽为： $1 \times 13 = 13$ （厘米），这个复杂的多边形的周长问题就转化为

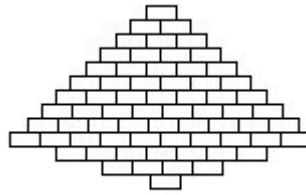


图13-4

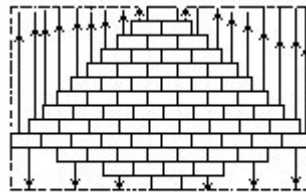


图13-5

求一个长方形的周长问题。

解： $(2 \times 10 + 1 \times 13) \times 2$

$= 33 \times 2 = 66$ （厘米）

答：这个多边形的周长为66厘米。

例4 图13—6共有8条边，分别用a、b、c、d、e、f、g、h表示，要测量它的周长，至少要测量哪几条线段的长度？

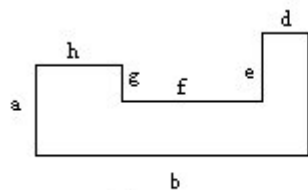


图13-6

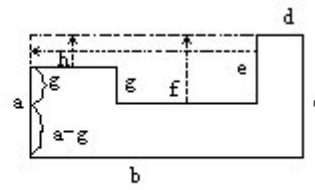


图13-7

分析 如果把这8条边的长度都测量出来，当然这个图形的周长也就知道了，但题目要求测量的边数要尽可能地少，所以仍然用一个长方形把这个图形圈起来，如图13—7所示。

这个大长方形的长为b，宽为c。这里与前面例题所不同的是，这个多边形的周长并不等于这个大长方形的周长，因为在竖直方向上a、g、e这三条线段有所重叠。在水平方向上， $h + f + d = b$ 。为了使测量的线段尽可能地少，因此在水平方向上只要测量线段b的长度，就可以求出水平方向上所有线段的长度和。

在竖直方向上，从线段a上截取一段g，则另一段a-g加上线段e就等于线段c的长度。

则 $a + g + e + c = (g + a - g) + g + e + c$

$= (a - g + e) + 2g + c = 2c + 2g$

或在线段c上截取一段，使其等于a-g，然后移至线段g的下面，这样便有 $a + g + e + c = 2(a + e)$ 。因此，在竖直方向上，只要测量线段c与g的长度或测量a与e的长度就可以求出竖直方向上所有线段的长度和。

解：在水平方向上测量线段b的长度，在竖直方向上测量c、g或a与e的长度，这个多边形的周长就可以求出来了。

答：只要测量b、c、g或b、a、e三条线段的长度，这个多边形的周长就可以求出来了。

例5 求图13—8的周长. 单位为厘米。

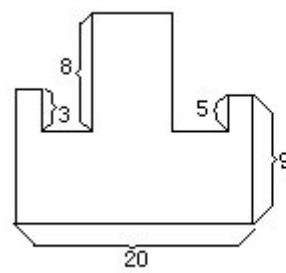


图13-8

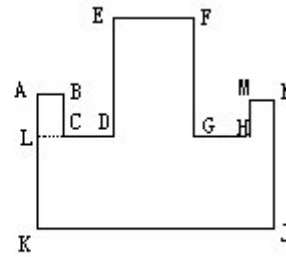


图13-9

分析 为了叙述方便，在图中标上字母A、B、C、D、E、F、G、H、J、K、M、N. 如图13—9所示.

在水平方向上： $AB+CD+EF+GH+MN=KJ$ ，因此水平方向上所有线段的长度和为： $20 \times 2 = 40$ （厘米）。

在竖直方向上：

$$AK+BC+ED+FG+MH+NJ$$

$$= (AL+LK) + BC+ED+FG+MH+NJ$$

$$= (AL+BC) + (LK+MH) + (ED+FG) + NJ$$

$$= 2BC+NJ+2ED+NJ$$

$$= 2(BC+ED+NJ)$$

而BC、ED、NJ的长度都是已知的，因此在竖直方向上所有线段的长度和就可以求出。

解：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$20 \times 2 = 40 \text{（厘米）}$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为：

$$(3+8+9) \times 2 = 40 \text{（厘米）}$$

因此，这个多边形的周长为： $40+40=80$ （厘米）

答：这个多边形的周长为80厘米.

习题十三

1. 一张长5分米、宽4分米的长方形纸板，从四个角上各裁去一个边长为1分米的正方形，所剩部分的周长是多少分米？
2. 如图13—10所示的多边形，它的周长是多少厘米？
3. 用15个边长2厘米的小正方形摆成如图13—11的形状，求它的周长。

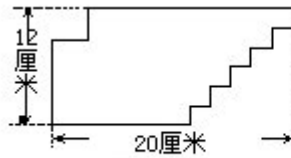


图13-10

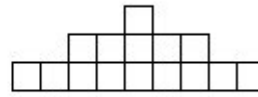


图13-11

4. 求图13—12所示图形（每个小正方形的顶点恰在另一个正方形的中心，且边相互平行）的周长。
5. 用边长为10厘米的五个小正方形拼成如图13—13的形状，这个图形的周长是多少厘米？

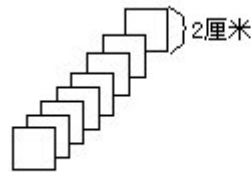


图13-12

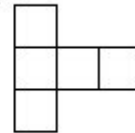


图13-13

6. 比较图13—14中哪个图形的周长长？
7. 求图13—15的周长是多少厘米？

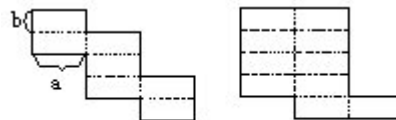


图13-14

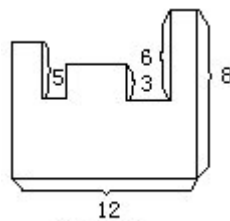


图13-15

8. 正方形被分成了五个长方形，每个长方形的周长都是30厘米，求这个正方形的周长是多少厘米（图13—6）？

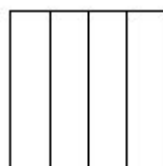
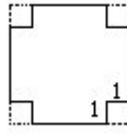


图13-6

习题十三解答

1. 解：从长方形的四个角各裁去一个正方形后，剩下部分的形状如右图所示。



在水平方向上所有线段的长度和为： $5 \times 2 = 10$ （分米）。

在竖直方向上，所有线段的长度和为： $4 \times 2 = 8$ （分米）。

因此，这个图形的周长为： $10 + 8 = 18$ （分米）。

答：这个图形的周长为18分米。

2. 解：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$20 \times 2 = 40 \text{（厘米）}。$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为： $12 \times 2 = 24$ （厘米）。因此，这个图形的周长为： $40 + 24 = 64$ （厘米）。

答：这个图形的周长为64厘米。

3. 解：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$2 \times 9 \times 2 = 36 \text{（厘米）}。$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为： $2 \times 3 \times 2 = 12$ （厘米）因此，这个图形的周长为： $36 + 12 = 48$ （厘米）。

答：这个图形的周长为48厘米。

4. 解：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$(2 + 1 \times 7) \times 2 = 18 \text{（厘米）}。$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为：

$$(2 + 1 \times 7) \times 2 = 18 \text{（厘米）}。$$

因此，这个图形的周长为： $18 + 18 = 36$ （厘米）。

答：这个图形的周长为36厘米。

5. 解：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$10 \times 3 \times 2 = 60 \text{（厘米）}。$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为：

$$10 \times 3 \times 2 = 60 \text{（厘米）}。$$

因此，这个图形的周长为： $60 + 60 = 120$ （厘米）。

答：这个图形的周长为120厘米。

6. 解：设每个小长方形的长为a，宽为b。

第一个图形：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$3a \times 2 = 6a,$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为： $5b \times 2 = 10b$. 因此，这个图形的周长为： $6a + 10b$ 。

第二个图形：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$3a \times 2 = 6a。$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为： $5b \times 2 = 10b$. 因此，这个图形的周长为： $6a + 10b$ 。

所以，这两个图形的周长一样长。

答：这两个图形的周长一样长。

7. 解：在水平方向上，所有线段的长度和为：

$$12 \times 2 = 24 \text{（厘米）}。$$

在竖直方向上，所有线段的长度和为：

$$(8 + 3 + 5) \times 2 = 32 \text{（厘米）}。$$

因此，这个多边形的周长为： $24 + 32 = 56$ （厘米）。

答：这个多边形的周长为56厘米。

8. 解：因为每个小正方形的周长为30厘米，所以每个小长方形的一个长与一个宽的和为： $30 \div 2 = 15$ （厘米）. 因为每个小长方形的长等于5个小长方形的宽，因此，每个小长方形的长为： $15 \div (1 + 5) \times 5 = 75 \div 6$ （厘米），即正方形的边长为 $75 \div 6$ 厘米。

因此，这个正方形的周长为： $75 \div 6 \times 4 = 50$ （厘米）。

答：这个正方形的周长为50厘米.

第十四讲 从数的二进制谈起

在即将进入21世纪的今天,电子(数字)计算机内部数的存贮和计算采用二进制已是众所周知的事了.据学者考证,中国在公元前2000多年的伏羲氏发明的八卦,即用一和--两种符号拼出来的。

如果把一看成1,把--看成0,那么上述八卦可以翻译成二进制数(列于下面)。

☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
乾	兑	离	震	巽	坎	艮	坤
111	011	101	001	110	010	100	000

但是人类历史进程表明,二进制大约被人类冷落了近四千年(在此期间一直重视和使用十进制),直到20世纪40年代,科学技术的整体水平(有了无线电通讯、雷达技术和真空管、继电器等电子元器件)进一步提高,再加上反法西斯战争需要发明原子弹(原子弹许多设计数据不能事先在实验室测出,而必须靠理论计算,而计算量超过人类有史以来全部算术运算),著名数学家冯·诺伊曼(J. von Neumann)和另一些年轻数学家发明制成了称之为ENIAC的通用电子数字计算机(用18000支真空管,1500个继电器,几十万电阻电容,自重30吨,耗电200千瓦).直至今日,电子计算机主要还是冯·诺伊曼体系.告诉大家这一些历史,主要说明我们不能停留在为祖先最早发明了二进制而自豪这一步,还要看到数学大有用武之地,但要与经济建设和科学技术广泛结合才能起大的或巨大的(如电子计算机)作用.下面看二进制本质到底是什么?

人类天生双手十指.“搬着手指头”计数,是每个人幼时必经之路.十进制数有两大内涵.一是有十个不同数符:0, 1, 2...9;二是“逢十进一”的进位法则,有个、十、百、千等自右向左的数位.倘若人类双手八指,也许地球上今日该流行八进制了.所以二进制也有两大内涵.一是有两个不同数符:0, 1;二是“逢二进一”.其实,我们已见过非十进制的事物,一年十二个月,十二进制;一周七天,七进制;一小时六十分,一分六十秒,六十进制;一英尺等于十二英寸(电视机常说20英寸,21英寸),十二进制;一副三角尺含2块,一双鞋含2只,一双袜子含2只,一双筷子含2根,这些都可看成二进制.一个十进制数1993可表述为:

$$1993=1000+900+90+3=1\times 10^3+9\times 10^2+9\times 10+3$$

一般性地,一个整数 $N=\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0}$ 表述成:

$$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots$$

$$+a_3\times 10^3+a_2\times 10^2+a_1\times 10+a_0$$

其中 $0\leq a_i\leq 9$,而 i 是0到 n 中的一个整数。

再回到二进制.大家知道:数是计算物体的个数而引进的,0代表什么也没有,有一个,记为“1”;再多一个,记为“10”(在十进制下记为2);比“10”再多一个,记为“11”.依次类推,我们很容易接受(或自己发明)二进制下,从小到大的数列,不妨列表:

二进制数	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100
十进制数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

为了不引起混淆,我们把二进制数右下角标一个2,如:

$(10)_2=(2)_{10}$,或省略括号,省略十进制标记,略为:

$$10_2=2, \text{ 或 } (10)_2=2, 1111_2=15$$

和十进制对数位有一省略名字一样,二进制的数位也可称呼:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 N = \cdots & b_{13} & b_{12} & b_{11} & b_{10} & b_9 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & 8192 & 4096 & 2048 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
 & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{位} & \text{个}
 \end{array}$$

例如：1993=1024+512+256+128+64+8+1，写成二进制为：

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & b_{10} & b_9 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
 (1993)_{10} = & (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1) & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
 \text{反过来, } & (1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0) & 2 = 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 +
 \end{array}$$

$$0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = (88)_{10}$$

因而二进制的数化为十进制，只要读出二进制各数位累加即可，如 $N = (b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_2 b_1 b_0)_2$ 则有 $N = (b_n \times 2^n + b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + \cdots + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0)_2$

难度大的是怎样较快地把一个十进制数化为二进制数. 还以1993为例，前面的方法是先找出二进制的高位数字，记熟了2的各种幂次（a的n次幂表示n个a相乘，记为 a^n ），找到不超过1993的最大的2的幂，是 $2^{10}=1024$ ，得 $b_{10}=1$ ，再找不超过 $(1993-2^{10})$ 的最大的2的幂，是 $2^9=512$ ，得 $b_9=1$ ，依次类推得 $b_8, b_7 \cdots b_2, b_1, b_0$. 这是由高位到低位逐渐推得的方法。

现在设法自低位到高位，先找 b_0 . 显然，十进制偶数， $b_0=0$ ，十进制奇数 $b_0=1$ ，所以 b_0 是N除以2的余数. 再说 b_1 ，因为 $N = b_n \times 2^n + \cdots + b_2 \times 2^2$

$$+ b_1 \times 2^1 + b_0, \text{ 所以 } \frac{N - b_0}{2} = b_n \times$$

$$2^{n-1} + \cdots + b_2 \times 2^1 + b_1, \text{ 即同样的理由看出 } b_1 \text{ 是 } \frac{N - b_0}{2} \text{ 除以 } 2$$

以后的余数，余数为0， b_i 就为0；余数为1， b_i 就为1；这样的想法可逐渐向高位推，得出一般性方法. 还以1993为例，写出竖式：

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 1993} \cdots \text{余 } 1 = b_0 \\
 \underline{2 \overline{) 996}} \cdots \text{余 } 0 = b_1 \\
 \underline{2 \overline{) 498}} \cdots \text{余 } 0 = b_2 \\
 \underline{2 \overline{) 249}} \cdots \text{余 } 1 = b_3 \\
 \underline{2 \overline{) 124}} \cdots \text{余 } 0 = b_4 \\
 \underline{2 \overline{) 62}} \cdots \text{余 } 0 = b_5 \\
 \underline{2 \overline{) 31}} \cdots \text{余 } 1 = b_6 \\
 \underline{2 \overline{) 15}} \cdots \text{余 } 1 = b_7 \\
 \underline{2 \overline{) 7}} \cdots \text{余 } 1 = b_8 \\
 \underline{2 \overline{) 3}} \cdots \text{余 } 1 = b_9 \\
 1 \cdots \text{余 } 1 = b_{10} \\
 (b_{10})
 \end{array}$$

$N=1993$ ， b_0 为 $1993 \div 2$ 的余数，

$$b_1 \text{ 为 } \frac{1993 - b_0}{2} \div 2 \text{ 的余数。}$$

...

$$(1993)_{10} = (11111001001)_2$$

以后熟悉了这一算法，我们可很快地化十进制数为二进制数。

例 如化 $(19)_{10}$ ， $(101)_{10}$ ， $(81)_{10}$ 为二进制的竖式为：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)19} \\ 2 \overline{)9} \cdots 1 \\ 2 \overline{)4} \cdots 1 \\ 2 \overline{)2} \cdots 0 \\ 1 \cdots 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{)101} \\ 2 \overline{)50} \cdots 1 \\ 2 \overline{)25} \cdots 0 \\ 2 \overline{)12} \cdots 1 \\ 2 \overline{)6} \cdots 0 \\ 2 \overline{)3} \cdots 0 \\ 1 \cdots 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{)81} \\ 2 \overline{)40} \cdots 1 \\ 2 \overline{)20} \cdots 0 \\ 2 \overline{)10} \cdots 0 \\ 2 \overline{)5} \cdots 0 \\ 2 \overline{)2} \cdots 1 \\ 1 \cdots 0 \end{array}$$

$$(19)_{10} = (10011)_2; \quad (101)_{10} = (1100101)_2; \quad (81)_{10} = (1010001)_2$$

顺便说一句，现在使用电子计算机，直接输入十进制数即可，因为机器内部已专门编有（十）化（二）程序，可以自动转换。

下面讲一下二进制数的加减乘除四则运算：

加法“口诀”特别简单， $0+0=0$ ， $1+0=0+1=1$ ， $1+1=10$ 。表述成运算时的竖式（用十进制和二进制比较）

$$\begin{array}{r} 1993 \\ + 88 \\ \hline 2081 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11111001001 \\ + 1011000 \\ \hline 100000100001 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 2048\text{位} \quad 32\text{位} \quad 1\text{位} \\ b_{11} \quad b_5 \quad b_6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2048 \\ 32 \\ + 1 \\ \hline 2081 \end{array}$$

读者不难体会竖式中进位及累进等与十进制相似的规则。关键之处会“逢二进一”。减法的关键在于够减就减，不够减时，向高位借，而“借一还二”。（高位借一，相当于低的为二）。例如：

$$\begin{array}{r} 11 \\ - 10 \\ \hline 01 \end{array}; \quad \begin{array}{r} \text{借出} \\ 10\bar{1} \\ - 11 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 011 \\ - 11 \\ \hline 10 \end{array}; \quad \begin{array}{r} \text{借出} \\ 100 \\ - 1 \\ \hline 010 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 010 \\ - 1 \\ \hline 010 \end{array}$$

1 不够减，向高位借，不够减； 不够减，借1还1 能借，再向更高位借；第三个竖式和十进制中 $100-7$ 的思想是一样的。

二进制的乘法口诀只有三句， $1 \times 0 = 0$ ， $0 \times 0 = 0$ ， $1 \times 1 = 1$ 。看竖式：

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \times 6 \\
 \hline
 18
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 110 \\
 \hline
 00 \\
 11 \\
 11 \\
 \hline
 10010 \\
 b_4 \quad b_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 b_4 \text{ 位上 } 1 = 16 \\
 b_1 \text{ 位上 } 1 = 2 \\
 16 + 2 = 18
 \end{array}$$

二进制除法是乘法逆运算，除法也就是连减. 看竖式：

十进制中： 二进制中：

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 6 \overline{) 18} \\
 \underline{18} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 110 \overline{) 10010} \\
 \underline{-0110} \\
 110 \\
 \underline{110} \\
 0
 \end{array}$$

又如， $1993 \div 88 = 22$ 余 57，二进制除法，在试找商时，较省力，要么0，要么1。

十进制中：

二进制中：

$$\begin{array}{r}
 22 \\
 88 \overline{) 1993} \\
 \underline{176} \\
 233 \\
 \underline{176} \\
 57
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10110 \\
 1011000 \overline{) 11111001001} \\
 \underline{-) 1011000} \\
 10010010 \\
 \underline{-) 1011000} \\
 1110100 \\
 \underline{-) 1011000} \\
 111001
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{商 } 10110 \\
 = 16 + 4 + 2 \\
 = 22 \\
 \text{余数 } 111001 \\
 = 32 + 16 + 8 + 1 \\
 = 57
 \end{array}$$

二进制数有被电子计算机采用的好处，但人们有时还觉得它表达一个数时，数位太长，如 $(1023)_{10}$ ，表成二进制为十位： $(1111111111)_2$ ，为读写和观察方便，要缩短数位又便于机器使用，科学家们偏爱于八进制和十六进制. 大家可以自己扩充八进制的数的概念和运算：

八进制有0, 1, 2...7共八个数符，由低位向高位是“逢八进一”，如： $N = (c_n \cdots c_3 c_2 c_1 c_0)_8 = c_n \times 8_n + c_{n-1} \times 8_{n-1} + \cdots + c_2 \times 8_2 + c_1 \times 8 + c_0$

其中 $0 \leq c_i \leq 7$, i 取 0, 1, 2...n。

十进制化八进制： $(1993)_{10} = (3711)_8$;

$(88)_{10} = (130)_8$

$$\begin{array}{r}
 8 \overline{)1993} \\
 \underline{8 \overline{)249} \cdots 1=C_0} \\
 \underline{8 \overline{)31} \cdots 1=C_1} \\
 3 \cdots 7=C_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (3711)_8 = 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 \\
 + 1 \times 8 + 1 \\
 = 3 \times 512 + 7 \times 64 \\
 + 8 + 1 \\
 = 1993
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \overline{)88} \\
 \underline{8 \overline{)11} \cdots 0} \\
 1 \cdots 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (130)_8 \\
 = 64 + 3 \times 8 \\
 = 88
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (3711)_8 \\
 + (130)_8 \\
 \hline
 (4041)_8
 \end{array}$$

$$(4041)_8 = 4 \times 512 + 4 \times 8 + 1$$

$$= 2081$$

$$1993 + 88 = 2081$$

$$\begin{array}{r}
 4041 \\
 - 3711 \\
 \hline
 130
 \end{array}$$

加法关键在于“逢八进一”。

$$\text{减法: } 2081 - 1993 = 88$$

$$(4041)_8 - (3711)_8 = (130)_8,$$

$$\begin{array}{r}
 31234 \\
 - 7657 \\
 \hline
 \Rightarrow \frac{-7657}{5} \Rightarrow \frac{-7657}{55} \Rightarrow \frac{-7657}{21355}
 \end{array}$$

减法关键在于不够减时，“退一还八”

乘法：八进制乘法口诀表重新制定如下：

八进制乘	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2		4	6	10	12	14	16
3			11	14	17	22	25
4				20	24	30	34
5					31	36	43
6						44	52
7							61

如：十进制： $\begin{array}{r} 207 \\ \times 19 \\ \hline 1863 \\ 207 \\ \hline 3933 \end{array}$	八进制： $\begin{array}{r} 8 \overline{)207} \\ 8 \overline{)25} \cdots 7 \\ \quad 3 \cdots 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \overline{)19} \\ \quad 2 \cdots 3 \end{array}$
--	---

八进制乘法：

$$\begin{array}{r} 317 \\ \times 23 \\ \hline 1155 \\ +) 636 \\ \hline 7535 \end{array}$$

$$(7535)_8 = 7 \times 512 + 5 \times 64 + 3 \times 8 + 5$$

$$= (3933)_{10}$$

这些口诀读起来不顺口，如读成“七七得六一”，当然是八进制的六个8加上一个1. 同样做除法时，也挺费神，看着“七七乘法表”做可省心些，并不是说除法有什么难度，主要是脑中的十进制“九九表”干扰了“七七表”的记忆。

$$(7535)_8 \div (23)_8 = (317)_8$$

$$\begin{array}{r} 317 \\ 23 \overline{)7535} \\ \underline{71} \\ 43 \\ \underline{23} \\ 205 \\ \underline{205} \\ 0 \end{array}$$

现在再讲十六进制。

大家自然会想到16个数符要设想一套简明的表达符号，国际上通用为0, 1, 2, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F. 这里特别请大家记住六个字母：A, B, C, D, E, F. A代表10, (十六进制中比9多一的数)，同理B代表11, C代表12, D代表13, E代表14, F代表15. 这样：

$$N = (d_n d_{n-1} \cdots d_2 d_1 d_0)_{16}$$

$$= d_n \times 16^n + d_{n-1} \times 16^{n-1} + \cdots + d_2 \times 16^2 + d_1 \times 16 + d_0 \text{ 其中 } d_i \text{ 取自 } 0, 1 \cdots 9, A, B, C, D, E, F. i \text{ 可取 } 0, 1 \cdots n.$$

$$\text{例如 } N = (20A)_{16} = 2 \times 16^2 + 10 = (522)_{10}$$

$$(AB)_{16} = 10 \times 16 + 11 = (171)_{10}$$

如把十进制直接化为十六进制：

$$(1993)_{10} = (7C9)_{16} \quad (88)_{10} = (58)_{16}$$

$$\begin{array}{r} 16 \overline{)1993} \\ 16 \overline{)124} \cdots 9 \\ \quad 7 \cdots 12 = C \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \overline{)88} \\ \quad 5 \cdots 8 \end{array}$$

十六进制中的加法其关键在于“逢十六进一”，减法的关键则在于“退一还十六”。

$$\begin{array}{r} 7C9 \\ + 58 \\ \hline 821 \end{array}$$

$$(821)_{16} = 8 \times 16^2 + 2 \times 16 + 1$$

$$= 8 \times 256 + 32 + 1$$

$$= 2081 = 1993 + 88$$

$$\begin{array}{r} 1023 \\ - ABC \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 101 \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} \\ - ABC \\ \hline 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 0 \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} \\ - A B C \\ \hline 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -0 \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} \\ A B C \\ \hline 5 6 7 \end{array}$$

注意：十六进制的乘法和除法很费神，要构造“十六——十六表”。

十六进制乘法表

	(10)				(11)				(12)				(13)				(14)				(15)			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F									
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F									
2		4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E									
3			9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D									
4				10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C									
5					19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B									
6						24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A									
7							31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69									
8								40	48	50	58	60	68	70	78									
9									51	5A	63	6C	75	7E	87									
10 (A)										64	6E	78	82	8C	96									
11 (B)											79	84	8F	9A	A5									
12 (C)												90	9C	A8	B4									
13 (D)													A9	B6	C3									
14 (E)														C4	D2									
15 (F)															E1									

利用这表做乘法及除法：

$$\begin{array}{r}
 10AD \\
 \times F3 \\
 \hline
 3207 \\
 +) FA23 \\
 \hline
 FD437
 \end{array}$$

$$(10AD)_{16} = 16^3 + 10 \times 16^2 + 13 = 4096 + 160 + 13$$

$$= 4269$$

$$(F3)_{16} = 15 \times 16 + 3 = 243$$

$$4269 \times 243 = 1037367$$

$$(FD437)_{16} = 15 \times 16^4 + 13 \times 16^3 + 4 \times 16^2 + 3 \times 16 + 7$$

$$= ((15 \times 16 + 13) \times 16 + 4) \times 16 + 3 \times 16 + 7$$

$$= 1037367$$

$$\begin{array}{r}
 F3 \\
 \hline
 10AD \overline{) FD437} \\
 -) FA23 \\
 \hline
 3207 \\
 -) 3207 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

当然这十六进制的乘除法是很不习惯的. 下面谈一下二进制和八进制、十六进制之间的较密切的相互关系。

把一个二进制的数自右向左3位一组, 立刻可以翻译成八进制数. 其间对应规律为:

000	001	010	011	100	101	110	111
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0	1	2	3	4	5	6	7

同样, 把一个二进制数自右向左4位一组, 立刻可以翻译为十六进制数. 其间对应规律为:

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0	1	2	3	4	5	6	7
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
8	9	10=A	11=B	12=C	13=D	14=E	15=F

$$\text{如 } (1993)_{10} = (11111001001)_2 = (011111001001)_2$$

$$= (3711)_8 = (011111001001)_2 = (7C9)_{16}$$

前面在十六进制下很不顺手的除法 $FD437 \div 10AD = F3$ 可以重新用二进制检验:

$$(FD437)_{16} = (1111 \ 1101 \ 0100 \ 0011 \ 0111)_2$$

$$(10AD)_{16} = (10000\ 1010\ 1101)$$

排成除法竖式:

$$\begin{array}{r}
 11110011 \\
 1000010101101 \overline{) 11111101\ 0100\ 0011\ 0111} \\
 \underline{10000101\ 0110\ 1} \\
 1110111\ 1101\ 10 \\
 \underline{1000010\ 1011\ 01} \\
 110101\ 0010\ 011 \\
 \underline{100001\ 0101\ 101} \\
 10011\ 1100\ 1101 \\
 \underline{10000\ 1010\ 1101} \\
 11\ 0010\ 0000\ 011 \\
 \underline{10\ 0001\ 0101\ 101} \\
 1\ 0000\ 1010\ 1101 \\
 \underline{10000\ 1010\ 1101} \\
 0
 \end{array}$$

最后, 关于三进制数、五进制数、七进制数, 以及一般的g进制数, 读者一定可以自己推出一套记数、转化及加减乘除的法则来。

例如: $(1993)_{10} = (5545)_7 = (30433)_5 = (2201211)_3$ 等. 只要看竖式:

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 1993} \\
 7 \overline{) 284} \cdots 5 \\
 7 \overline{) 40} \cdots 4 \\
 \overline{) 5} \cdots 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \overline{) 1993} \\
 5 \overline{) 398} \cdots 3 \\
 5 \overline{) 79} \cdots 3 \\
 5 \overline{) 15} \cdots 4 \\
 \overline{) 3} \cdots 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \overline{) 1993} \\
 3 \overline{) 664} \cdots 1 \\
 3 \overline{) 221} \cdots 1 \\
 3 \overline{) 73} \cdots 2 \\
 3 \overline{) 24} \cdots 1 \\
 3 \overline{) 8} \cdots 0 \\
 \overline{) 2} \cdots 2
 \end{array}$$

这样, 将一个七进制的数化成三进制数时, 可以先将此数化成十进制数作中介而求得, 例如:

$$(1046)_7 = 1 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 = 343 + 28 + 6 = (377)_{10}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 377} \\
 3 \overline{) 125} \cdots 2 \\
 3 \overline{) 41} \cdots 2 \\
 3 \overline{) 13} \cdots 2 \\
 3 \overline{) 4} \cdots 1 \\
 \overline{) 1} \cdots 1
 \end{array}$$

$$\therefore (1046)_7 = (111222)_3$$

最后介绍几个问题. 研究表明, 要保存数码最经济的进位制是三进制. 可惜现在物理器件较成熟的还是支持两种状态的二进制。

不久前刚逝世的本世纪杰出的科普作家阿西莫夫 (Isaac Asimov) 曾喜悦地谈到自己年轻时独立解决了一个看似与二进制无关的有趣问题. 问题是这样的: 如何制造个数最少的一些单位砝码, 如1克、2克、3克、4克等, 能称出1克到1千克的任何整克数的物体?

答案是: 1克、2克、4克、8克、16克、32克、64克、128克、256克、512克, 共十个砝码. 实际上这些砝码一直

可称出1到1023克之间任何整克数的物体. 这在我们学完二进制数以后就不难理解了. 如: $x = a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$, 每个 a_i 或0或1表示2克砝码或不用或用上. 如把问题再简化一些, 如只许用3个砝码, 就制成1克、2克、4克. 可称1、2、 \cdots 7克的任何整克数物体, 或说要称1、2、 \cdots 7克之间任一物体, 3个砝码是最少的了. 因为1克必然要的. 2克, 如不要, 再造一个1克砝码, 这样用二个1克砝码, 仅能称1克、2克共2种物体, 效率不高. 所以造一个1克, 一个2克, 这样可以称1、2、3克三种物体了. 下一个不必造3克的砝码, 而造了一个4克的砝码, 所以1克、2克、4克是最省个数的体系了. 十个砝码最省的推理也相似.

在结束本讲之时, 希望读者注重于理解各种进制的思想, 不必去死记硬背八进制乘法表、十六进制乘法表. 并请思考类似于十进制的分数、小数、循环小数等内容在二进制或八进制等体系下, 如何进行?

习题十四

1. $(518)_{10} = (\quad)_2 = (\quad)_8 = (\quad)_{16}$

$= (\quad)_3 = (\quad)_5 = (\quad)_7$

2. $(AF01)_{16} = (\quad)_7$

3. $1+2+4+8+16+32+64+128+516+1024$ 用二进制计算后, 能很快得到十进制答案吗? (提示: 类比于 $9+90+900=999=1000-1$)

4. 请用二进制运算、三进制运算实现下面式子:

$$\begin{array}{r} (1011)_2 \\ + (111)_2 \\ \hline \text{二进制:} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (1011)_3 \\ + (111)_3 \\ \hline \text{三进制:} \end{array}$$

5. 用竖式做十六进制除法: $(FD\ 437)_{16} \div (F3)_{16}$

6. 请你造一个三进制乘法表, 造一个七进制乘法表。

7. 一个 g 进制的数, $N = a_5 \cdot g^5 + a_4 \cdot g^4 + a_3 \cdot g^3 + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0$. 要计算它的十进制数值时, 有一个简便算法: $N = (((a_5 \cdot g + a_4) \cdot g + a_3) \cdot g + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0$. 这样共进行5次乘法5次加法, 如死板地按 $a_5 \cdot g^5 + \dots + a_1 \cdot g + a_0$, 需进行 $(5+4+3+2+1)$ 15次乘法5次加法, 显然浪费时间. 而另有一个聪明学生想: 我在纸上先把 g, g^2, g^3, g^4, g^5 记下来这样做了4次乘法, 再把这5个 g 相应与 a_i 作乘法, 又做5次, 总共做了9次乘法, 5次加法, 中间还要耗费空白纸记下 g^i , 他仔细一想觉得不合算了, 就接受了题目中的简便算法. 现在请你用简便算法求出3进制的 N .

$$N = (210122)_3 = (\quad)_{10}$$

8. 在二进制下, 一个数扩大2倍, 就在右边添一个0, 扩大4倍, 右添二个0...扩大2倍, 右添 i 个0. 这个规则对吗? 类似规律在八进制下怎样叙述? 十六进制下呢?

9. 十进制下, 除法 $1 \div 7 = \frac{1}{7} = 0.142857$. 如在二进制下作除法竖式:

$$1 \div (111)_2 = \left(\frac{1}{111} \right)_2 = (0.001001\cdots)_2$$

$$\begin{array}{r} 0.001001\cdots \\ 111 \overline{)1000} \\ \underline{111} \\ 1000 \\ \underline{111} \\ 1 \end{array}$$

请你自己想一下, 如何“自圆其说”地把二进制数推广到分数、小数, 以及二进制循环小数?

10. 如果天平两边都可以放砝码, 即可以调用两砝码的数值差, 要称物体而制造尽可能少的砝码, 借用多少进制制?

习题十四解答

1. $(518)_{10} = (1006)_8 = (1000000110)_2 = (206)_{16}$

$$= (201012)_3 = (4033)_0 = (1340)_7$$

$$2. (AF01)_{16} = 10 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 1 = 44801$$

$$= (244421)_7$$

$$3. 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$$

$$= (1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots + \underbrace{10 \cdots 0}_{10 \uparrow 0})_2$$

$$= (\underbrace{11 \cdots 1}_{11 \uparrow 1})_2 = (\underbrace{10 \cdots 0}_{11 \uparrow 0} - 1)_2$$

$$= 2048 - 1 = 2047$$

$$4. \begin{array}{r} (1011)_2 \\ + (111)_2 \\ \hline (10010)_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (1011)_3 \\ + (111)_3 \\ \hline (1122)_3 \end{array}$$

5. 十六进制除法:

$$\begin{array}{r} 10AD \\ F3 \overline{) FD437} \\ \underline{F3} \\ A43 \\ \underline{97E} \\ C57 \\ \underline{C57} \\ 0 \end{array}$$

6. 三进制乘法:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{112} \\ 2211 \end{array}$$

七进制乘法:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2		4	6	11	13	15
3			12	15	21	24
4				22	26	33
5					34	42
6						51

$$7. N = (210122)_3$$

$$= 2 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2$$

$$= ((((2 \times 3 + 1) \times 3 + 0) \times 3 + 1) \times 3 + 2) \times 3 + 2$$

$$= 584。$$

8. 规律对的. $(N)_8$, 八进制数扩大8倍相当于右边添一个0; $(N)_{16}$, 十六进制数扩大16倍相当于右边添一个0。

9. 二进制小于1大于0的数也叫纯小数, 整数部分记为0, 后加小数

点 $0.b_1b_2b_3b_4\cdots$, b_1 位称为 $\frac{1}{2}$ 位, b_1 或为0, 或为1. b_2 位称为 $\frac{1}{4}$ 位, b_2 或0, 或1. 所以二进制小数 $0.b_1b_2b_3\cdots = b_1 \times \frac{1}{2} + b_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdots$

$$\text{例如 } (101.011)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{8} = 5 + \frac{3}{8} = (5.375)_{10}$$

二进制分数: 分数线上面写二进制整数, 分数线下面写二进制整数, 值等于分子除以分母。

$$\text{如 } \left(\frac{1}{7}\right)_{10} = \left(\frac{1}{111}\right)_2 = (0.001001\cdots)_2 = (0.\dot{0}0\dot{1})_2$$

二进制循环小数, 但是并非每个十进制循环小数都可化成别的进制循环小数的。

$$\text{例如 } \left(\frac{1}{7}\right)_{10} = (0.\dot{1}4285\dot{7}) = \left(\frac{1}{10}\right)_7 = (0.1)_7$$

此处含义: 十进制循环小数

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{7}\right)_{10} &= 0.142857142857142857\cdots \\ &= (0.\dot{1}4285\dot{7})_{10} \end{aligned}$$

但在七进制下, 显然不是一个循环小数

$$\left(\frac{1}{7}\right)_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)_7 = (0.1)_7$$

10. 天平两边均可放砝码, 调用三进制合适. 因为: $(1)_{10} = (1)_3$, $(2)_{10} = (3-1)_{10} = (10-1)_3$ ——右边放3克, 左边放1克, 相当于右边放一个2克。

$$(3)_{10} = (10)_3, \quad (4)_{10} = (10+1)_3$$

所以, 制造一个1克、一个3克的砝码就可以称出1、2、3、4共4种物体了。

再扩大: 1克、3克、9克, 共3个砝码可称出1克到13

克之间所有整数克物体了. 请读者自己补证。

例如

$$(13)_{10} = (100+10+1)_3 \quad (12)_{10} = (100+10)_3$$

$$(11)_{10} = (100+10-1)_3 \quad (10)_{10} = (100+1)_3$$

$$(9)_{10} = (100)_3 \quad (8)_{10} = (100-1)_3$$

$$(7)_{10} = (100+1-10)_3$$

$$(6)_{10} = (100-10)_3 \quad (5)_{10} = (100-10-1)_3$$

结论: 制造 $1, 3_1, 3_2, 3_3 \dots 3_K$ 共 $K+1$ 个砝码, 天平左右两边都允许放砝码, 可称出 $1, 2, \dots, (3_{K+1}-1)/2$ 种整克数物体.

第十五讲 综合练习

一、填空题:

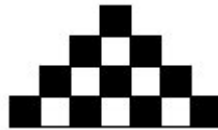
1. 计算 $12345679 \times 72 =$ _____。

2. 计算 $1992 \times 19931993 - 1993 \times 19921992 =$ _____。

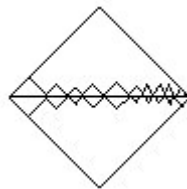
3. 根据下面字母的排列规律, 确定第100个字母应是=_____。

abacbadcbabacbadcbabacbadcbaba...

4. 一“台阶”图的每一层都由黑色和白色的正方形交错组成, 且每一层的两端都是黑色的正方形, 从上到下第一层到第四层如图所示, 则第1993层中白色的正方形的数目是_____。



5. 如图, 把正方形ABCD的对角线AC任意分成10段, 并以每一段为对角线作为正方形. 设这10个小正方形的周长之和为P, 大正方形的周长为L, 则P与L的关系是_____ (填<, >, =)。



6. 有一个长4米的长方形木块, 锯成等长的5段后, 表面积增加了4平方米, 则这个长方体的体积是_____立方米。

7. 五位数字中各位数字之和为42, 且能被4整除的数有_____个。

8. 在由两个不同数字组成的两位数中, 每个两位数被其中两个数位上的数字之和除时, 所得的商的最大值是_____。

9. 袋子中有红、黄、兰三种颜色的球各若干, 最少摸出_____个球才能保证其中一定有四个球的颜色相同。

10. 从1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15...99 100中划去100个数码, 使剩下的数首位不是0且数值最小, 则这个数是_____。

11. 某羽毛球队共有男女队员24人. 在男队员中, 有5人和第一个女队员配合过双打; 有6人和第二个女队员配合过双打...所有男队员都和最后一个女队员配合过双打, 则男女队员的人数各是_____。

12. 小明花了很多时间求出了 $a_1, a_2, \dots, a_{1993}$ 这1993个数的平均数为2000, 后来这个粗心的小明又将这个平均数混入了原来的1993个数中, 于是他又求出了这1994个数的平均数, 则这1994个数的平均数是_____。

13. 2001个空格排成一行, 预先在左边第一格内放入一枚棋子, 然后A、B两人交替走, 先A后B, 每步可向右移动2格或3格或4格, 规定谁走到最后一格谁胜. A为了保证获胜, 他第一步必须把棋子向右移动_____格。

14. 由数字1、2、3、4可以组成没有重复数字且千位数字是1的四位数共_____个。

15. 将11112222写成两个连续的自然数的乘积, 则其中较大的那个自然数是_____。

16. 有一串数排列成一行, 其中第一个数是0, 第二个数是1, 第三个数是2, 从第四个数开始, 每一个数都是其前三个数的和, 那么第1993个数被3除所得的余数是_____。

17. 某班有女生15人, 这个班的男、女团员共26人, 则女生中的非团员比男生中的团员人数少_____人。

18. A、B、C、D四人买西瓜，已知A、B、C三人平均每人买了95斤，B、C、D三人平均每人买了94斤，C、D、A三人平均每人买了90斤，D、A、B三人平均每人买了91斤西瓜，则A、B、C、D分别买了_____斤西瓜。

19. 在下面的数表中，第100行左边第一个数是_____.

5 4 3 2 第一行

6 7 8 9 第二行

13 12 11 10 第三行

14 15 16 17 第四行

21 20 19 18 第五行

...

20. 已知：两个三位数的差为892（如下面框图所示），那么这两个三位数的和的最小值是_____。

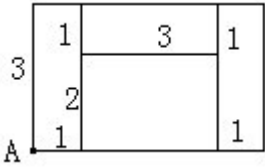
□□□

- □□□

8 9 2

二、解答题：

1. 在一次解放军的野营拉练中，某通讯员为了传达上级指示，必须从A点出发走过下图中所有的路，再回到出发点. 图中的数字表示对应的路线的公里数. 通讯员怎样走才能使所走的路程最短，全程多少公里？



2. 下面算式中不同的字母代表1、2、3、4、5、6、7、8、9、0中的不同的数字，若A=5，请求出它们所对应的数字按A、B、C、D、E、F、G、H、L、I的顺序写出。

A B C D E A

+ F L G D E A

G B H L G I

3. 某中学共30个班级，各班的人数只可能是44、45或46人. 已知全校的学生总人数为1352人，且44人的班级比45人的班级多2个，求这个中学里，44人的班、45人的班、46人的班各有多少个？

习题解答

一、填空题：

1. 88888888。

12345679×72=12345679×9×8=111111111×8

=888888888。

2. 0。

$$\text{原式} = 1992 \times 1993 \times 10001 - 1993 \times 1992 \times 10001 = 0$$

3. a。

这组字母的排列规律为abacbadcb9个一循环, 因此, 第100个字母应与第1个字母相同, 为a。

4. 1992。

观察图形可知, 每层的白色正方形的个数等于层数减1, 因此, 第1993层中有1992个白色正方形。

5. =。

把每个小正方形的边长分别平移到大正方形的四条边上可知, 所有小正方形的周长之和恰等于大正方形的周长。

6. 2。

锯成5段后, 增加的面积等于 $2 \times (5-1)$ 个底面积, 因此, 长方体木块的底面积为 $4 \div 8 = 0.5$ (平方米), 所以, 长方体的体积为 $4 \times 0.5 = 2$ (立方米)。

7. 4。

五位数字之和为42, 则这个五位数中至少有2个9, 至多有4个9. 若有2个9, 则另3个数字只能全为8, 其中能被4整除的数必须末两位数是4的倍数, 因此这样的五位数只有3个。

若有3个9, 则另两个数字之和为15, 只能为8和7, 但这种情况下, 不能被4整除。

若有4个9, 则另一个数只能为6, 因此能被4整除的数只有1个。

综合上述情况可知, 满足条件的五位数共4个。

8. 10。

设这个两位数为 \overline{ab} , 若b为0, 则 $\overline{ab} \div (a+b) = 10$ 若 $b \neq 0$,

$$\text{若 } b \neq 0, \text{ 则 } \overline{ab} \div (a+b) = \frac{10a+b}{a+b} < \frac{10a+10}{a+1} = 10$$

因此, 商的最大值为10。

9. 10。

这是简单的抽屉原理问题, 因此, 至少需摸出 $3 \times (4-1) + 1 = 10$ 个球, 才能保证其中一定有四个球的颜色相同。

10. 10000012340616263...99100。

这个数的数位是固定的, 因此若要使这个数尽可能小, 则必须使其前面的数字尽可能小, 最好为0, 但首位不能为0, 则应保留1, 划去2~9及与9相邻的1, 这样, 这个数的第二位为0, 依次划下去. 当第6个数为0后, 若要使第7个数也为0, 则必须划去 $19 \times 5 + 9 = 104$ 个数, 与题目要求矛盾, 因此第7个数应为1. 同理推得第8、第9、第10个数分别为2、3、4, 第11个数为0. 至此已划完了100个数, 因此,

后面的数为 $\underbrace{61626364 \cdots 99100}_{100 \text{ 个数}}$ 。

11. 14和10。

根据题意容易知道, 男队员比女队员多4人, 因此, 男队员人数为 $(24+4) \div 2 = 14$, 女队员人数为 $24-14=10$.

12. 2000。

因为原1993个数的平均数为2000,所以在第二次求和时,原1993个数的总和必为 2000×1993 .再加上小明混入的平均数2000,正好是 2000×1994 ,所以这1994个数的平均数仍为2000。

13. 2。

这是一个对策问题. A为了保证获胜,第一步必须把棋子向右移动2格,这样,还剩下 $2001-1-2=1998$ 个空格,是6的倍数. 因此,不管B向右移几格, A只要保证向前移动的格数与B移动的格数之和为6,则一定能走到最后一格。

14. 6。

若百位为2,则有两个满足条件的四位数: 1234和1243. 百位为3或4时,同理可知,每种情况下只能有2个,因此共有6个满足条件的四位数。

15. 3334。

$$11112222 = 1111 \times 10002 = 1111 \times 3 \times 3334 = 3333 \times 3334$$

16. 0。

考察这列数被3除的余数:

0, 1, 2, 0, 0, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 0, 1, 0, 1, 2...可知,这列数每13个数一循环. 又因为 $1993 \div 13 = 153 \cdots 4$,因此,第1993个数被3除的余数与第4个数除以3所得的余数相同,为0。

17. 11。

$$\text{男生团员人数} + \text{女生团员人数} = 26 \text{人}$$

$$\text{女生非团员人数} + \text{女生团员人数} = 15 \text{人,}$$

因此,男生团员人数-女生非团员人数=26-15=11人。

18. 88斤、100斤、97斤和85斤。

这是一个平均数问题,设A、B、C、D四人买的西瓜的斤数依次为a、b、c、d. 则 $(a+b+c) \div 3 = 95$, $(b+c+d) \div 3 = 94$, $(c+d+a) \div 3 = 90$, $(d+a+b) \div 3 = 91$ 所以把四个式子相加可得 $a+b+c+d=370$ (斤)。

$$\therefore d = (a+b+c+d) - (a+b+c) = 370 - 95 \times 3 = 85 \text{ (斤)}$$

$$\text{同理 } a=88 \text{斤 } b=100 \text{斤 } c=97 \text{斤}$$

19. 398。

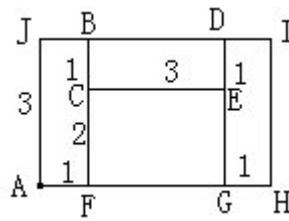
因为每行4个数,所以前99行共有 $99 \times 4 = 396$ 个数,又因为这个数表中最开始的最小的一个数为2,所以依数列的排列规律可知第100行的左边第1个数为 $396+1+1=398$ 。

20. 1092。

由图易知,被减数和减数的百位只能分别为9和1,十位只能分别为9和0,则被减数的个位数字减去减数的个位数字得2,又因为题目要求它们的和最小,所以这两个数应为992和100,它们的和为1092。

二、解答题:

1. 解: 因为图中有6个奇点,所以必须走三段重复路径. 根据路线图和简单计算可知,当通讯员走重复路径BC、DE、FG时,他所走的重复路径最短,因此,通讯员所走的全程为:



[(1+3+1+3) × 2 + (2+1) × 2 + 3] + (1+1+3) = 30 (公里) 走法不惟一, 如:

A → H → I → D → G → F → C → E → D → B → C → B → J → A.

$$\begin{array}{r} 5BCDE5 \\ +FLGDE5 \\ \hline GBHLG0 \end{array}$$

2. 如图, $\because A=5, \therefore I=0$. 则 $L \neq 0$, 观察算式的第2列可知 $L=9$; 由第4列可知 $D=4$; 这时 $2E+1=10+G$, $5+1+F=G$, 因此 G 只能为 7, $F=1$, $E=8$; 这时由第3列可知 $C+7=10+H$, 所以 $C=6$, $H=3B=2$. 则 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 L 、 I 的值依次为: 5、2、6、4、8、1、7、3、9、0, 算式为:

$$\begin{array}{r} 526485 \\ +197485 \\ \hline 723970 \end{array}$$

3. 解: 设 45 人的班级有 x 个, 则 44 人的班级和 46 人的班级分别有 $x+2$ 个和 $30-(x+x+2)=28-2x$ 个。

因此: $44(x+2)+45x+46 \times (28-2x)=1352$

则 $x=8$ $x+2=10$ $28-2x=12$

\therefore 这个学校中 44 人的班、45 人的班、46 人的班依次分别有 10 个、8 个和 12 个。