



提高篇

1. 三位数的百位、十位和个位的数字分别是 5, a 和 b , 将它连续重复写 2009 次成为:

$\overbrace{5ab5ab\cdots 5ab}^{2009\text{个}5ab}$. 如果此数能被 91 整除, 那么这个三位数 $5ab$ 是多少?

【解析】因为 $91 \mid 100$ 并且 $\overline{5ab5ab} = 100 \times \overline{5ab}$, 所以 $91 \mid \overline{5ab5ab}$. 又由已知条件 $91 \mid \overbrace{5ab5ab\cdots 5ab}^{2009\text{个}5ab}$, 所以 $91 \mid \overline{5ab}$, 那么估算易知 $91 \times 6 = 546$.

【答案】这个三位数是 546.

2. 在六位数 $11\square\square 11$ 中的两个方框内各填入一个数字, 使此数能被 17 和 19 整除, 那么方框中的两位数是多少?

【解析】面对这类整除问题一般采用“位值原理”分析. 设六位数为 $\overline{11ab11}$, $\overline{11ab11} = 11 \times 10000 + \overline{ab00} + 11 = 110011 + \overline{ab00}$. 如果一个数能同时被 17 和 19 整除, 那么一定能被 323 整除. $110011 \div 323 = 340 \cdots 191$, 余 191 也可以看成不足 $323 - 191 = 132$. 所以当 $\overline{ab00} = 132 + 323n$ 时, 即 $\overline{ab00}$ 是 100 的倍数时, 六位数才是 323 的倍数. 所以有 $323n$ 的末位只能是 $10 - 2 = 8$, 所以 n 只能是 6, 16, 26, ... 验证有 $n = 16$ 时, $132 + 323 \times 16 = 5300$, 所以原题的方框中填入 5, 3 得到的 115311 满足题意.

【答案】53

【巧思】这个题目我们可以不用写这么复杂的讨论过程, 直接用一个竖式代表所有的过程, 也就是使用“试除法”. 根据竖式计算 (见右式) 可知, 方框中应该填的数字是 $99 - 46 = 53$.

$$\begin{array}{r} 357 \\ 323 \overline{) 119911} \\ \underline{2261} \\ 11765 \\ \underline{1615} \\ 1015 \\ \underline{969} \\ 46 \end{array}$$

3. 使得 $10^n - 1$ 是 63 的倍数的最小正整数 n 是_____.

【解析】 $63 = 9 \times 7$, $10^n - 1$ 肯定是 9 的倍数, 所以只要考虑 7 的倍数就可以了. 考虑到 111111 是 7 的倍数, $10^6 - 1 = 999999$, 所以最小的 n 是 6.

【答案】6

4. 称一个两头（首位与末尾）都是1的数为“两头蛇数”。一个四位数的“两头蛇数”去掉两头，得到一个两位数，它恰好是这个“两头蛇数”的约数。这个“两头蛇数”是_____。（写出所有可能）

【解析】去掉头尾后的两位数必为1001的约数。 1001 的两位数的约数有11，13，77，91，所有可能的数为1111，1131，1771，1911。

【答案】所有可能的数为1111，1131，1771，1911

5. $201 \times 202 \times 203 \times \cdots \times 300$ 的结果除以10，所得到的商再除以10……重复这样的操作，在第_____次除以10时，首次出现余数。

【解析】在201到300中2的质因数个数多于5的质因数个数，所以乘积末尾“0”的个数与5的质因数个数相同。

201到300这100数中5的倍数有 $\left[\frac{300}{5} \right] - \left[\frac{200}{5} \right] = 20$ 个，25的倍数有 $\left[\frac{300}{25} \right] - \left[\frac{200}{25} \right] = 4$

个，125的倍数有 $\left[\frac{300}{125} \right] - \left[\frac{200}{125} \right] = 2 - 1 = 1$ 个，所以质因数5共有 $20 + 4 + 1 = 25$ 个。那么除

以25次10，恰好能整除，再多除一次就会出现余数。所求为 $25 + 1 = 26$ 次。

【答案】26