



关节二 充分发挥方程的工具性作用

方程是重要的数学工具，它可以干什么用呢？结论是：

凡是有关“求值”的问题，不管是怎样的背景下和情境中，绝大多数情况都可以借助构造方程来解决。

一、方程用于实际问题中的求值

这方面的题目，同学们做的已经很多，这里只举一例。

例 1 秋末，由于冷空气入侵，某地区地面气温急剧下降到 0°C 以下的天气称为“霜冻”。由霜冻所导致的植物生长受到影响或破坏的现象称为霜冻灾害。

秋末某天，气象台发布了该地区如下的降温预报：午夜 0 时至次日 5 时气温将匀速地由 3°C 降到 -3°C ，然后从次日 5 时至次日 8 时，气温将又匀速地由 -3°C 升到 5°C ，一种农作物在 0°C 以下持续超过 3 小时就会造成霜冻灾害，根据气象台的预报信息，你认为是否有必要对该农作物采取防冻措施？并说明理由。

【观察与思考】

第一，这实际是要求出两个数值：一是 0 时至次日 5 时气温下降过程中在哪个时刻达到 0°C ；二是在次日 5 时至次日 8 时气温上升过程中，在哪个时刻达到 0°C ，显然是求值总问题。应分别构造方程来解决。

第二，可以用“匀速”所包含的“相等关系”来导出方程，即

$$\frac{\text{时刻1对应的温度}-\text{时刻2对应的温度}}{\text{时刻1}-\text{时刻2}} = \frac{\text{时刻3对应的温度}-\text{时刻2对应的温度}}{\text{时刻3}-\text{时刻2}}$$

（事实上，只要把本问题的“温度差”看作“路程”，它就相当于行程问题了。）

简解：设在 0 时至次日 5 时之间的 x 时，气温降到 0°C ，则依题意有：

$$\frac{-3-3}{5-0} = \frac{0-3}{x-0}, \text{解得 } x = 2.5 \text{ (时)}$$

设在次日 5 时至次日 8 时之间的 y 时气温升到 0°C ，依题意有：

$$\frac{5-(-3)}{8-5} = \frac{5-0}{8-y}, \text{解得 } y = 6.125 \text{ (时)}$$

$$6.125 - 2.5 = 3.625.$$

气温在 0°C 以下的时间为 3.625 小时（大于 3 小时）因此，会对该农作物造成霜冻灾害，所以应对它采取防冻措施。

二、方程用于数学问题中的价值



数学问题中有形形色色或显或隐的求值问题，大都可借助方程来解决。

1、借助方程，解决某些“数与式”的问题

例 1 如果一个正整数能表示为两个连续偶数的平方差，那么，称这个正整数为“神秘数”。如：

$$4 = 2^2 - 0^2, 12 = 4^2 - 2^2, 20 = 6^2 - 4^2, \text{ 因此 } 4, 12, 20 \text{ 这三个数都是神秘数,}$$

(1) 28 和 2008 这两个数是神秘数吗？为什么？

(2) 两个连续奇数的平方差（取正数）是神秘数吗？为什么？

【观察与思考】根据题中规定知道，若 $m = (2x+2)^2 - (2x)^2$ (※)，(其中 x 是整数， m 为正整数)，则 m 就是“神秘数”。正整数 m 是不是“神秘数”，就看使 (※) 式成立的整数 x 是不是存在，存在时 m 就是“神秘数”；不存在， m 就不是“神秘数”。这就是说，研究 m 是不是“神秘数”的问题，就变成了研究 (※) 这个关于 x 的方程有无整数解的问题。

解：(1) $\because$ 方程 $(2x+2)^2 - (2x)^2 = 28$, 有非负整数解 3。即 $28 = (2 \times 3 + 2)^2 - (2 \times 3)^2 = 8^2 - 6^2$

$\therefore 28$ 是神秘数。

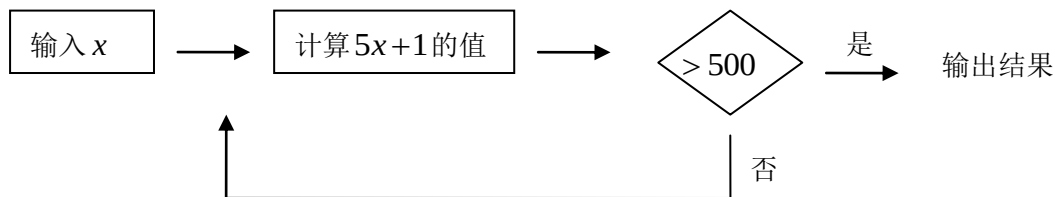
$\because$ 方程 $(2y+2)^2 - (2y)^2 = 2008$, 没有整数解， $\therefore 2008$ 不是神秘数。

(2) $(2n+3)^2 - (2n+1)^2 = 8n+8$ (n 为非负整数)，

令 $(2z+2)^2 - (2z)^2 = 8n+8$ 解得 $z = n + \frac{1}{2}$, 显然 z 不是整数。

$\therefore$ 两个连续奇数的平方差（取正数）不是神秘数。

例 2 按下面的程序计算，若开始输入的值 x 为正数，最后输出的结果为 656，则满足条件的 x 的不同值最多有 ()



A、2 个

B、3 个

C、4 个

D、5 个

【观察与思考】本题相当于按如下规律构造的方程：

$$5x+1=656, 5(5x+1)=656, 5[5(5x+1)+1]+1=656,$$

$5\{5[5(5x+1)+1]+1\}+1=656, \dots$ 有正整数解的共有多少个。可验证只有上述 4 个方程有正数解。

解：选 C。



对于许多有关特定要求的数，式问题，常需要借助方程来解决。

2、借助方程，解决某些几何图形的求值问题

例 3 图 1 是由 9 个等边三角形拼成的六边形，若已知中间的小等边三角形的边长为 a ，则六边形的周长是

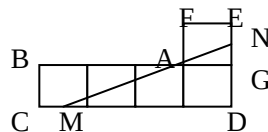
【观察与思考】拼成六边形的 9 个等边三角形按大小共分为 5 类，从大到小边长逐减小 a ，因此，可通过构造最大的等边三角形的边长的方程来求得它的值。

从图 2 中可以看到最大三角形的边长是第四大三角形边长的 2 倍，易如：设最大的等边三角形的边长为 x ，则有 $x = 2(x - 3a)$ ，解得 $x = 6a$ 。

图中六边形的六条边依次为： $6a, 5a, 5a, 4a, (4a + 3a), 3a$ 。

解： $30a$

例 4 如图，这是由五个边长为 1 的正方形组成的图形，过顶点 A 的一条直线和 CD，ED 分别相交于点 M，N。假若直线 MN 绕过 A 旋转的过程中存在某一位置，使得 MN 将图形分成的两部分面积恰好相等，求这时线段 EN 的长。



【观察与思考】可借助 $S_{\triangle MND} = \frac{5}{2}$ 来构造关于 EN 的方程求其长。

$$\text{解：} S_{\triangle MND} = \frac{1}{2} AG \cdot NG = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - EN) = \frac{1 - EN}{2}.$$

$$\therefore Rt\triangle MND \sim Rt\triangle AGN, \text{ 且 } \frac{ND}{NG} = \frac{2 - EN}{1 - EN}$$

$$\therefore S_{\triangle MND} = \left(\frac{2 - EN}{1 - EN}\right)^2 \cdot S_{\triangle AGN} = \frac{(2 - EN)^2}{(1 - EN)^2} \cdot \frac{1 - EN}{2} = \frac{(2 - EN)^2}{2(1 - EN)}$$

$$\text{得关于 EN 的方程 } \frac{(2 - EN)^2}{2(1 - EN)^2} = \frac{5}{2}, \text{ 即 } EN^2 + EN - 1 = 0$$

$$\text{解得 } EN_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, EN_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (不合题意, 舍去)}. \therefore EN \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

许多图形的求值问题，可借助方程来解决，事实上，包括解直角三角形和用相似三角形的性质求边长，也是特定形式的方程，是方程思想的一种具体化表现。

3、借助方程，解决函数相关的问题



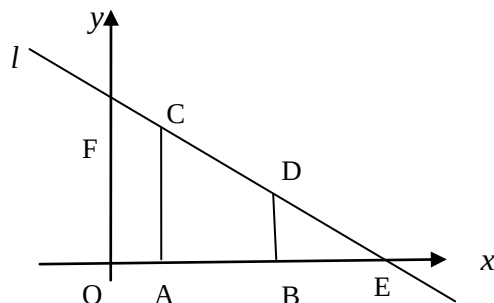
例5 如图，在平面直角坐标系中，直线 l 与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴分别交于点 E 和 F 。从点 $A(1, 0)$ 和

$B(3, 0)$ 作 x 轴的垂线，分别与直线 l 交于点 C 和点 D 。已知 $S_{\text{四边形}OACF} = \frac{11}{4}$ ， $S_{\text{四边形}ABDC} = 4$ ，求直线 l 的解析式。

【观察与思考】若设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$ 。现在要求出

k 和 b 的值，为此去构造关于 k 和 b 的方程组。而所给条件

“ $S_{\text{四边形}OACF} = \frac{11}{4}$ ， $S_{\text{四边形}ABDC} = 4$ ”就是这两个方程组所依据的等量关系。



解：设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$ ，易知：

$OF = b$ ， $AC = k + b$ ， $BD = 3k + b$ ， $OA = 1$ ， $AB = 2$ ，依题意有方程组：

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times 1 \times (b + k + b) = \frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \times 2 \times (k + b + 3k + b) = 4 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 l 的解析式为： $y = -\frac{1}{2}x + 3$

例6 早晨，小丽与妈妈同时从家出发，步行与骑自行车到方向相反的两地上学与上班，图中所示是她们离家的路程 y （米）与时间 x （分）的函数图象。妈妈骑自行车走了10分钟接到小丽的电话，即以原速度骑车前往小丽的学校，并与小丽同时到达学校。已知小丽步行速度为每分50米，求小丽家与学校的距离及小丽早晨上学需要的时间。

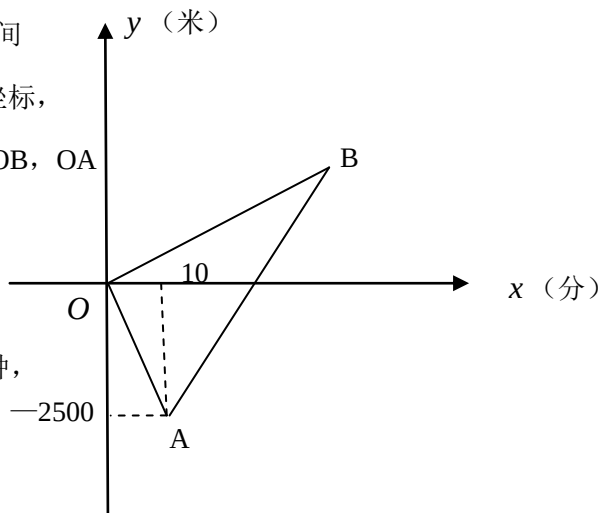
【观察与思考】点 B 的横坐标就是小丽早晨上学需要的时间，其纵坐标就是小丽家与学校的距离。本题的实质是求点 B 的坐标，也就是由 OB ， AB 确定的函数关系式做成的方程组的解。而 OB ， OA 对应的函数易知。

解： OB 对应的函数关系式为： $y = 50x$ 。

因为妈妈10分钟骑自行车走了2500米，其速度为250米/分钟，

所以， AB 对应的函数关系式为： $y = 250x + b$

将 $(10, 2500)$ 代入，求得 $b = -5000$ ， $\therefore y = 250x - 5000$





$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = 50x \\ y = 250x - 5000 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x = 25 \\ y = 1250 \end{cases}$$

∴ 小丽家与学校的距离为 1250 米，小丽早晨上学需要 25 分钟。

【说明】本题是将方程的思想和函数图象的意义紧密结合，才有如此简明的解决方法。

许多和函数相关的问题，只要涉及到求值，常需要考虑借助方程。

4、和运动有关的图形问题，凡属运动过程中的特定形状，特定数量以及特定位置关系的，大都需要借助构造方程来解决

例 7 如图，在梯形 ABCD 中，AD//BC， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 14\text{cm}$ ， $AD = 15\text{cm}$ ， $BC = 21\text{cm}$ ，点 M 从点 A 开始沿 AD 边向 D 点运动，速度为 1 厘米/秒，同时点 N 从点 C 开始沿 CB 向点 B 运动，速度为 2 厘米/秒，设运动的时间为 t 秒。

(1) 当 t 为何值时，四边形 MNCD 是平行四边形？

(2) 当 t 为何值时，四边形 MNCD 是等腰梯形？

【观察与思考】对于 (1)，当四边形 MNCD 是平行四边形时， $MD = NC$ ，就以这一相等关系构造关于 t 的方程。

对于 (2)，画出四边形 MNCD 是等腰梯形的草图，如图 (2)，作 $MG \perp BC$ ，垂足为 G，作 $DH \perp BC$ ，垂足为 H，此时应有 $NG = CH$ ，也即 $CN = MD + 2CH$ 。可以用这一相等关系的构造关于 t 的方程来求解。

解：(1) $MD = 15 - t$ ， $CN = 2t$ ，令 $MD = NC$ ，得 t 的方程

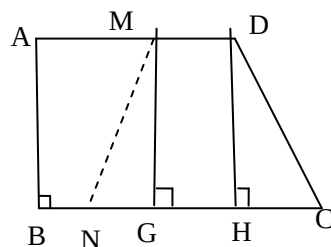
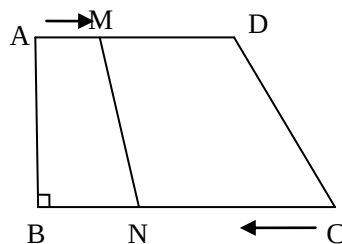
$$15 - t = 2t \quad \text{解得 } t = 5$$

即 $t = 5$ (秒) 时四边形 MNCD 是平行四边形。

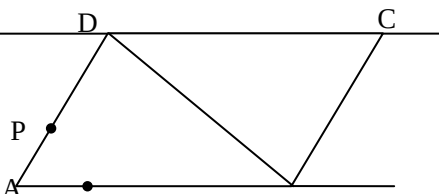
(2) $CB - AD = 6\text{cm}$ ，令 $CN = MD + 2 \cdot (CB - AD)$ ，得关于 t 的方程

$$2t = 15 - t + 2 \times 6 \quad \text{解得 } t = 9$$

即 $t = 9$ (秒) 时，四边形 MNCD 是等腰梯形。



例 8 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，点 P 和点 Q 同时从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度运动，点 P 沿 $AD \rightarrow DC \rightarrow CB$ 向点 B 运动，点 Q 沿射线 AB 的方向运动。当点 P 运动到点 B 处时，两点的运动同





时结束。设运动时间为 t 秒。

(1) 当点 P 在边 AD 上运动时, 求使 $\triangle DPQ$ 成为以 DQ 为底边的等腰三角形的时刻 t ;

(2) 当点 P 在边 DC 上运动时, 是否存在时刻 t , 使线段 PQ 和对角线 BD 互相平行? 若存在, 请求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 当点 P 在边 CB 上运动时, $\triangle PBQ$ 可能成为直角三角形吗? 写出你的判断, 并说明理由;

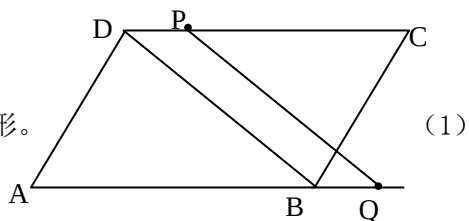
【观察与思考】以上三个问题, 实际都归于建立关于 t 的方程来解决。

解: (1) 点 P 在边 AD 上运动时, $0 < t \leq 3$ 。总有 $\triangle PAQ$ 为等边三角形, 即 $PQ = AP = AQ = t$ 。

令 $PD=PQ$, 即 $3-t=t$, 解得 $t=\frac{3}{2}$ 。

$\therefore$ 当 $t=\frac{3}{2}$ (秒) 时, $\triangle DPQ$ 是以 DQ 为底边的等腰三角形。

(2) 当点 P 在边 DC 上运动时, $3 \leq t \leq 7$ 。



若有 $PQ \parallel BD$, 则四边形 $DBQP$ 为平行四边形, 即 $PD=BQ$, 如图(1), 也即 $t-3=t-4$, 该方程无解。

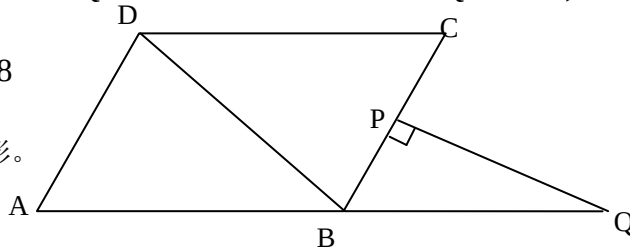
$\therefore$ 不存在这样的时刻 t , 使 $PQ \parallel BD$ 。

(3) 点 P 在边 CB 上运动时, $7 \leq t \leq 10$

若 $\triangle PBQ$ 为直角三角形, 只有 $\angle BPQ = 90^\circ$ 如图(2), 此时 $\angle BQP = 30^\circ$, 即 $BP = \frac{1}{2} BQ$ 。

令 $10-t = \frac{1}{2}(t-4)$, 解得 $t=8$

$\therefore$ 当 $t=8$, $\triangle PBQ$ 为直角三角形。



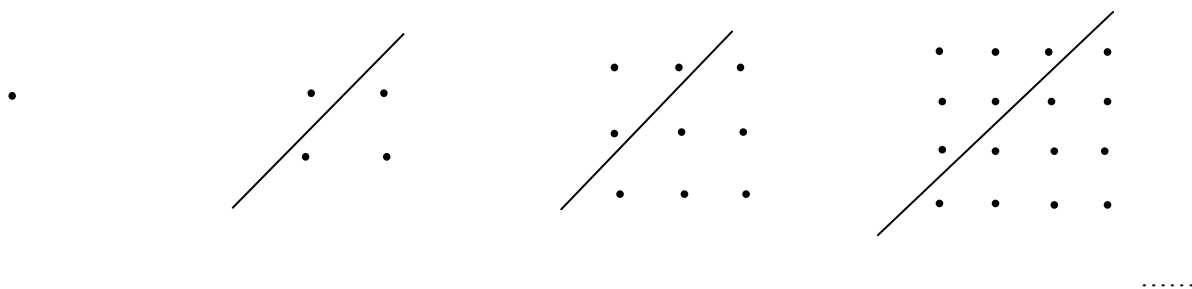
(2)



运动中变化着的图形或图形关系凡属“特殊图形”、“特定关系”、“特殊存在”类的问题，大都可构造相应的方程来解决。

5、借助方程解决某些探索性问题

例 9 如图，每个正方形点阵均被一直线分成两个三角形点阵，根据图中提供的信息，用含 n 的等式表示第 n 个正方形点阵中的规律是_____。



$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$3 + 6 = 3^2$$

$$6 + 10 = 4^2$$

.....

【观察与思考】不难发现这样的规律：第 n 个点阵点的总数为 n^2 ，被分成的两部分有关系：下边部分比上边部分多 n 个点。如此一来，可用构造方程来确定要求的规律：

设第 n 个正方形点阵分成的两部分是 x 个点， $(x+n)$ 个点，则

$$x + (x + n) = n^2$$

解得 $x = \frac{n^2 - n}{2}, n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$

解：应填： $\frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 + n}{2} = n^2$ 。

例 10 欣赏下列的等式：

$3^2 + 4^2 = 5^2, 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ 写出一个由 7 个连续整数组成，前 4 个数的平方和等于后 3 个数的平方和的等式为：_____；

【观察与思考】关键是如何既简练又确切地表示“7 个连续整数”，考虑到要计算“平方和”，那么最好的方



法是，设 n 为整数，则 7 个连续整数表示为： $n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$. 如此一来，可借助方程求出满足要求的 n 和 7 个整数来。设有

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

$$\text{则 } n^2 = [(n+1)^2 - (n-1)^2] + [(n+2)^2 - (n-2)^2] + [(n+3)^2 - (n-3)^2]$$

$$\text{即 } n^2 = 12n + 8n + 4n, \text{ 解得 } n = 24$$

$$\text{解: } \underline{21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2} \quad .$$

【说明】某些探索性问题，用方程来解决更准确、更迅速。关键是要善于发现问题有无构造方程的条件，以及如何恰当地应用方程。

其实，方程的作用远不止这些。

由上可知，必须确立如下的深刻认识：

1、对于求未知数量值的问题，不管是具有实际背景的，还是纯数学的；不管是代数方面的，还是几何图形方面的；不管是显性的，还是较为隐含的，第一条思考解决的途径都应当是考虑“构造方程”和解方程。

2、列出方程的关键是在深入分析题目情景后捕捉到“事关全局的相等关系”，以它为基础再具体化为方程。

如上的深刻认识和有效的落实，才是“方程思想”的深刻表现，才能真正发挥方程的工具性作用。

练习题

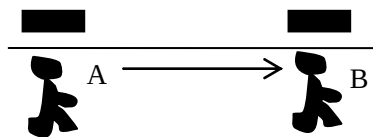
1、某水果批发市场香蕉的价格如下表：

购 买 香蕉数 (千 克)	不 超过 2 0 千克	20 千 克 以上且 不 超 过 40 千克	40 千 克以上
每 千 克价格	6 元	5 元	4 元

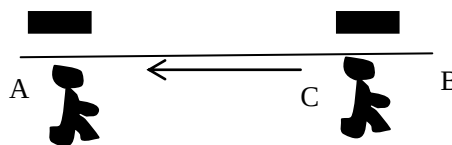
某人共两次购买 50 千克香蕉（第二次多于第一次），共付款 264 元，请问他第一次，第二次分别购买香蕉多少千克？



2、某人在电车路轨旁与路轨平行的路上骑车行走，他留意到每隔 6 分钟有一部电车从他后面驶向前面，每隔两分钟有一部电车从对面驶向后面。假设电车和此人行驶的速度都不变（分别为 v_1, v_2 表示），请你根据右面的示意图，求电车每隔几分钟（用 t 表示）从车站开出一部？



人车同向示意图



人车异向示意图

3、为确保信息安全，信息需要加密传输，发送方将明文加密为密文传输给接收方，接收方收到密文后解密还原为明文，已知某种加密规则为：明文 a, b 对应的密文为 $a - 2b, 2a + b$ 。例如，明文 1, 2 对应的密文是 -3, 4。那么当接收方收到的密文是 1, 7 时，解密得到的明文是（ ）

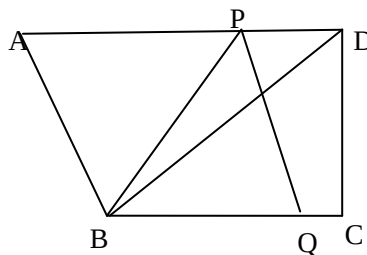
- A、 -1, 1 B、 1, 3 C、 3, 1 D、 1, 1

4、直线 $y = -2x + m$ 与 x 轴分别交于点 A 和点 B，若直线 AB 的长度等于 $4\sqrt{5}$ ，求直线的解析式，并在直角坐标系中画出它的图象。

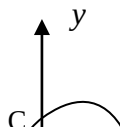
5、如图，在直角梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 16$ ， $DC = 12$ ， $AD = 21$ 。动点 P 从点 D 出发，沿射线 DA 的方向以每秒 2 个单位长度的速度运动，动点 Q 从点 C 出发，在线段 CB 上以每秒 1 个单位长度的速度向点 B 运动，点 P, Q 分别从点 D, C 同时出发，设运动时间为 t （秒）。

(1) 当 t 为何值时，以 B, P, Q 为顶点的三角形为等腰三角形？

(2) 是否存在时刻 t ，使得 $PQ \perp BD$ ？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由；



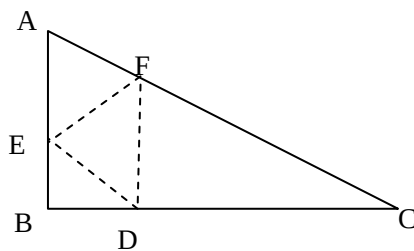
6、如图，抛物线 $y = -x^2 + x + 6$ 和 x 轴交于 A, B 两点，（点 B 在点 A 的右侧）。和 y 轴交于点 C，在 y 轴



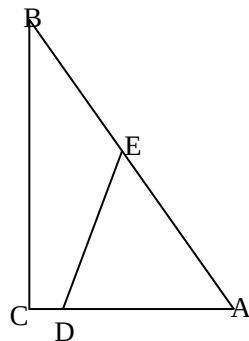


上是否存在点 P，使以点 P，A，O 为顶点的三角形与 $\triangle CBO$ 相似？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

7、如图在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，E，F 分别为边 AB，AC 上的点，当沿 EF 将 $\triangle AEF$ 折叠，恰使点 A 落在 BC 上的点 D 处，并且有 $FD \perp BC$ 时，点 E，F 分别在边 AB 上和 AC 上的什么位置？



8、如图 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ $AC=6$ ， $BC=8$ ，点 D 在 AC 上，（不与点 A，C 重合）。点 E 在 AB 上（不与点 A，B 重合）。如果线段 DE 把 $Rt\triangle ABC$ 的周长和面积都平分成相等的两部分，请求出 AD 和 AE 的长。



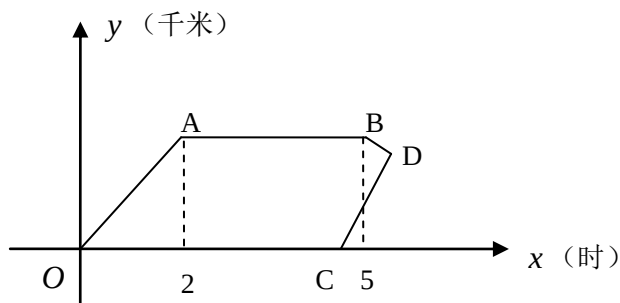
9、星期天，小强骑自行车到郊外与同学一起游玩。从家出发 2 小时到达 目的地，游玩 3 小时后按原路返回，



小强离家 4 小时 40 分钟后，妈妈驾车沿相同路线迎接小强，如图是他们离家的路程 y （千米）与时间 x （时）的函数图象。已知小强骑车的速度为 15 千米/时，妈妈驾车的速度为 60 千米/时。

(1) 小强家与游玩地的距离是多少千米？

(2) 妈妈出发多长时间与小强相遇？



10、根据以下 10 个乘积，回答问题：

$$11 \times 29; \quad 12 \times 28; \quad 13 \times 27; \quad 14 \times 26; \quad 15 \times 25;$$

$$16 \times 24; \quad 17 \times 23; \quad 18 \times 22; \quad 19 \times 21; \quad 20 \times 20;$$

试将以上各乘积分别写成一个“ $\square^2 - \bigcirc^2$ ”（两数平方差）的形式，并写出其中一个的思考过程；

11、已知正 n 边形的周长为 60，边长为 a 。

(1) 当 $n = 3$ 时，请直接写出 a 的值；

(2) 把正 n 边形的周长与边数同时增加 7 后，假设得到的仍然是正多边形，它的边数为 $n+7$ ，周长为 67，边长为 b ；有人分别取 n 等于 3, 20, 120。再求出相应的 a 与 b ，然后断言：“无论 n 取任何大于 2 的正整数， a 与 b 一定不相等”。你认为这种说法对吗？若不对，请求出不符合这一说法的 n 的值。