



## 提高篇

1. 若四位数  $\overline{9a8a}$  能被 15 整除, 则  $a$  代表的数字是多少?

【解析】因为  $15=3 \times 5$  且  $(3, 5)=1$ , 所以  $15 \mid \overline{9a8a}$  相当于  $5 \mid \overline{9a8a}$  且  $3 \mid \overline{9a8a}$ ; 根据  $5 \mid \overline{9a8a}$  可知  $a=0$  或  $5$ ; 若  $a=0$ ,  $\overline{9a8a}$  的各位数字之和为  $9+0+8+0=17$ , 不能被 3 整除, 所以排除; 若  $a=5$ ,  $\overline{9a8a}$  的各位数字之和为  $9+5+8+5=27$ , 能被 3 整除, 所以  $3 \mid \overline{9a8a}$ , 符合条件要求。

【答案】 $a=5$

2. 三位数的百位、十位和个位的数字分别是 5,  $a$  和  $b$ , 将它连续重复写 2009 次成为:

$\underbrace{5ab5ab \cdots 5ab}_{2009 \text{ 个 } 5ab}$ . 如果此数能被 91 整除, 那么这个三位数  $\overline{5ab}$  是多少?

【解析】因为  $91 \mid 1001$  并且  $\overline{5ab5ab} = 100 \times \overline{5ab}$ , 所以  $91 \mid \overline{5ab5ab}$ . 又由已知条件  $91 \mid \underbrace{5ab5ab \cdots 5ab}_{2009 \text{ 个 } 5ab}$ , 所以  $91 \mid \overline{5ab}$ , 那么估算易知  $91 \times 6 = 546$ .

【答案】这个三位数是 546。

3. 两个四位数  $\overline{A275}$  和  $\overline{275B}$  相乘, 要使它们的乘积能被 72 整除, 求  $A$  和  $B$ .

【解析】根据题意  $72 \mid (\overline{A275} \times \overline{275B})$ , 又  $72=8 \times 9$  且  $(8, 9)=1$ , 所以  $8 \mid (\overline{A275} \times \overline{275B})$ . 因为  $\overline{A275}$  是奇数不能被 2 整除, 所以  $8 \mid \overline{275B}$ , 试除易知  $B=2$ , 此时  $2+7+5+2=16$ , 不是 3 的倍数, 所以  $9 \mid \overline{A275}$ , 即  $9 \mid (A+2+7+5)$ , 因为  $0 \leq A \leq 9$ , 所以只有  $A=4$  时符合要求。

【答案】 $A=4, B=2$

4. 六位数  $20\square\square08$  能被 49 整除,  $\square\square$  中的数是多少?

【解析】面对这类整除问题一般采用“位值原理”分析. 设六位数为  $\overline{20ab08}$ ,  $\overline{20ab08} = 20 \times 10000 + \overline{ab00} + 8 = 200008 + \overline{ab00}$ . 这个数能被 49 整除. 而  $200008 \div 49 = 4081 \cdots 39$ , 余 39 也可以看成不足  $49 - 39 = 10$ . 所以当  $\overline{ab00} = 10 + 49n$  时, 即  $\overline{ab00}$  是 100 的倍数时, 六位数才是 49 的倍数. 所以有  $49n$  的末位只能是 0, 所以  $n$  只能是 10, 20, 30... 验证有  $n = 10$  或 110 时,  $10 + 49n = 10 + 49 \times 10 = 500$  或  $10 + 49n = 10 + 49 \times 110 = 5400$ , 所以原题的方框中填入 0 和 5, 或填入 5 和 4, 得到的六位数为 200508 或 205408 满足题意.

【答案】05 或 54

【巧思】这个题目我们可以不用写这么复杂的讨论过程, 直接用一个竖式代表所有的过程, 也就是使用“试除法”. 根据竖式计算 (见右式) 可知, 方框中应该填的数字是  $99 - 45 = 54$  或  $99 - 94 = 05$ . 此处竖式试商时, 顺序很重要, 是先商的个位和十位, 然后商千位, 最后商百位.

$$\begin{array}{r} 4192 \\ 49 \overline{) 209908} \\ \underline{20981} \phantom{00} \\ 98 \\ \underline{94} \phantom{00} \\ 441 \\ \underline{441} \phantom{00} \\ 2054 \\ \underline{2054} \phantom{00} \\ 196 \\ \underline{196} \phantom{00} \\ 94 \\ \underline{94} \phantom{00} \\ 49 \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 45 \end{array}$$

## 5. 用数字 6, 7, 8 各两个, 组成一个六位数, 使它能被 168 整除. 这个六位数是多少?

【解析】因为  $168 = 8 \times 3 \times 7$ , 所以 3、7、8 都能整除这个六位数. 因为  $(6+7+8) \times 2 = 42$ , 所以这个六位数必能被 3 整除. 要验证这个数能否被 8 整除只需看末三位, 末三位能被 8 整除的组合有 688、768、776. 若末三位是 688 可能的数有 776688、767688、677688 都不能被 7 整除; 若末三位是 776 可能的数有 688776、868776、886776 都不能被 7 整除; 若末三位为 768, 那可能的数有 678768、687768、768768、786768、876768、867768 其中只有 768768 能被 7 整除, 这个数即为所求.

【答案】768768

【反思】这个题目如果从  $1001 = 7 \times 11 \times 13$  且  $1001 \times \overline{abc} = \overline{abcabc}$  这个性质入手, 可以猜测答案只在 678678、768768、786786、876876 中产生验证只有 768768 是 8 的倍数, 从而得到答案. 但是这个做法严密性欠佳, 作为解答题的答案会扣除一定的过程分.