

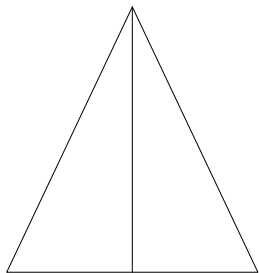
与“线段中点”有关的几何问题探究

学而思中考研究中心 王杨

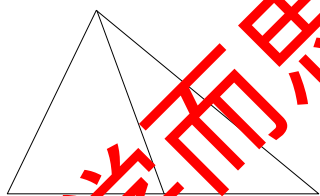
在中考几何证明题与求解题中，我们经常遇到与线段中点有关的问题，线段的中点是几何图形中一个非常特殊的点，它关联着三角形中线、直角三角形斜边中线、三角形中位线、梯形中位线以及中心对称图形等丰富的知识，和不同的图形搭配会有不同的用法，其中还有不少问题需要通过构造“新图形”，才能建立已知与未知之间的联系，因此，恰当地利用中点、处理中点是解与中点有关问题的关键。那么，如何运用中点位置的特殊性解题呢？

首先，在基本图形中看到中点应该想到什么？

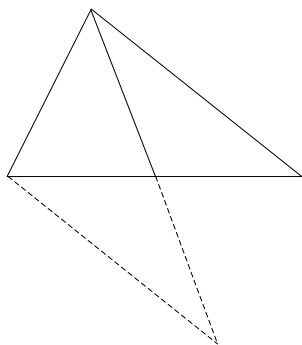
1. 两条线段相等，为全等提供条件



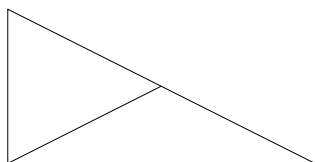
2. 中线平分三角形的面积



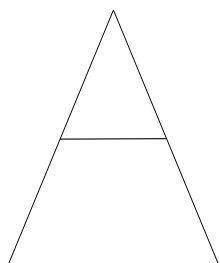
3. 倍长中线



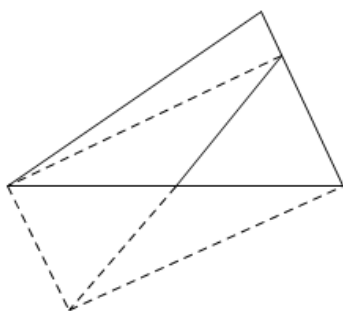
4. 直角三角形斜边中线是斜边一半



5. 中位线



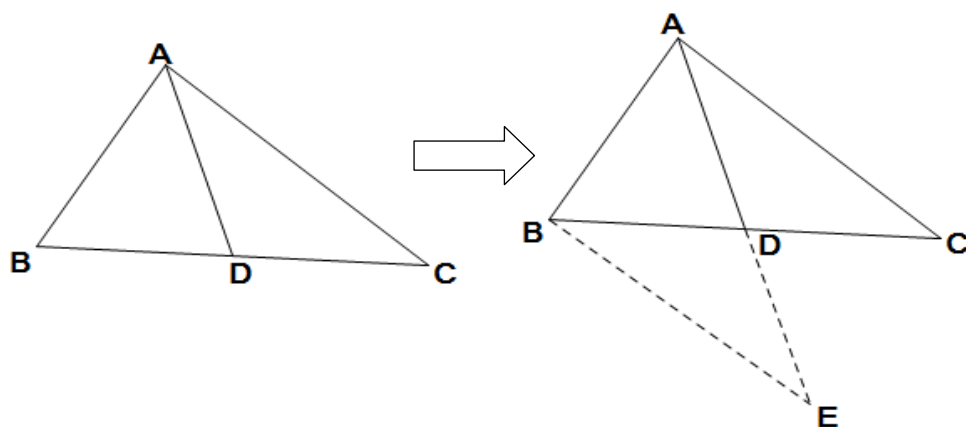
6. 中心对称性



当对基本模型非常熟悉之后，下面就其中的几个最为典型的题型做简单的归纳，重点介绍做辅助线的思路。

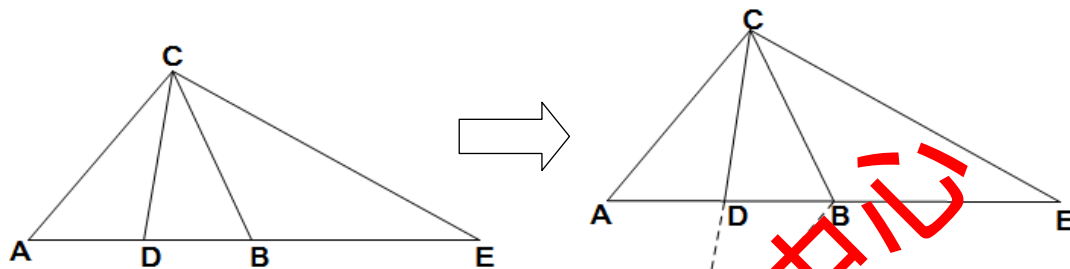
一、有中点，倍长中线

1. 已知：如图， AD 为 $\triangle ABC$ 中线，求证： $AB + AC > 2AD$



【解析】本题属于基本题目，见到三角形一边上中线，首选的做辅助线的方法即为将中线倍长，并且题目中有强烈的信号，即求证中出现 $2AD$ ，所以倍长 AD 。通过证明 $\triangle ADC \cong \triangle BDE$ 将目标线段转移到同一三角形中，进而利用基本定理将此题解答出来。

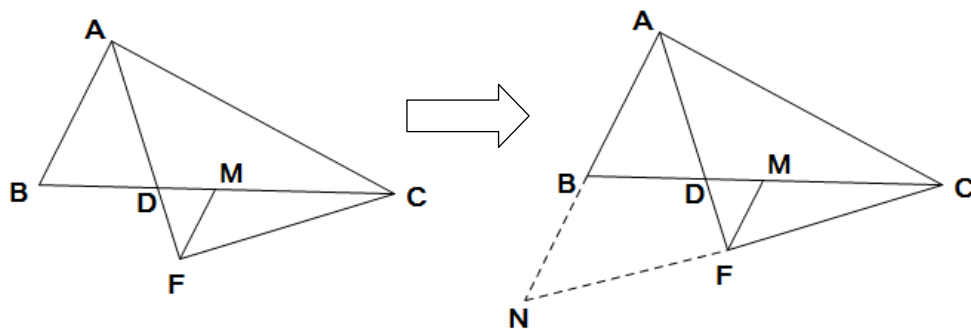
2. 已知：如图， CB 、 CD 分别是钝角 $\triangle AEC$ 和锐角 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AC = AB$ 。求证： $CE = 2CD$ 。



【解析】本题难度稍大，出现了两条中线，因此在倍长的选取上需要做一个选择，通过再次分析已知条件，发现倍长中线 CD ，会直接得到求证中的 $2CD$ 。故延长 CD 至点 F ，使 $DF = CD$ ，则由 $\triangle ADC \cong \triangle BDF$ 可得 $AC = BF = BE$ ，倒角得到 $\angle CBF = \angle CBE$ 后再证一次 $\triangle CBF \cong \triangle CBE$ 即可得到 $CE = 2CD$ 。

二、有中点，造中位线

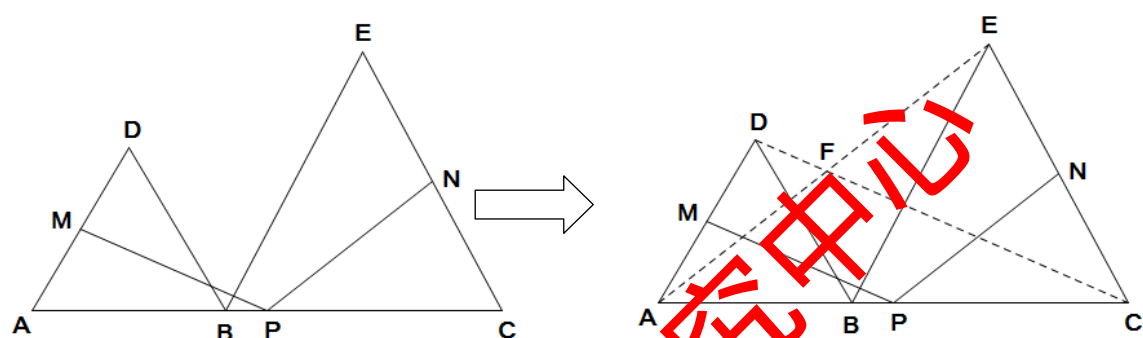
1. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AC > AB$ ， M 为 BC 的中点， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，若 $CF \perp AD$ 且交 AD 的延长线于 F ，求证： $MF = \frac{1}{2}(AC - AB)$



【解析】若所遇题目中涉及的中点并不能够形成三角形的中线时，还有另外一种常见的辅助线的做法就是构造三角形的中位线，此时与中点相连接的点的使用就显得十分重要了，要将

此点人为构造中点，此题又应用了等腰三角形三线合一的知识点，两个知识点相叠加，题目难度比较大。 AF 既是 $\angle BAC$ 的平分线，又成为新构造的等腰 $\triangle ACN$ 的高，所以点 F 为 CN 的中点，进而 MF 为 $\triangle ABN$ 的中位线，最终利用三角形中位线的性质将此题解出。

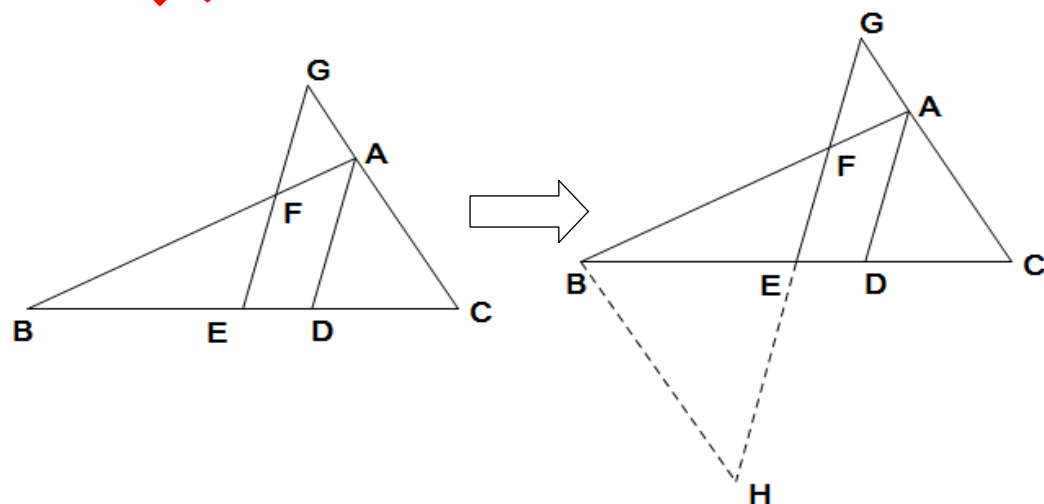
2. 如图，点 B 为 AC 上一点，分别以 AB 、 BC 为边在 AC 同侧作等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle BCE$ ，点 P 、 M 、 N 分别为 AC 、 AD 、 CE 的中点。(1) 求证： $PM = PN$ 。(2) 求 $\angle MPN$ 的度数。



【解析】本题中有 P 、 M 、 N 三个中点，在选择连接辅助线时自然就想到涉及中点较多的中位线这一知识点，故连接 AE 和 DC 并交于点 F ，此时根据中位线性质， $PM = \frac{1}{2}CD$ ， $PN = \frac{1}{2}AE$ ，那么此时只需要证明 $CD = AE$ 即可。证明两条线段相等，就可以选用证全等三角形的方法，证明 $\triangle ABE \cong \triangle DBC$ ，此题即可得证。

三、有中点，构造中心对称图形

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ ， E 为 BC 边的中点， AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，过 E 作 AD 的平行线，交 AB 于 F ，交 CA 的延长线于 G 。求证： $BF = CG$ 。



【解析】本题难度较大，在分析题目的时候并不能够找到三角形的中线，并且中点条件比较少，只有一个，也无法构造中位线。这样以上两种常见的辅助线就不能够帮助我们解决这道题目了。本题的方法是利用中点的特性，将题中部分图形绕中点旋转 180° ，构造中心对称图形求解。但需注意的是：本题的辅助线做法是将 GE 延长一倍至 H ，并连接 BH ，已达到将 $\triangle CEG$ 绕点 E 旋转 180° 的效果。通过倒角求证 $BF = BH$ ，再通过证 $\triangle CEG \cong \triangle BEH$ 得到 $BH = CG$ ，最终将此题求解。

总结：通过本专题的研究，帮助同学们解决在见到题目条件中出现中点时，应该想到的几种非常常见的做辅助线方法，进而通过比较固定的思路解答大部分的“中点”问题。

学而思中考研究中心