



关节四

基本图形性质与功能的再认识

所有几何图形问题的解决，几乎都要回归到基本图形的性质，而能否得心应手地运用基本图形，则要靠以下两点：第一点，对基本图形性质掌握的深刻程度；第二点，基本图形的各性质都是以怎样的方式发挥着作用的。

正是为了帮助同学们学好、用好这两点，我们特将最重要的一些基本图形性质与功能加以梳理和解析，以便为各类几何图形问题的解决打下牢固的基础。

一、线段的性质和线段中点的功能

应掌握好：

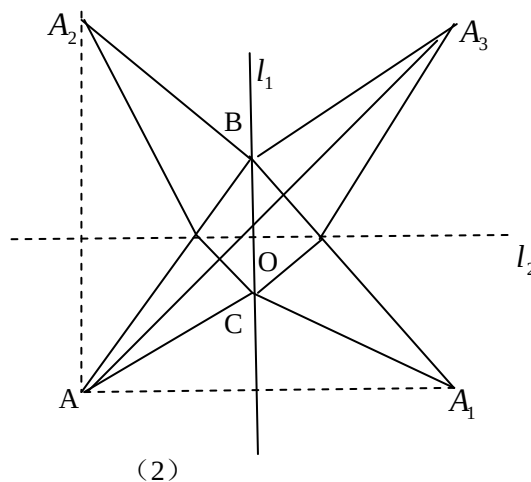
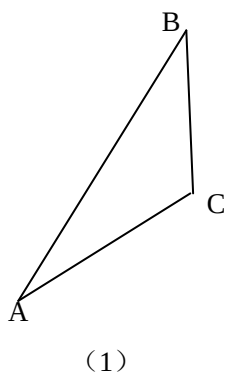
- 1、线段的两种变换性质；
- 2、线段中点的三项功能。

1、线段的变换性质

从“变换”的角度说，线段既是轴对称图形（它所在的直线和它的垂直平分线都是对称轴），又是中心对称图形（中点就是对称中心）

例1 如图， $\triangle ABC$ 是任意三角形，请画出 $\triangle A'BC$ 和 $\triangle ABC$ 具有全等的关系。

【观察与思考】如果把要画的 $\triangle A'BC$ 看作是由 $\triangle ABC$ 变换而来的，那么这个变换使线段 BC 变成自身，联想到线段的变换性质，就应有三种结果。



解：如图（2）（其中直线 l_1 是 BC 所在的直线，点 A_1 为点 A 关于直线 l_1 的对称点；直线 l_2 是线段 BC 的垂直平分线，点 A_2 为点 A 关于直线 l_2 的对称点；点 O 是线段 BC 的中点，点 A_3 和点 A 关于点 O 为对称。

点 A_2 为点 A 关于直线 l_2 的对称点；点 O 是线段 BC 的中点，点 A_3 和点 A 关于点 O 为对称。

$\triangle A_1BC, \triangle A_2BC, \triangle A_3BC$ 都和 $\triangle ABC$ 全等。

【证明】正是线段的变换性质成为本题解法的基础和向导的。

2、线段中点的三项功能

（1）构造三角形的中线，特别是直角三角形的中线



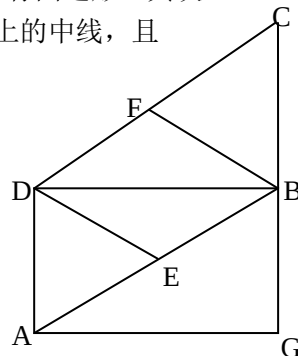
三角形的中线，特别是直角三角形斜边上的中线，在相关问题的解决中常有重要的作用。

例2 如图，在平行四边形ABCD中，E，F分别是AB，CD的中点，AG//DB，交CB延长线于点G。若四边形BEDF是菱形，则四边形AGBD是什么特殊四边形？并证明你的结论。

【观察与思考】首先，由，GB//AD，AG//DB，知四边形AGBD已是平行四边形，其次，由四边形BEDF是菱形，而点E是AB的中点，即ED是 $\triangle ABD$ 中AB边上的中线，且DE=EB=AE，立刻知道 $\angle ADB = 90^\circ$ ，即四边形AGBD是矩形。

解：（略）

【说明】正是由对直角三角形斜边上中线性质的深刻认识，直接诱发出从DE=EB=AE，导出 $\angle ADB = 90^\circ$ 。



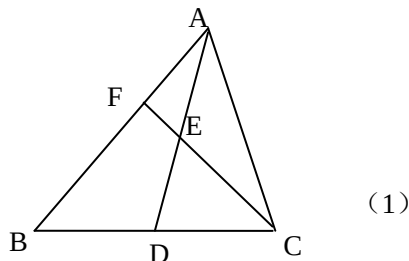
（2）构造三角形的中位线

例3 如图（1），已知，AD是 $\triangle ABC$ 的中线，E是AD上一点，连结CE并延长交AB于点F。

（1）若E是AD的中点，则 $\frac{AF}{BF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

（2）若AE:ED = $\frac{1}{2}$ ，则 $\frac{AF}{BF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

（3）若AE:ED = $\frac{1}{n}$ ，则 $\frac{AF}{BF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；



【观察与思考】（1）如图（2），作DM//CF，交AB于点M，EF为 $\triangle ADM$ 的中位线，得AF=FM，DM为 $\triangle BCF$ 的中位线，得BM=MF。可知 $\frac{AF}{BF} = \frac{1}{2}$ 。

（2）如图（3），作DM//CF，交AB于点M，易知， $\triangle AFE \sim \triangle ADM$ ，得 $\frac{AF}{FM} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$ 。又DM为 $\triangle BCF$ 的中位线，得DM=FM， $\frac{AF}{BF} = \frac{AF}{2FM} = \frac{1}{4}$

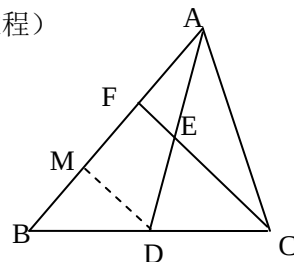
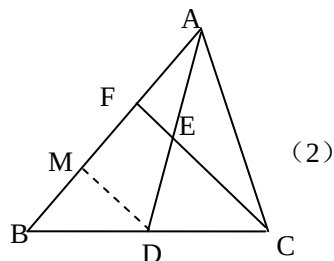
（3）类比于（1）和（2），应有 $\frac{AF}{BF} = \frac{1}{2n}$ （其实可有与（2）类似的推演过程）

【说明】本题解决的关键就在于构造出 $\triangle BCF$ 的中位线DM。

（3）构造中心对称图形

线段的中点是该线段的对称中心，这一性质的延伸，就是以它为基础作“中心对称构造”

（特别是中心对称型 全等三角形）来使相关问题获得解决。

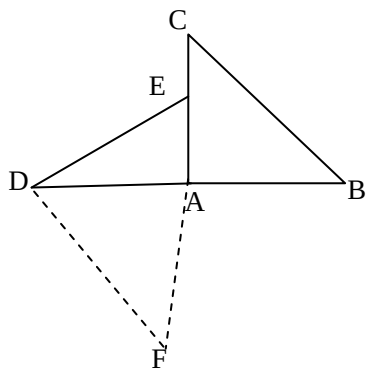
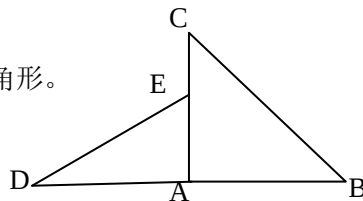




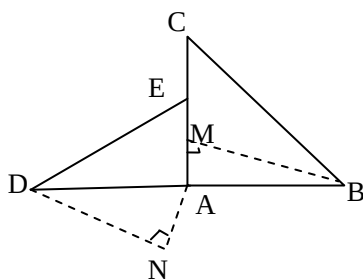
例4 已知，如图D是 $\triangle ABC$ 的边BA延长线上一点，有 $AD=BA$ ，E是边AC上一点，且 $DE=BC$
求证： $\angle DEA = \angle C$

【观察与思考】以BD及其中点A为基础，构造“中心对称型”三等三角形。

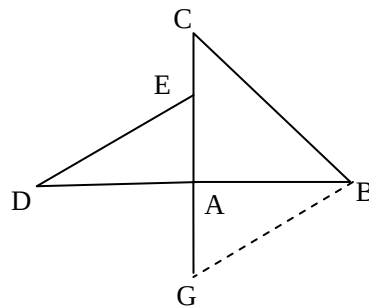
解法提示：如下面图（1），（2），（3）。



(1)



(2)



(3)

方法一：如图（1），延长CA到F，使 $FA=CA$ ，连结FD，有 $\triangle AFD \cong \triangle ACB$ ， $DF=BC=DE$ ，得 $\angle C = \angle F = \angle DEA$

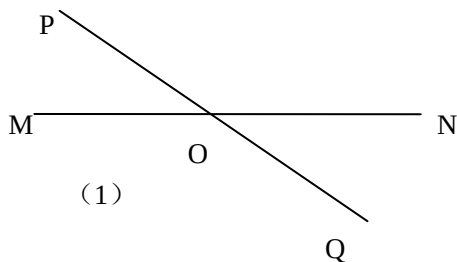
方法二：如图（2），分别作 $DN \perp CA$ 交CA的延长线于N， $BM \perp CA$ ，垂足为M，则有 $Rt\triangle DAN \cong Rt\triangle BAM$ ，得 $DN=BM$ ，进而推得 $Rt\triangle EDN \cong \triangle CBM$ ，得 $\angle DEA = \angle C$

方法三：如图（3）延长CA到G，使得 $AG=EA$ ，则 $\triangle DEA \cong \triangle BGA$ ，得 $\angle DEA = \angle G$ ，再由 $BG=DE=BC$ ，得 $\angle DEA = \angle G = \angle C$ 。

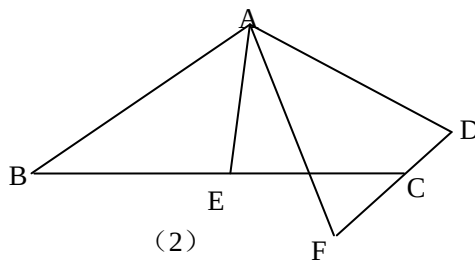
特别说明：我们借助基本图形的变换性质，能更好更快地发现图形或图形元素之间的关系，但要证明还需要按教材上的演绎形式来论述。简单说就是“借变换发现，按原格式证明”。本书均按此方式来做，以后不再重申。

例5 操作：如图，点O为线段MN的中点，直线PQ与线段MN相交于点O，利用图（1）画出一对以点O为对称中心的全等三角形。

根据上述操作得到的经验完成下列探究活动。



(1)



(2)

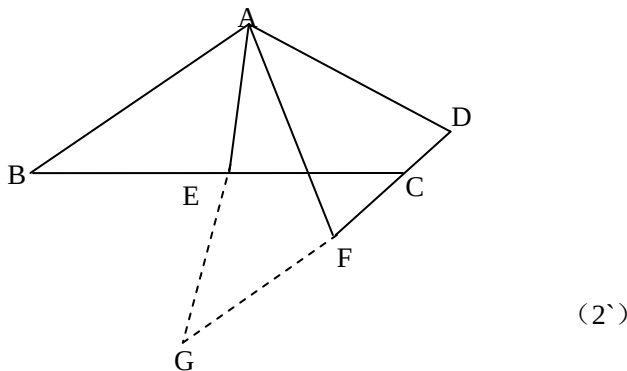
探究：如图（2），在四边形ABCD中， $AB \parallel CD$ ，E为BC边的中点， $\angle BAE = \angle EAF$ ，AF与DC的延长线相交



于点 F，试探究线段 AB 与 AF，CF 之间的等量关系，并证明你的结论。

【观察与思考】对于图(1)，只要在直线 PQ 上点 O 的两侧分别取点 E, F 使 $OE=OF$ ，就有 $\triangle OME \cong \triangle ONF$ (图略) 对于图(2)，延长 AE 到 G，使 $EG=EA$ ，连结 CG，如图(2')。由“操作”的结论可知 $\triangle ABE \cong \triangle GCE$ ，得 $AB=GC$ ， $\angle ABC = \angle GCB$ ，即 $CG \parallel AB$ ，而 $CF \parallel AB$ ，可知点 F 在 GC 上，而由 $\angle G = \angle BAG = \angle GAF$ ，得 $AF=GF$ 。这样就有 $AB = GC = GF + CF = AF + CF$

解：(略)



由以上题目的解法研究看出：

凡是涉及线段(包括多边形的边)及其中点的问题，应注意从线段的变换性质和它的中点的三项功能考虑。

二、角平分线的功能

角平分线主要功能有：

- 1、以角平分线的对称性质作轴对称构造；
- 2、角平分线与平行线结合构造出等腰三角形。

1、角平分线所在直线为轴构造轴对称图形

角平分线最重要的性质是它所在直线为“角”这个图形的对称轴，其他的性质都可以看作是由此导出的。因此，遇有角平分线的问题时，首先应当想到它的轴对称功能。

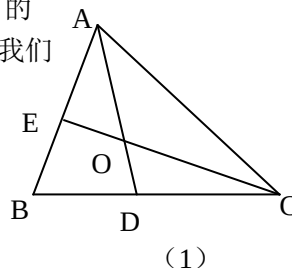
例1 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，AD，CE 分别为 $\angle BAC$ ， $\angle ACB$ 的平分线，求证： $AC=AE+CD$

【观察与思考】根据角平分线轴对称功能，首先想到在 AC 上作出 AE 关于 AD 的对称图形 AF (如图(2))，进而希望有 CF 和 CD 也关于 CE 对称，这就引导我们获取了如下的证法。

证明：取 AC 上的点 F，使 $AF=AE$ ，连结 OF。
在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle AOE$ 中， $AF=AE$ ，AO 公用， $\angle FAO = \angle EAO$ ，

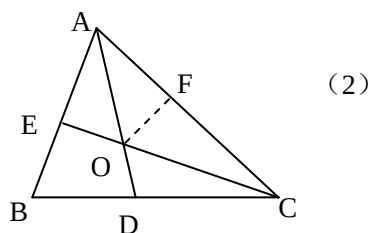
$\therefore \triangle AOF \cong \triangle AOE$ ， $\therefore \angle AOF = \angle AOE$ 。

又因为





$$\begin{aligned}\angle AOC &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 120^\circ \\ \therefore \angle AOE &= \angle AOF = 60^\circ\end{aligned}$$



在 $\triangle COF$ 和 $\triangle COD$ 中 CO 公用。 $\angle FCO = \angle DCO$, $\angle FOC = \angle AOC - \angle AOF = 60^\circ = \angle AOE = \angle COD$

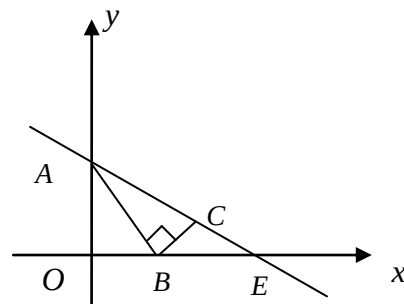
$$\therefore \triangle COF \cong \triangle COD, \therefore CF = CD.$$

$$\therefore AC = AF + CF = AE + CD$$

【说明】 本题的关键步骤就是以“角平分线的轴对称功能”为基础去构造全等三角形。

例 2 如图，已知点 $A(0, 1)$ 是 y 轴上一个定点，点 B 是 x 轴上一个动点，以 AB 为边，在 $\angle OAB$ 外部作 $\angle BAE = \angle OAB$ ，过点 B 作 $BC \perp AB$ ，交 AE 于点 C ，设点 C 的坐标为 (x, y) ，当点 B 在 x 轴上运动时，求 y 关于 x 的函数关系式。

【观察与思考】 先从几何图形的角度来看 x, y ，为此作 $CD \perp x$ 轴于点 D （如图（2）），当点 B 在 x 的正半轴上时， $x = OD, y = CD$ ，现考虑 CD 与 OD 之间的函数关系式。

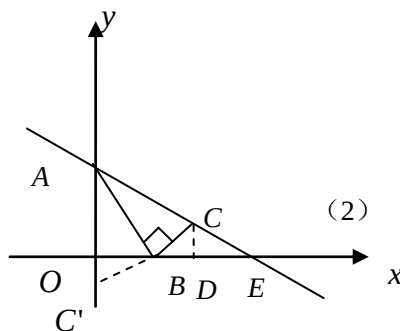


再由 AB 为 $\angle OAE$ 的平分线，沿着它是对称轴思考：若作 CB 的延长线交 y 轴于 C' ，由 $CB \perp AB$ ，可知 $C'B$ 和 CB 关于 AB 对称，即 B 为 $C'C$ 的中点，再结合 $CD \perp x$ 轴， $C'O \perp x$ 轴，则 $\triangle CDB$ 和 $\triangle C'OB$ 关于点 B 为中心对称，得 $OC' = CD = y$ ， $OB = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}x$ 。再由 $\triangle BOC'$ 和 $\triangle AOB$ 的相似关系即可导出欲求的函数关系式。

解：作 $CD \perp x$ 轴于点 D ，延长 CB ，交 y 轴于点 C' ，则 $CD = y, OD = x$

$\therefore AB$ 是 $\angle OAE$ 的平分线，且 $CC' \perp AB$ ， $\therefore Rt\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ ，得 $BC = BC'$ 。

在 $\triangle CDB$ 和 $\triangle C'OB$ 中， $\angle CBD = \angle C'BO$ ， $\angle DCB = \angle OC'B$ ($\because CD \parallel AC'$)
 $CB = C'B$





$$\therefore \triangle CDB \cong \triangle C'OB, \therefore C'O = CD = y, OB = DB = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}x。$$

在 $Rt\triangle BOC'$ 和 $Rt\triangle AOB$ 中, $\angle C'BO = \angle BAO$ (同为 $\angle ABO$ 的余角)。

$$\therefore Rt\triangle BOC' \sim Rt\triangle AOB, \text{ 得 } \frac{OB}{OC'} = \frac{OA}{OB}, \text{ 即 } \frac{\frac{1}{2}x}{y} = \frac{1}{\frac{1}{2}x},$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2。$$

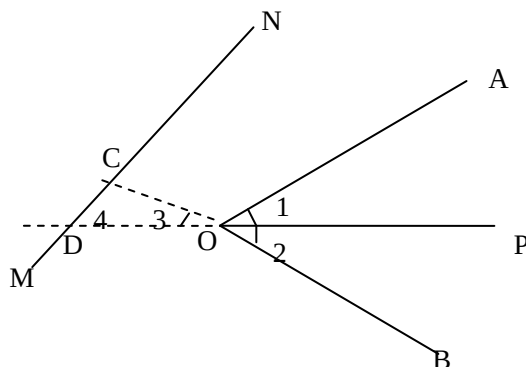
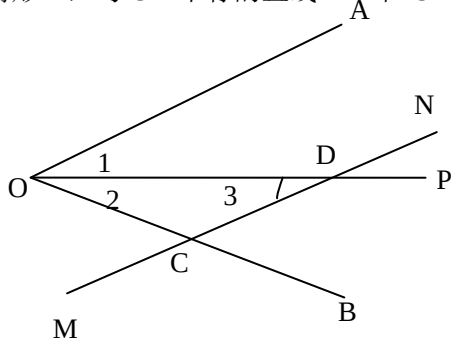
容易知道, 这个关系在 $x=0$ 和 x 取负数值时, 也是成立的。

可以看出: 不论在什么样的综合题中, 角平分线的“轴对称功能”, 都常是解法获得的有力指导, 因此, 应当时刻注意发挥角平分线这一功能的重要作用。

2、角平分线与平行线结合构造出等腰三角形

我们知道, 若 OP 是 $\angle AOB$ 的平分线, 则与 OA 平行, 与 OB 平行, 与 OP 平行的直线, 就会分别与另外两直线相交出等腰三角形来: 即

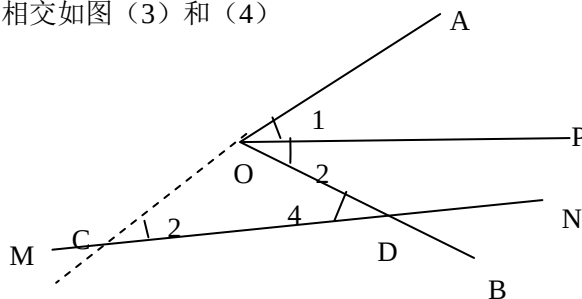
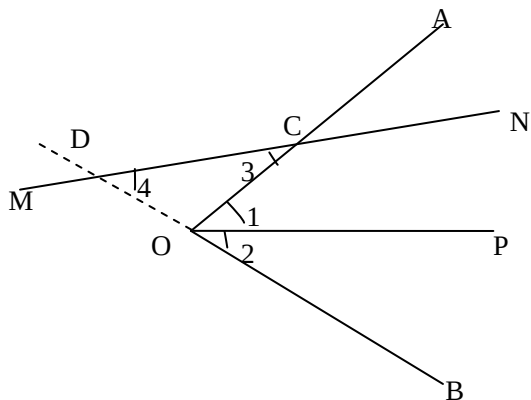
情形一, 与 OA 平行的直线 MN 和 OB , OP 所在的直线相交如图 (1) 和 (2):



(1) MN 和 OB , OP 交出等腰三角形 COD , 其中 $CO=CD$ 。 ($\because \angle 3 = \angle 1 = \angle 2$)

(2) MN 和 OP , OB 的反向延长线交出等腰三角形 COD , 其中 $CO=CD$ 。 ($\because \angle 3 = \angle 2 = \angle 1 = \angle 4$)

情形二, 与 OP 平行的直线 MN 和 OA , OB 所在的直线相交如图 (3) 和 (4)



(3) MN 和 OB 的反向延长线及 OA 交出等腰三角形 (4) MN 和 OA 的反向延长线及 OB 交出等腰三角形



DCO, 其中 $OC=OD$, ($\because \angle 3 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 4$)

OCD, 其中 $OC=OD$. ($\because \angle 3 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 4$)

情形三, 与 OB 平行的直线 MN 和 OA , OP 所在的直线相交, 与情形一完全类似, 也可得两种形式的等腰三角形。由此可知:

①角平分线除了造出“等角之外”, 它在许多情况下还可以造出“等边”。

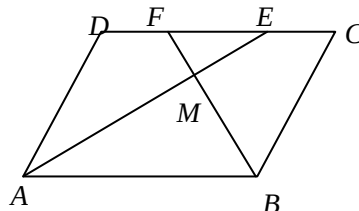
②平行四边形(包括菱形, 矩形, 正方形)和梯形, 本身就有平行线, 因此, 当这些图形中再有角平分线时(菱形的对角线已经是角平分线), 必然就会形成等腰三角形, 这对解决许多相关问题提供了依据。

角平分线这一功能有许多应用, 如下边的例子:

例3 如图(1), 在平行四边形 $ABCD$ 中, 线段 AE , BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$, 交 CD 于点 E , F , 线段 AE , BF 相交于点 M 。

(1) 试说明: $AE \perp BF$;

(2) 判断线段 DF 与 CE 的大小关系, 并予以说明。



【观察与思考】注意到平行四边形对边平行和角平分线的功能, 解法易得。

解: (1) $\because \angle MAB + \angle MBA = \frac{1}{2} \angle DAB + \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} (\angle DAB + \angle ABC) = 90^\circ$

$\therefore \angle AMB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \therefore AE \perp BF$ 。

(2) 有结论: $DF=CE$, 理由如下:

在 $\triangle DAE$ 中, $\angle DAE = \angle BAE = \angle DEA, \therefore DE = DA$ 。

同理有 $CF=CB$ 。

$\therefore DE = DA = CB = CF \therefore DF = DE - EF = CF - EF = CE$

由以上的例题可以看出:

当题目中有直接给出或隐含的角平分线条件时, 除了构成等角外, 还应特别注意从角平分线两个方面的功能来分析和认识图形:

I。以角平分线为轴, 构成怎样的对称图形?

II。以角平分线和平行线结合, 构成怎样的等腰三角形? 思考若以这样的功能作指导, 大都会导致问题的恰当的解决方法。

三、等腰三角形的变换性质

等腰三角形具有这样的变换性质

1、等腰三角形是轴对称图形;

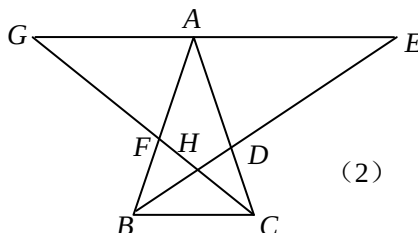
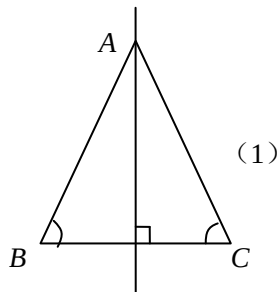
2、等腰三角形两腰绕顶点的旋转重合性。



1、等腰三角形的轴对称图形

等腰三角形是以底边上的中线（底边上的高线，顶角的平分线）所在的直线为轴对称的。如图（1）

凡是涉及等腰三角形的问题，都首先应当沿着“轴对称”这一特征去分析，去认识，去寻找解决的方法。



例1 如图（2）， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，过 A 作 $GE \parallel BC$ ，角平分线 BD ， CF 相交于点 H ，它们的延长线分别与 GE 交于点 E ， G ，试在图中找出 3 对全等三角形，并对其中一对全等三角形给出证明。

【观察与思考】找全等三角形，实际上是去找图中关于 $\triangle ABC$ 的对称轴（尽管没有把它画出来）为对称的三角形。

解：全等的三角形有： $\triangle ABD \cong \triangle ACF$ ； $\triangle ABE \cong \triangle ACG$ ； $\triangle AFG \cong \triangle ADE$ ；

$$\triangle HFB \cong \triangle HDC; \triangle FBC \cong \triangle DCB$$

以证 $\triangle AFG \cong \triangle ADE$ 为例：

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle CDB$ 中， BC 公用，

$$\angle CBF = \angle BCD,$$

$$\angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \angle CBF = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle CBD. \therefore BF = CD.$$

在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$$\angle GAF = \angle ABC = \angle ACB = \angle EAD, \quad \angle G = \angle GCB = \angle ECB = \angle E,$$

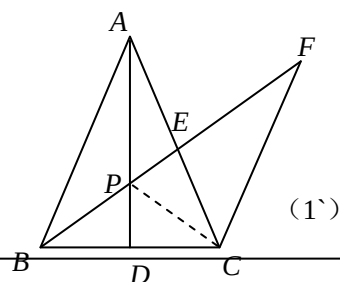
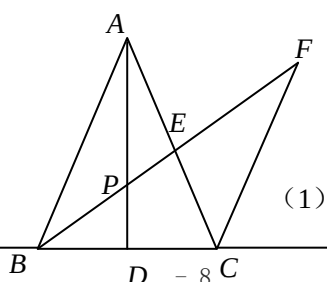
$$AF = AB - BF = AC - CD = AD,$$

$$\therefore \triangle AFG \cong \triangle ADE.$$

【说明】三角形全等本来只是图形“形状和大小”的问题，现在，在等腰三角形这一特殊（轴对称）背景下，可以借助于“位置的对称”来寻找和认识它们，这就为我们研究和利用它们提供了一个新的视角，新的途径，无疑是非常有帮助的。

例2 如图（1）， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， AD 是中线， P 是 AD 上一点，过 C 作 $CF \parallel AB$ ，连结 BP 并延长，交 AC 于点 E ，交 CF 于点 F 。

求证： $BP^2 = PE \cdot PF$





【观察与思考】若作 PB 关于 AD 的对称线段 PC，则 $PC=PB$ ，而易知 $\triangle PCE \sim \triangle PFC$ ，可使问题获解。

证明：连结 PC（如图（1'））

在 $\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 中，AP 公用， $AB=AC$ ， $\angle BAP = \angle CAP$ ，
 $\therefore \triangle APB \cong \triangle APC$ ， $\therefore BP = CP$ ，且 $\angle ABP = \angle ACP$ 。

在 $\triangle PCE$ 和 $\triangle PFC$ 中， $\angle CPE = \angle FPC$ ， $\angle PCE = \angle ABP = \angle F$

$\therefore \triangle PCE \sim \triangle PFC$ ，

$\therefore \frac{PC}{PF} = \frac{PE}{PC} \therefore PC^2 = PE \cdot PF$ ，即 $PB^2 = PE \cdot PF$ 。

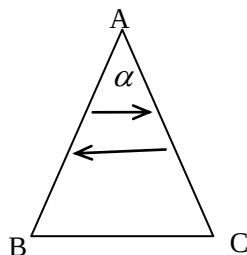
【说明】可以看出，当问题的基本背景为等腰三角形时，以该三角形的对称轴去探索问题的解决途径，常常是有效的。

2、等腰三角形的“两腰的旋转重合性”

如图，在等腰三角形 ABC 中，若顶角 $\angle BAC = \alpha$ ，则显然有：

腰 AB $\xrightarrow[\text{旋转 } \alpha]{\text{绕点 A 逆时针}}$ 与腰 AC 重合，反之有

腰 AC $\xrightarrow[\text{旋转 } \alpha]{\text{绕点 A 顺时针}}$ 与腰 AB 重合。

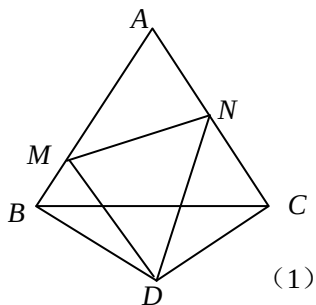


等腰三角形这一特征，我们称之为等腰三角形“两腰的旋转重合性”，等腰三角形的这一特征，也是解决某结与等腰三角形相关问题的向导。

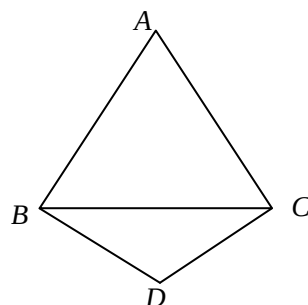
例 3 如图（1）， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC = 120^\circ$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作 60° 的角，它的两边分别与 AB，AC 交于点 M 和 N，连结 MN。

（1）探究： BM, MN, NC 之间的关系，并加以证明；

（2）若点 M，N 分别在射线 AB，CA 上，其他条件不变，再探究线段 BM，MN，NC 之间的关系，在图（2）中画出相应的图形，并就结论说明理由。



（1）



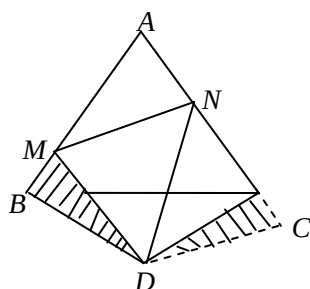
（2）



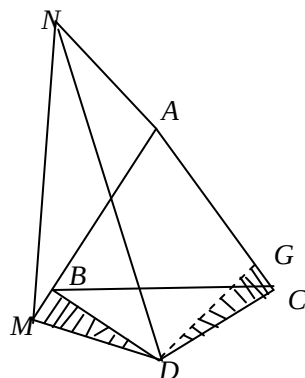
【观察与思考】对于(1)，这时在 $\triangle DMB$ 中，有 $\angle DBM = \angle DBC + \angle CBA = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ ，
为了把 BM, MN, NC 集中到一个三角形中去，

作： $\triangle DMB \xrightarrow[\text{旋转 } 120^\circ \text{ 角}]{\text{绕点 } D \text{ 顺时针}} \triangle DGC$ (如图(1'))，从而有 $MB=GC$ ，而此时恰又有 $\triangle MND \cong \triangle GND$ ，

得 $MN = NG = NC + CG = NC + BM$ 。



(1')



(2')

对于(2)，此时的图形(2')，仍作(1)中的旋转，类似地可以推得 $MN=CN-BM$

解：(1) 关系为 $MN=BM+NC$ 。

证明：延长 AC 到 G ，使 $CG=BM$ ，连结 DG ，如图(2')

$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ 。同理也有 $\angle ACD = 90^\circ$ 。

在 $Rt\triangle DMB$ 和 $Rt\triangle DGC$ 中， $DB = DC$ ， $BM=CG$ 。

$\therefore Rt\triangle DMB \cong Rt\triangle DGC, \therefore DM = DG, \angle MDB = \angle GDC$ 。

在 $\triangle MND$ 和 $\triangle GND$ 中， ND 公用， $DM=DG$ ， $\angle MDN = 60^\circ$

$\angle GDN = \angle GDC + \angle CDN = \angle MDB + \angle CDN = 60^\circ$ 。

$\therefore \triangle MND \cong \triangle GND, \therefore MN = GN = GC + NC = BM + NC$ 。

(2) 此时，图形如图(2')，有关系式： $MN=CN-BM$ 。理由如下：

在 CN 上截取 $CG=BM$ ，连结 DG ，如图(2')。

与(1)中情况类似，可推得 $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ ，且 $Rt\triangle DMB \cong Rt\triangle DGC$ ，得 $DM = DG$ ， $\angle MDB = \angle GDC$

仍与(1)中情况类似，可推得 $\triangle MND \cong \triangle GND$ ，就有 $MN = GN = NC - CG = NC - BM$ 。

【说明】由本题可以看出，恰当地运用等腰三角形的“两腰的旋转重合性”，可在一定的条件下实现图形(线段、角)的“转移”，从而使问题解决。

当题目背景为等腰三角形时，应注意充分运用其“轴对称性”和“两腰的旋转重合性”。

四、等边三角形的变换性质

等边三角形是特殊的等腰三角形，因而具有轴对称性，且有三条对称轴，但是，等边三角形具有更为特殊的变换性质，并更多地成为相关问题展开的焦点，那么，充分运用这些变换性质，便成为打开相关问题解决之门的钥匙。



等边三角形具有如下的变换性质

- 1、它是轴对称图形（有三条对称轴）；
- 2、它是绕中心的 120° 的旋转对称图形；
- 3、它的两邻边具有 60° 旋转重合性；

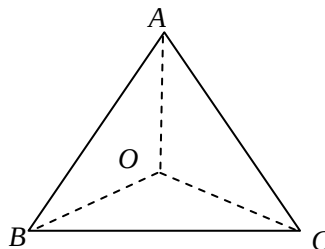
1、等边三角形的“ 120° 的旋转对称性”

如果一个图形沿某一条直线作轴对称图形与它本身重合，就称这个图形为轴对称图形，完全类似地，如果一个图形以某一点为中心旋转 α 角（ $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ）后与它本身重合，就称这个图形为“ α 角的旋转对称图形”。比如说，平行四边形就是“ 180° 的旋转对称图形”（“ 180° 的旋转对称图形”也称“中心对称图形”）。

可以知道，任意的等边三角形 ABC ，以它的中心 O （三条中线的交点，也即中心、内心、垂心、外心）为中心旋转 120° ，就与自身重合，所以，“等边三角形是 120° 的旋转对称图形。”如图

$\triangle ABC$ $\xrightarrow[\text{旋转 } 120^\circ \text{ 角}]{\text{绕点 } O \text{ 顺（逆）时针}}$ 重合于等边三角形 BCA ，等边三角形的这一变换性质，可以帮助

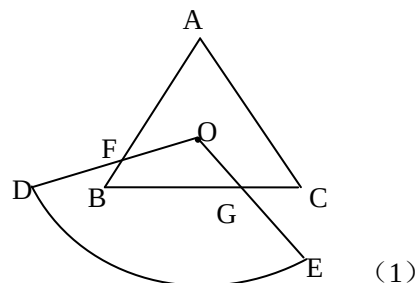
我们更好地发现与找到许多问题的解决方法。



例1 如图（1），扇形 DOE 的圆心角为 120° ，等边三角形 ABC 的中心恰好为扇形 DOE 的圆心 O ，且点 B 在扇形 DOE 内

（1）请连结 OA ， OB ，并证明 $\triangle AOF \cong \triangle BOG$ ；

（2）求证： $\triangle ABC$ 与扇形 DOE 重叠部分的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{3}$ 。

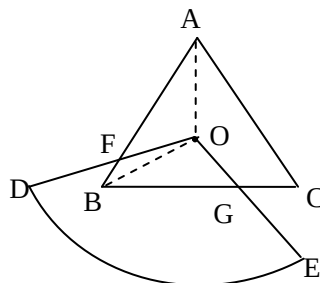


【观察与思考】注意到点 O 为等边三角形 ABC 的中心，而 $\angle FOG$ 恰为 120° ，即

$OF \xrightarrow{\text{绕点 } O \text{ 逆时针}} \text{重合于 } OG$ 。因此，

（1）有 $\triangle AOF \xrightarrow[\text{旋转 } 120^\circ \text{ 角}]{\text{绕点 } O \text{ 逆时针}} \text{重合于 } \triangle BOG$ 。

（2）由（1）的结论可推得。



【证明】（1）连结 OA ， OB （如图（1'））。

$\because$ 点 O 是等边 $\triangle ABC$ 的中心，

$\because OA = OB, \angle OAF = \angle OBG = 30^\circ, \angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ 。

又知 $\angle FOG = 120^\circ, \therefore \angle AOF = \angle AOB - \angle BOF = \angle FOG - \angle BOF = \angle BOG$ 。



$\therefore \triangle AOF \cong \triangle BOG$ 。

$$(2) S_{\text{四边形}OFBG} = S_{\triangle OFB} + S_{\triangle OBG} = S_{\triangle OFB} + S_{\triangle OAF} = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

【说明】由本题的结论及其推导过程可以进一步概括出：在等边三角形 ABC 中，

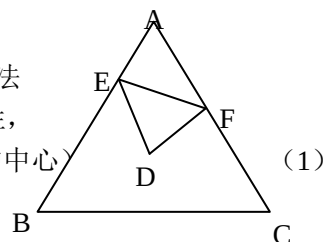
①任意顶点在 $\triangle ABC$ 的中心的 120° 的角的两边，截下的 $\triangle ABC$ 的部分的面积，都等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{3}$ 。

②任意以 $\triangle ABC$ 的中心 O 为端点的射线(如上图中的 OD)，以 O 为中心旋转 120° 以后(如上图中的 OE)，与 $\triangle ABC$ 的边交出的对应线段有着同样的旋转对称关系，当然也就相等(如上图 $OF=OG$ ， $AF=BG$ ， $BF=CG$)。

例2 如图，已知，点 D 是边长为 1 的等边三角形 ABC 的内心，点 E, F 分别在边 AB, AC 上，且满足 $\angle EDF = 60^\circ$ 。求 $\triangle AEF$ 的周长。

【观察与思考】 $\triangle AEF$ 的三边的长不可能通过分别计算求得，因此，第一个想法就是把它三条边等长转化到同一条直线上，利用等边三角形 120° 的旋转对称性，先把 AF 转化到 AB 上，为此，如图 (1')，连结 DA (注意到点 D 就是 $\triangle ABC$ 的中心) 作变换：

绕点 D 逆时针
 $\triangle ADF \xrightarrow{\text{旋转 } 120^\circ \text{ 角}} \text{重合到 } \triangle BDG$ 。



当然就有 $AF=BG$ 。在这种情况下，又诱发我们看到 $\triangle DEF \cong \triangle DEG$ ，即有 $EF=EG$ ，这时就可以看出， $\triangle AEF$ 的周长应当等于 $\triangle ABC$ 的一条边长。

解：如图 (1')，连结 DA, DB ，并在 BA 上截取 $BG=AF$ ，连结 DG ，在 $\triangle ADF \cong \triangle BDG$ 中，

$$AF = BG, AD = BD, \angle DAF = \angle DBG = 30^\circ \text{ (因为 } D \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的内心)}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDG, \therefore DF = DG, \angle ADF = \angle BDG.$$

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DEG$ 中， DE 公用， $DF=DG$ ， $\angle EDF = 60^\circ$ ，而 $\angle EDG = \angle ADB - \angle ADE - \angle BDG$

$$= 120^\circ - (\angle ADE + \angle ADF) = 120^\circ - \angle EDF = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DEG, \therefore EF = EG$$

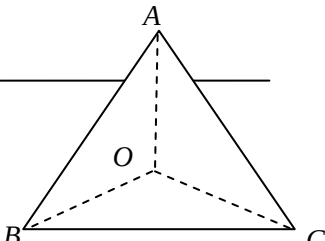
$$\therefore \triangle AEF \text{ 的周长} = AE + EF + AF = AE + EG + BG = AB = 1$$

【说明】正是等边三角形的 120° 的旋转对称性，启发了整个的解题思路和辅助线的作法。

2、等边三角形“两邻边的 60° 旋转重合性。

因为等边三角形的每个角都是 60° ，且三边相等，所以，以其一个顶点(如图的 A)为中心，将过该顶点的一条边(如 AB)沿适当的方向旋转 60° (如这里逆时针旋转 60°) 就能与顶点的另一条边(如 AC)重合。

等边三角形的这一性质，我们可称之为等边三角形“两邻边的 60° 旋转重合性”。





这一性质，在不少与等边三角形相关的题目中，也有关着很重要的作用。

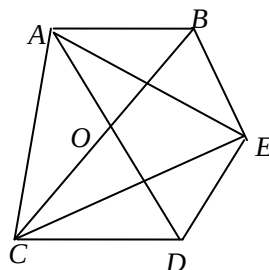
例3 如图，已知AD和BC相交于点O，且 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 均为等边三角形，以OD和OB为边作平行四边形ODEB，连结AC，AE和CE。

求证： $\triangle ACE$ 也是等边三角形

【观察与思考】借助于等边三角形“两邻边的 60° 旋转重合性”，容易发现：

I、 $\triangle AOC$ $\xrightarrow[\text{旋转 } 60^\circ]{\text{绕 A 沿逆时针方向}}$ 重合于 $\triangle ABE$ ；

II、 $\triangle AOC$ $\xrightarrow[\text{旋转 } 60^\circ]{\text{绕 C 沿顺时针方向}}$ 重合于 $\triangle EDC$ 。



由以上旋转重合中任选一个，都不难使本题获解。

证明方法一：在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$AO = AB$, $OC = OD = BE$, $\angle AOC = 120^\circ = \angle ABO + \angle COD = \angle ABO + \angle OBE = \angle ABE$,
 $\therefore \triangle AOC \cong \triangle ABE$, $\therefore AC = AE$, $\angle CAO = \angle EAB$ 。

又 $\angle CAE = \angle CAO + \angle OAE = \angle EAB + \angle OAE = \angle OAB = 60^\circ$

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形。

方法二：通过证 $\triangle AOC$ 和 $\triangle EDC$ 全等，请同学们自己完成。

【说明】由上例进一步看出，熟悉并善于运用等边三角形“两邻边的 60° 旋转重合性”，能更快速、更准确地发现与等边三角形相关问题中的全等关系，进而解决许多有关的问题。

以等边三角形为背景的题目，绝大部分是依以上三种变换性质展开或衍生的。因此，依这三种变换性质去寻找解法，既是正路，也是捷径。

五、等腰直角三角形的变换性质

从变换的视角来看，等腰直角三角形有如下的三种特征：

特征一：它是以斜边上的中线所在直线为轴的对称图形（这是由“等腰”决定的）；

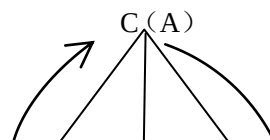
特征二：它是以斜边上的中点为中心的 90° 旋转重合图形（意义见下文）；

特征三：它的两条直角边关于直角顶点具有 90° 的旋转重合性。

特征一的应用亦如一般的等腰三角形一样，而与等腰直角三角形相关的问题，更多的却是由其特征二和特征三所引发的，相应地，这些问题的解决也便多以特征二和特征三为思考的依据及落实的线索，以下举例来说明。

1、等腰直角三角形“以斜边中点为中心的 90° 旋转重合性”。

我们知道，在等腰直角三角形ABC中，若AO是斜边AB的中线（或高线，或顶角的平分线）——即O为斜边的中点，那么，将 $Rt\triangle ACO$ 绕点O顺时针旋转 90° ，则它与 $Rt\triangle CBO$ 重合（点A重合于点C处，点C重合于点B处）。如图所示，同样地，将 $Rt\triangle COB$ 绕点O逆时针旋转 90° ，则它与 $Rt\triangle AOC$ 重合（点C重合于点A处，点B



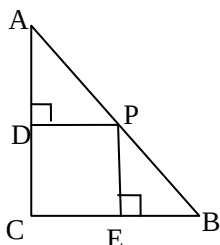


处重合于点 C 处)。

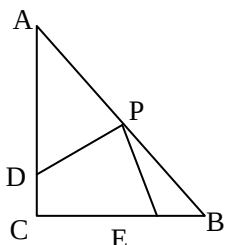
等腰直角三角形以上的性质，我们称之为“等腰直角三角形以斜边中点为中心的 90° 旋转重合性”（以下简称“ 90° 旋转重合性”）。这一性质可以说是等腰直角三角形最为本质的特征，因此有着极为广泛的应用。

例 1 在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，将一块直角三角板的顶点放在斜边 AB 的中点 P 处，将三角板绕点 P 旋转，三角板的两直角边分别交射线 AC ， CB 于 D ， E 两点，图 (1)，(2)，(3) 是旋转三角板得的图形中的三种情况。

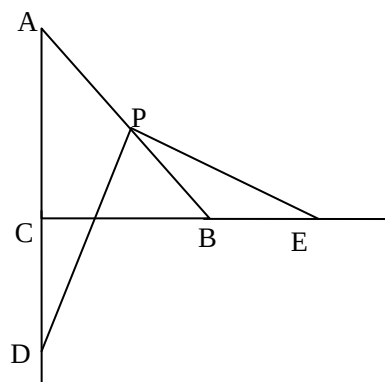
探究并证明：线段 PD 和 PE 之间有什么数量关系？写出结论并证明。



(1)

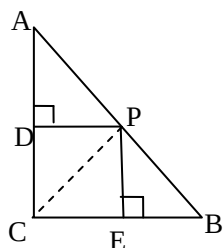


(2)

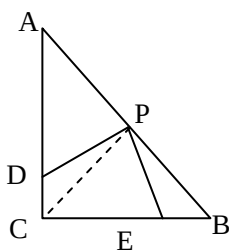


(3)

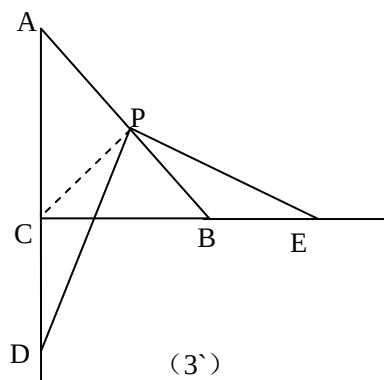
【观察与思考】根据题目的条件和要回答的问题，我们首先考虑到等腰直角三角形的“ 90° 旋转重合性”。为此，在三种情况的图形中均连结 CP ，如下面各图：



(1')



(2')



(3')

在图 (1)，图 (2)，图 (3) 中均有：

$\triangle DCP$ $\xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{绕点 P 逆时针}}$ 重合于 $\triangle EBP$ ，从而 $\triangle DCP \cong \triangle EBP$ ，得 $PD=PE$ ，即 3 种情况有统一的结论和统一的证法。



解：在 3 种情况中，均有结论， $PD=PE$ 。证明如下：

在图（1），图（2），图（3）中，都连结 CP ，在 $\triangle DCP$ 和 $\triangle EBP$ 中， $CP=BP$ ， $\angle DCP = \angle EBP$ （在图（1）和图（2）中，这两个角都为 45° ，而在图（3）这两个角都为 135° ） $\angle DPC = \angle EPB$ （在图（1）和图（2）中这两个角同为 $\angle CPE$ 的余角，而图（3）中，这两个角同为 $\angle DPB$ 的余角。

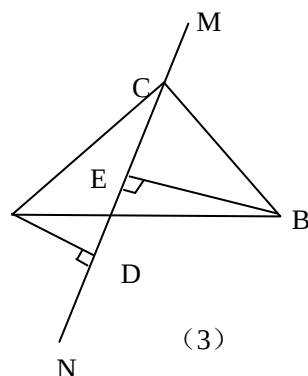
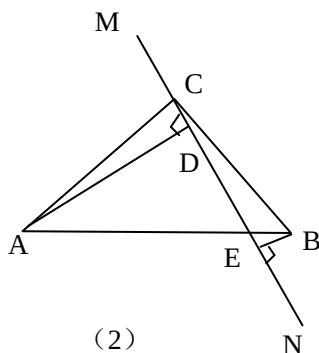
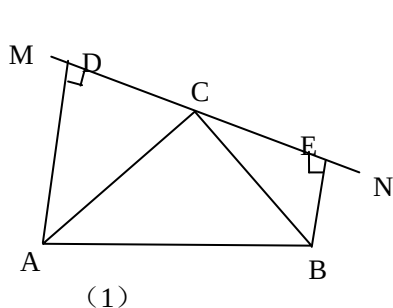
$\therefore \triangle DCP \cong \triangle EBP$ ，可得 $PD=PE$ 。

【说明】在本题中，等腰直角三角形的“ 90° 旋转重合性”引导我们找到如上的既统一又简捷的解决方法，这就是本质特征所揭示的规律的普遍化作用。

例 2，如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，直线 MN 经过点 C ，且 $AD \perp MN$ 于点 D ，

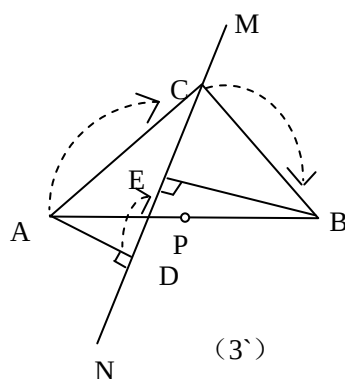
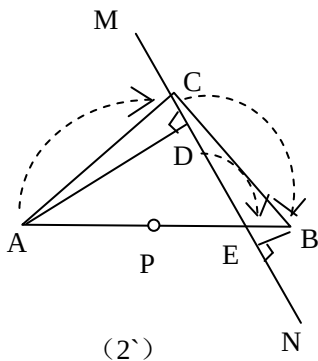
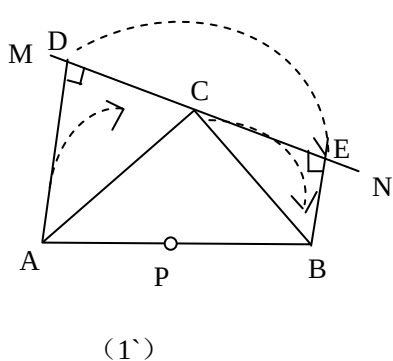
$BE \perp MN$ 于点 E 。

- （1）当直线 MN 绕点 C 旋转到图（1）的位置时，求证： $DE=AD+BE$ ；
- （2）当直线 MN 绕点 C 旋转到图（2）的位置时，求证： $DE=AD-BE$ ；
- （3）当直线 MN 绕点 C 旋转到图（3）的位置时，试问： DE ， AD ， BE 有怎样的等量关系？请写出等量关系，并加以证明。



【观察与思考】首先想到借助等腰直角三角形的“ 90° 旋转重合性”来探究：

在图（1），图（2），图（3）中，都取斜边 AB 的中点 P 如下面的图（1'），图（2'），图（3'）则容易看到：



在这三个图中均有：

$Rt\triangle ACD \xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{绕点 } P \text{ 顺时针}} \text{重合于 } Rt\triangle CBE$ ，即 $Rt\triangle ACD \cong Rt\triangle CBE$ ，由此推得：



$AD=CE$, $CD=BE$ 。据此不仅立刻得到图(1)和图(2)情况的结论,并且也使我们很快看到在图(3)的情况应当有 $DE=BE-AD$ 。

解:在图(1),图(2)和图(3)中,同时考查 $Rt\triangle ACD$ 和 $Rt\triangle CBE$,

$\therefore AC=CB, \angle ACD=\angle CBE$ (同为 $\angle BCE$ 的余角)。

$\therefore Rt\triangle ACD \cong Rt\triangle CBE$, 得 $AD=CE, CD=BE$ 。

(1) 在图(1)的情况下, $DE=CE+CD=AD+BE$;

(2) 在图(2)的情况下, $DE=CE-CD=AD-BE$;

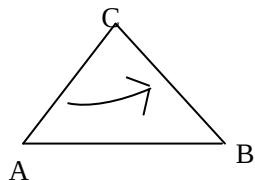
(3) 在图(3)的情况下, 结论为 $DE=BE-AD$, 理由是: 此时 $DE=CD-CE=BE-AD$

【说明】 由于我们从等腰直角三角形的“ 90° 旋转重合性”这一特征出发, 就抓住了图(1), 图(2)和图(3)各种情况的本质 ($Rt\triangle ACD$ 和 $Rt\triangle CBE$ 关于点 P 成 90° 旋转重合), 因此, 三种情况下不同的结论只是共同性质的不同反映而已, 可见, 最为优化的解法是由最恰当地运用最为本质的性质而得到的。

2、等腰直角三角形两直角边以直角顶点为中心的 90° 旋转重合性

如图, 等腰直角三角形 ABC 中, CA, CB 是直角边, 显然有

有 $CA \xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{以 } C \text{ 为中心逆时针}} \text{重合于 } CB$, 当然亦有 CB 绕点 C 顺时针旋转 90° 则与 CA 重合。



我们将等腰直角三角形的这一性质简称为“两直角边 90° 旋转重合性”。等腰直角三角形的这一特征也有着广泛的应用。

例3 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ACB=90^\circ, CA=CB$, D, E 为 AB 上的两点, 且 $\angle DCE=45^\circ$ 。

求证: $AD^2 + BE^2 = DE^2$

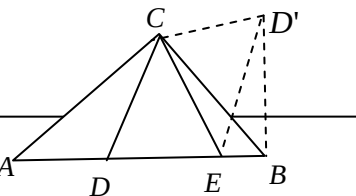
【观察与思考】 由要证的结论立刻想到应将 AD, BE, DE 三条线段转化成同一个直角三角形的三条边 (且与 DE 相等的边斜边)。

若作 $\triangle CAD \xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{绕点 } C \text{ 逆时针}} \text{重合于 } \triangle CBD'$, 如图(1), 连结 ED' ,

这时易知 $\triangle D'EB$ 中 $\angle D'BE=90^\circ$ 。

证明: 在 $\triangle CAB$ 的外侧作 $\angle BCD'=\angle ACD$, 截取 $CD'=CD$, 连结 $D'B, D'E$ 如图(1')。

在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBD'$ 中, $CA=CB, CD=CD', \angle ACD=\angle BCD'$,





$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBD'$, $\therefore \angle CBD' = \angle CAD = 45^\circ$, 且 $AD = BD'$, (1')

$\therefore \angle D'BE = \angle CBD' + \angle CBA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

又 $\therefore$ 在 $\triangle CED$ 和 $\triangle CED'$ 中, CE 公用, $CD = CD'$ 。

$\angle ECD' = \angle ECB + \angle BCD' = \angle ECB + \angle ACD = \angle ACB - \angle DCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle ECD$

$\therefore \triangle CED \cong \triangle CED'$, 得 $DE = D'E$

在 $Rt\triangle D'EB$ 中, 有 $D'B^2 + BE^2 = D'E^2$, 即 $AD^2 + BE^2 = DE^2$ 。

【说明】这里就是恰当地运用了等腰直角三角形两直角边关于直角顶角的 90° 旋转重合性。成功地实现了对线段 AD , DE 的“转移”, 将原本在一条直线的三条线段转化成了同一个直角三角形的三条边。

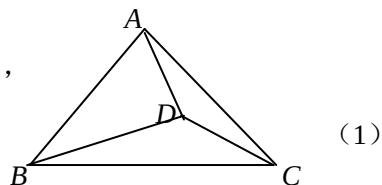
3、等腰直角三角形的轴对称性

等腰直角三角形的轴对称图形(斜边上的中线所在的直线为其对称轴), 有的题目的解决, 需要借此作“轴对称构造”。

例4 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, D 是 $\triangle ABC$ 内一点,

且 $\angle DAC = \angle DCA = 15^\circ$

求证: $BD = BA$ 。



【观察与思考】由 $\angle DAC = 15^\circ$, 启发我们利用等腰直角三角形的轴对称性, 作 $\angle BAE = 15^\circ$, 且取 $AE = AD$, 如图(1'), 易知 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 而 $\triangle AED$ 为等边三角形。从中推得 $\angle AEB = \angle DEB = 150^\circ$, 进而可有 $\triangle ABE \cong \triangle DBE$, 得 $BA = BD$ 。

证明: 在 $\triangle ABC$ 内作 $\angle BAE = \angle CAD = 15^\circ$, 且取 $AE = AD$, 连结 BE , DE , 如图(1'), 这时 $\triangle AED$ 为等边三角形。在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中, $AB = AC$, $AE = AD$, $\angle BAE = \angle CAD = 15^\circ$

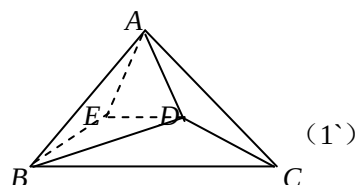
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$, $\therefore \angle AEB = \angle ADC = 150^\circ$

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle BDE$ 中, BE 公用, $AD = DE$ 。

$\angle BED = 360^\circ - \angle BEA - \angle AED$

$= 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ = \angle BEA$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle BDE \therefore BA = BD$



【说明】在本题, 尽管没有画出对称轴, 但并不妨碍我们利用“等腰直角三角形的轴对称性”去思考问题, 这恰恰说明了“变换性质”做为观察和研究图形的一个“视角”, 一种“思想意识”, 是多么有力有效。

通过以上几例可以看出, 等腰直角三角形的三大特征: “绕斜边中点 90° 旋转重合性”、“两直角边的 90° 旋转重合性”、“轴对称性”, 是认识等腰直角三角形和解决与之相关问题的重要基础和有力武器。

六、平行四边形的变换性质

从变换的视角来看, 平行四边形的基本特征反映在如下的两个方面:

特征 I: 平行四边形是“中心对称图形”, 两条对角线的交点就是它的对称中心;

特征 II: 平行四边形的两组对边, 分别具有“平移重合”的关系。



与平行四边形有关的问题，大都可以沿着如上的两个特征去观察、研究，并获得解决。

1、平行四边形的“中心对称性”和其应用

如图，若 O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，那么平行四边形 $ABCD$ 绕点 O 逆（顺）时针旋转 180° 重合于平行四边形 $CDAB$ 。

在上述的 180° 旋转变换中，不仅有 $A \xrightarrow{\quad} C$ ， $B \xrightarrow{\quad} D$ ， $OA \xrightarrow{\quad} OC$ ， $OB \xrightarrow{\quad} OD$ ，

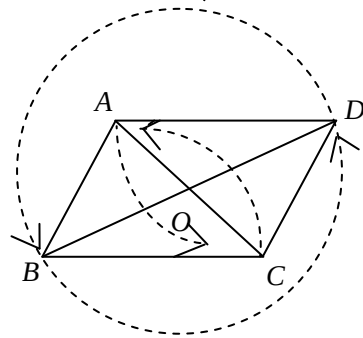
还有关于点 O 所有中心对称的元素都是相互重合的。

平行四边形的这一特征，有着极为广泛的应用。

例 1 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形， $AE \perp BD$ 于点 E ， $CF \perp BD$ 于点 F ，在 DB 的延长线上和 BD 的延长线上分别有点 G 和点 H ，且 $BG=DH$ 。

(1) 请写出图中所有的全等三角形。

(2) 请选一个全等三角形给出证明（ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ 除外）



【观察与思考】显然， BD 的中点 O 为整个图形的对称中心，即有

$$A \xrightarrow{\quad} C, \quad B \xrightarrow{\quad} D,$$

$E \xrightarrow{\quad} F$ ， $G \xrightarrow{\quad} H$ 。这样，当任取其中的三点在图中构成三角形时，则分别与它们中心对称的

三点也在图中构成三角形，并且这样的两个三角形是全等的，因此，图中的全等三角形有：

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB; \triangle ABE \cong \triangle CDF; \triangle ABG \cong \triangle CDH;$$

$$\triangle AEG \cong \triangle CFH; \triangle ADG \cong \triangle CBH; \triangle ADE \cong \triangle CBF.$$

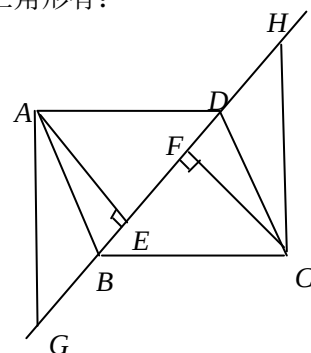
这些全等三角形的每条依据也是关于点 O 为中心对称的。

解：(2) 现在证明 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CFH$ 全等。

$$\because AB = CD, \angle ABE = \angle CDF \text{ (内错角)}$$

$$\therefore Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle CDF, \text{ 得 } AE = CF, BE = DF.$$

$$\therefore AE = CF, EG = EB + BG = FD + DH = FH, \therefore Rt\triangle AEG \cong Rt\triangle CFH.$$

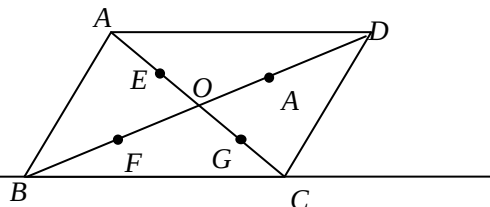
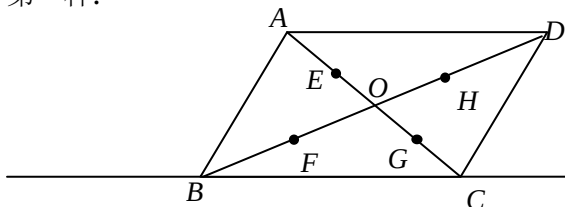


【说明】本题中不仅全等三角形是中心对称的，而且应按中心对称去寻找相等的对应元素。

例 2 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，两条对角线相交于点 O ，点 E, F, G, H 分别是 OA, OB, OC, OD 的中点，以图中的任意四点（即点 $A, B, C, D, E, F, G, H, O$ 中的任意四点）为顶点画出两种不同的平行四边形，并说明理由。

第二种：

第一种：





【观察与思考】当然，用试着画的方法，不难解答本题，但如果按平行四边形的中心对称性来思考，则可有序地得到全部可能的答案。A, B, C, D, E, F, G, H 这八个点关于点 O 有如下的对称关系：

$$A \rightleftharpoons C, \quad B \rightleftharpoons D, \quad E \rightleftharpoons G, \quad F \rightleftharpoons H \quad \text{共四对。从这四对中任意取出两对，}$$

(共四个点)，当它们不在同一条直线时，则必构成平行四边形，这就是：

平行四边形 ABCD (已知)，平行四边形 AFCH，平行四边形 BEDG，平行四边形 EFGH。

【说明】这样依变换性质指导下的思考既有秩序又全面。

2、平行四边形的对边平行关系的应用

平行四边形的对边平行且相等 (即经过平移后重合)，其作用常体现在以下两个方面：

I、构造相似三角形；

II、进行等积变换。

(1) 平行四边形基础上的相似三角形

例 3 如图，已知平行四边形 ABCD 中，过点 B 的直线顺次与 AC, AD 以及 CD 的延长线相交于点 E, F, G，若 BE=5, EF=2，则 FG 的长是_____。

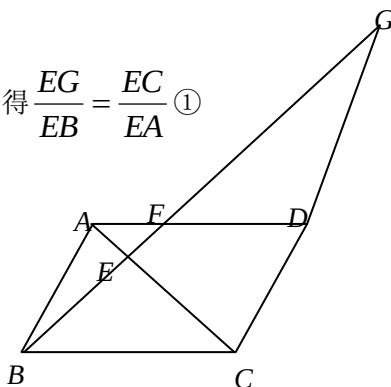
【观察与思考】在图中，由 AB//CG，可得 $\triangle GCE \sim \triangle BAE$ ，从中推得 $\frac{EG}{EB} = \frac{EC}{EA}$ ①

而由 AF//BC，易知 $\triangle CEB \sim \triangle AEF$ ，从中推得 $\frac{EC}{EA} = \frac{EB}{EF}$ ②。

由①和②得 $\frac{EG}{EB} = \frac{EB}{EF}$ ，即 $EG = \frac{EB^2}{EF} = \frac{5^2}{2} = 12.5$

而 $FG = EG - EF = 12.5 - 2 = 10.5$

解：FG=10.5。

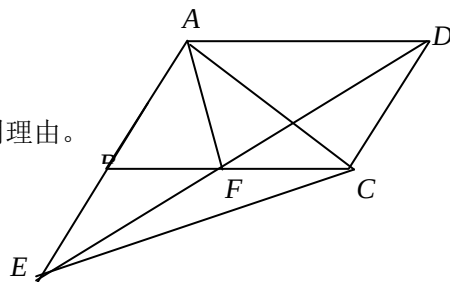


(2) 平行四边形基础上的面积问题

例 4 已知如图，平行四边形 ABCD 中， $AD = a, AB = b, \angle ABC = \alpha$ ，点 F 为线段 BC 上的一点 (端点 B, C 除外)，连结 AF, AC，连结 DF，并延长 DF 交 AB 的延长线于点 E，连结 CE。

(1) 当 F 为 BC 的中点时，求证 $\triangle EFC$ 与 $\triangle ABF$ 面积相等；

(2) 当 F 为 BC 上任意一点时， $\triangle EFC$ 与 $\triangle ABF$ 的面积还相等吗？说明理由。



【观察与思考】由四边形 ABCD 是平行四边形，不难发现

$$S_{\triangle ABF} + S_{\triangle DCF} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD} = S_{\triangle EDC} = S_{\triangle EFC} + S_{\triangle DCF}, \quad \text{得} S_{\triangle ABF} = S_{\triangle EFC}$$

这样一来，(1) 和 (2) 的解决途径同时被发现了，其实，点 F 为 BC 上任意一点时 $S_{\triangle EFC} = S_{\triangle ABF}$ 被证明了，当然



(1) 的情况已包含于其中了。

解：在情况(1)和情况(2)中，均有 $S_{\triangle EFC} = S_{\triangle ABF}$ 。证明如下：

设 F 为 BC 上任意一点，则有

$$S_{\triangle ABF} + S_{\triangle DCF} = S_{\text{平行四边形}ABCD} - S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD},$$

$$S_{\triangle ECD} = S_{\triangle ACD} \quad (\text{这是因为 } AE \parallel CD) = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD}.$$

$$\therefore S_{\triangle ECD} = S_{\triangle EFC} + S_{\triangle DCF} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD}$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} + S_{\triangle DCF} = S_{\triangle EFC} + S_{\triangle DCF}$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle EFC}$$

【说明】如上的解法，一是恰当地运用了“平行四边形对边平行”所带来的三角形面积的转换；二是把不易直接沟通的两个三角形的面积同时加上 $S_{\triangle DCF}$ 后，便与原平行四边形的面积巧妙地联系起来了。

七、正方形变换性质

从变换的角度来看，正方形的本质特征可以反映在以下三个方面：

特征 I、正方形是以其中心（即对角线的交点）为中心的“90° 旋转对称”图形；

特征 II、正方形的邻边以其公共顶点为中心“90° 旋转重合”；

特征 III、正方形是轴对称图形，对边中点连线和两条对角线，都是它的对称轴。

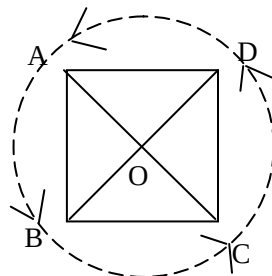
与正方形有关的许多问题，正是要以这些特征为解决的依据和思考的线索。

1、正方形的“90° 旋转对称性”及其应用

如图，正方形 ABCD 的对角线交于点 O，若以 O 为中心，按顺时针（或逆时针）旋转 90°，则

$A \rightarrow B$ ， $B \rightarrow C$ ， $C \rightarrow D$ ， $D \rightarrow A$ 。即旋转后的图形与原正方形重合，这就是正方形的“90° 旋转对称性”。

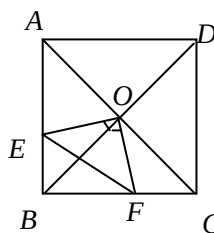
这一性质是正方形本质特征的最为典型的表现，因此有着极广的应用。



例 1 如图，在正方形 ABCD 中，O 是对角线 AC，BD 的交点，过点 O 作 $OE \perp OF$ ，OE，OF 分别交边 AB，BC 于点 E 和 F，若 AE=4，CF=3。

(1) 求 EF 的长；

(2) 求 $\triangle EOF$ 的面积



【观察与思考】(1) 根据正方形的“90° 旋转对称性”，易知在本题中有： $\triangle AEO$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 重合于 $\triangle BFO$ ，在 $Rt\triangle EFB$ 中，可求出 EF 的长。



(2) 由正方形的“90° 旋转对称性”，可知：

$$S_{\text{四边形}OEBF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}, \text{ 进而可求出 } S_{\triangle EOF}.$$

解：(1) 在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle BFO$ 中， $AO = BO, \angle OAE = \angle OBF = 45^\circ, \angle AOE = \angle BOF$ (同为 $\angle EOB$ 的余角)

$$\therefore \triangle AEO \cong \triangle BFO, \text{ 得 } AE = BF = 4$$

$$\therefore BC = BF + FC = 4 + 3 = 7 = AB, \therefore EB = AB - AE = 7 - 4 = 3$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFB \text{ 中, } EB = 3, BF = 4, \text{ 得 } EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

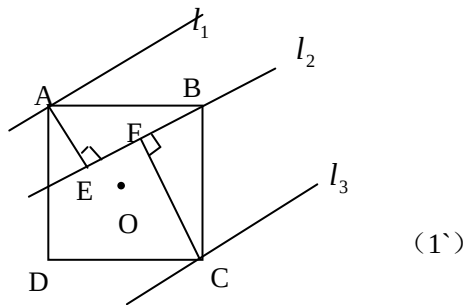
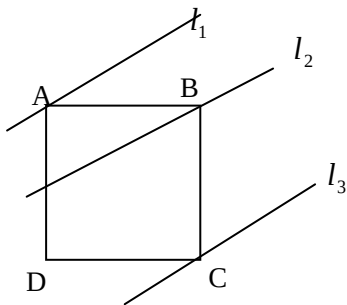
$$(2) \because S_{\text{正方形}ABCD} = AB^2 = 7^2 = 49, \text{ 而 } S_{\text{四边形}OEBF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{49}{4}$$

$$\therefore S_{\triangle EOF} = S_{\text{四边形}OEBF} - S_{\triangle EFB} = \frac{49}{4} - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{25}{4}$$

【说明】对于正方形的“90° 旋转对称性”的认识，不仅帮我们顺利地发现了问题的解决思路，并借助“90° 旋转对称性”，规则地找到了全等三角形的对应元素。另外，在求 $\triangle EOF$ 的面积时更是借助正方形的“90° 旋转对称性”巧妙而有效地沟通了该面积与正方形 $ABCD$ 的面积及 $Rt\triangle EFB$ 面积的关系，使问题快速得解。

例2 如图(1)，四边形 $ABCD$ 是正方形，直线 l_1, l_2, l_3 ，分别经过 A, B, C 三点，且 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，若 l_1 与 l_2 的距离

为 a ， l_2 与 l_3 的距离为 b ，则正方形 $ABCD$ 的面积等于 _____。



(1')

【观察与思考】关键是要把正方形的边长和两个距离 a, b 沟通起来。

若作 $AE \perp l_2$ 点 E ，作 $CF \perp l_2$ 点 F ，则 $AE = a, CF = b$ ，(如图(1'))，这时容易看到：

$$Rt\triangle BAE \xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{绕点 } O \text{ 顺时针}} \text{重合于 } Rt\triangle CBF$$

可知，在 $Rt\triangle CBF$ 中，由 $CF = b, BF = AE = a$ ，可推得 $S_{\text{正方形}ABCD} = CB^2 = BF^2 + CF^2 = a^2 + b^2$

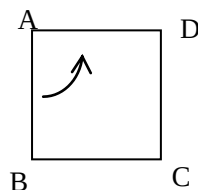
解：填 $a^2 + b^2$

【说明】在本题的解法思考中，正方形的“90° 旋转对称性”发挥着关键的引导作用。

2、正方形邻边的“90° 旋转重合性”及其应用



如图，正方形 ABCD 中，若以顶点 A 为中心，将边 AB 逆时针旋转 90° ，则与边 AD 重合，这一性质可简称为正方形邻边“ 90° 旋转重合性”，这一性质在一些关于正方形题目有着很好的作用。



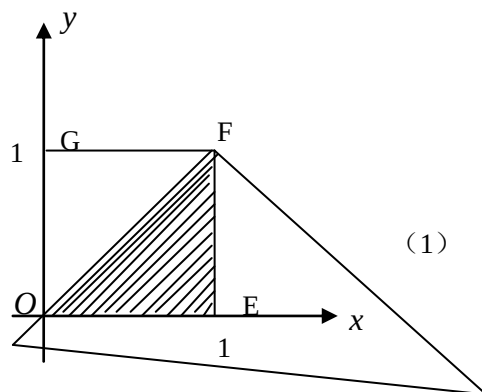
例 3 在平面直角坐标系 xOy 中，四边形 OEFG 为正方形，点 F 的坐标为 $(1, 1)$ 。

将一个最短边长大于 $\sqrt{2}$ 的直角三角形纸片的直角顶点放在对角线 FO 上。

(1) 如图 (1)，当三角形纸片的直角顶点与点 F 重合，一条直线边落在直线 FO 上时，这个三角形纸片与正方形

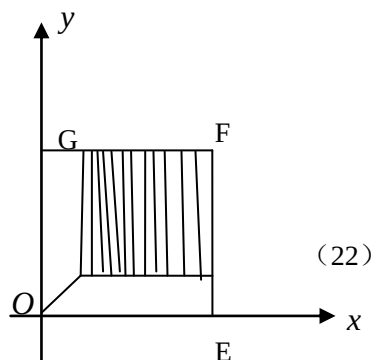
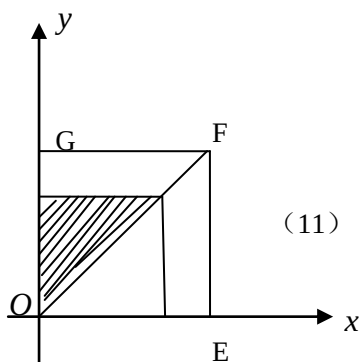
OEFG 重叠部分 (即阴影部分) 的面积为_____。

(2) 若三角形纸片的直角顶点不与点 O, F 重合，且两条直角边与正方形相邻两边相交，当这个三角形纸片与正方形 OEFG 重叠部分的面积是正方形面积的一半时，试确定三角形纸片直角顶点的坐标 (不要求写出求解过程)，并画出此时的图形。



【观察与思考】对于 (1)，易知 $S_{\text{重叠}} = \frac{1}{2}$ ；对于 (2)，容易想到符合条件的两种情况，图 (11) 和 (22)，其

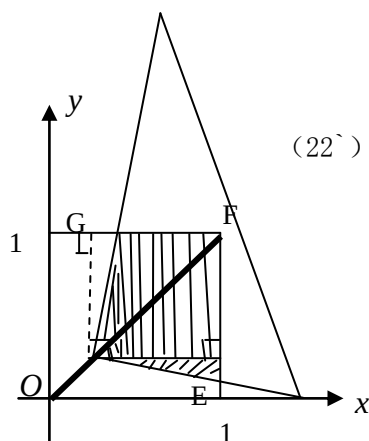
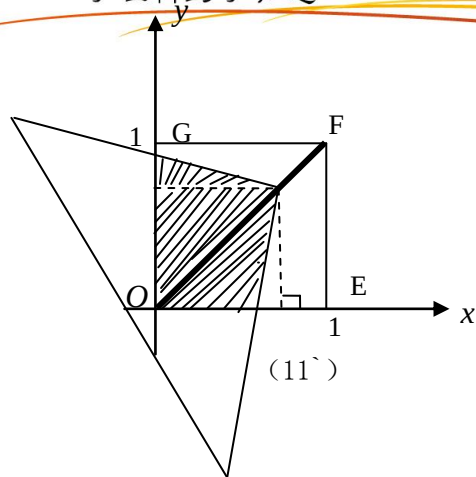
中均有 $S_{\text{阴影正方形}} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形OEFG}}$ ，这时，阴影正方形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



再根据正方形邻边的“ 90° 旋转重合性”，图 (11) 和图 (22) 可分别 (等积地) 演变成一般情况如图 (111) 和图 (222)。

解：(1) $\frac{1}{2}$ ；

(2) 直角顶点的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 此时的图形如图 (11') 和图 (22')



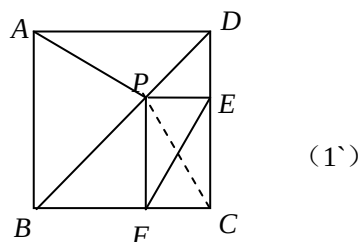
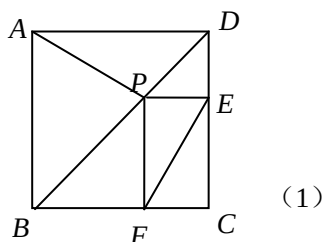
【说明】正是对正方形邻的“90° 旋转重合性”的深刻认识，使本题的解决顺畅而简捷

3、正方形轴对称性及其应用

我们知道，正方形是轴对称图形，它有四条对称轴，正方形的这一性质，也在许多题目中起着很好的作用。

例 4 如图，已知 P 是正方形 ABCD 对角线 BD 上一点， $PE \perp DC$, $PF \perp BC$, E, F 分别是垂足。

求证： $AP = EF$ 。



【观察与思考】注意到 BD 是正方形 ABCD 的一条对称轴，点 C 和 A 关于该对称轴对称，立刻有如下的解。

解：如图 (1') 连结 PC。

根据已知条件四边形 CEPF 是矩形，得 $CP = EF$ 。

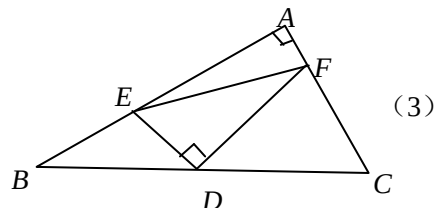
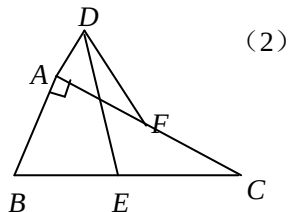
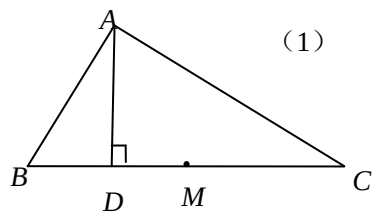
而在 $\triangle DAP$ 和 $\triangle DCP$ 中， $DA = DC$, DP 公用， $\angle ADP = 45^\circ = \angle CDP$,

$\therefore \triangle DAP \cong \triangle DCP$ ，有 $AP = CP$ ，进而有 $AP = EF$

以正方形为背景的题目：大都是沿正方形如上的三种变换性质生成的，其相应的解法从三种变换性质入手，再合适不过，恰当不过！

练习题

1、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle C$, $AD \perp BC$ 于 D, M 为 BC 的中点， $AB = 8cm$ ，则 MD 的长为_____。



2、如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，E, F 分别是 BC, AC 的中点，延长 BA 到点 D，使 $AD = \frac{1}{2}AB$ ，连结 DE, DF。

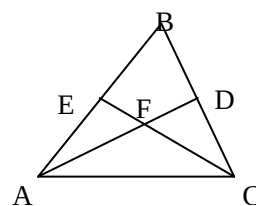


- (1) 求证: AF 与 DE 互相平分; (2) 若 $BC=4$, 求 DF 的长。

3、如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, D 为斜边 BC 的中点, E 为 AB 上任意一点 (不与 A, B 重合), $DF \perp DE$ 于 D, 交 AC 于点 F。

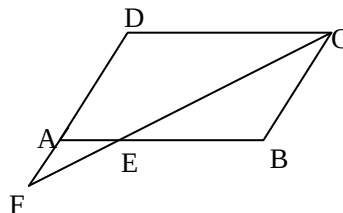
求证: $EF^2 = BE^2 + CF^2$

4、如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=60^\circ$, AD, CE 分别是 $\angle BAC, \angle BCA$ 的平分线, AD, CE 相交于点 F。请你判断 FE 和 FD 之间的数量关系。并说明理由。



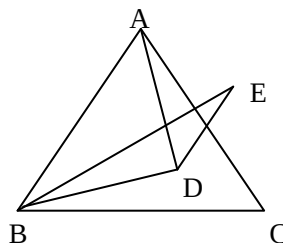
5、已知: 如图, 平行四边形 ABCD 中, $\angle BCD$ 的平分线交 AB 于 E, 交 DA 的延长线于 F。

求证: $AE=AF$



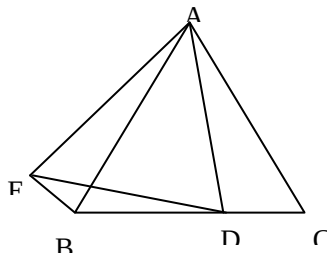
6、如图, D 为等边三角形 ABC 内一点, E 为 $\triangle ABC$ 外部一点, 满足: $DA=DB, BE=BA, \angle DBE = \angle DBC$ 。

求 $\angle BED$ 的度数。



7、如图, D 为等边三角形 ABC 的 BC 边上一点, 以 AD 为边作等边三角形 ADE, 连结 BE。

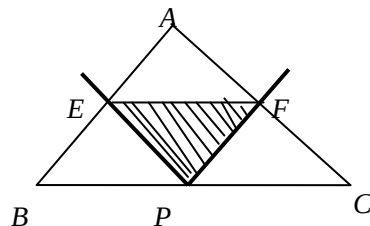
探究: BE 和 AC 有怎样的位置关系? 并说明理由。



8、如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, P 是斜边 BC 的中点, 以 P 为直角顶点的两边分别与边 AB, AC, 交于点



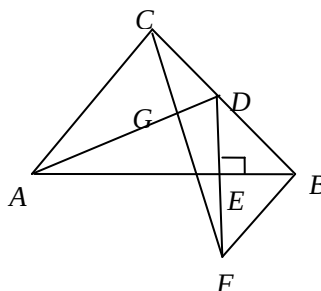
E, F, 当 $\angle EPF$ 绕顶点 P 旋转时 (点 E 不与 A, B 重合), $\triangle PEF$ 也始终是等腰直角三角形, 请你说明理由。



9、如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 BC 的中点, $DE \perp AB$ 垂足为 E, 过点 B 作 $BF \parallel AC$ 交 DE 的延长线于点 F, 连结 CF 交 AD 于 G。

(1) 求证: $AD \perp CF$;

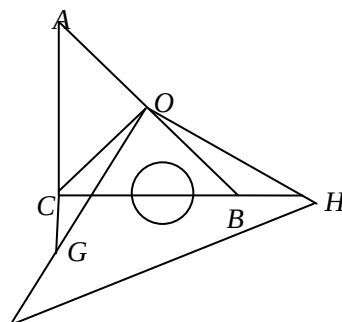
(2) 连结 AF, 试 $\triangle ACF$ 判断的形状, 并说明理由。



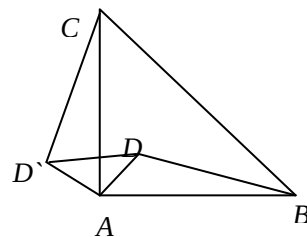
10、如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC=BC$, CO 为中线。现将一直角三角板顶点放在点 O 上并绕点 O 旋转, 若三角板的两直角边分别交 AC, CB 的延长线于点 G, H。

(1) 试写出图中除 $AC=BC$, $OA=OB=OC$ 外其他所有相等的线段。

(2) 请你选一组你写出的相等线段给予证明。



11、D 是等腰直角 $\triangle ABC$ 内一点, BC 是斜边, 如果将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转到 $\triangle ACD'$ 的位置, 则 $\triangle ADD'$ 的度数是_____。

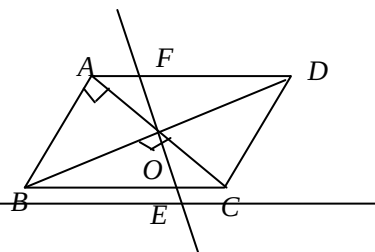


12、已知, 如图, 在平行四边形 ABCD 中, $AB \perp AC$, $AB=1$, $BC=\sqrt{5}$, 对角线 AC, BD 交于 O 点, 将直线 AC 绕点 O 顺时针旋转, 分别交 BC, AD 于点 E, F。

(1) 证明: 当旋转角为 90° 时, 四边形 ABEF 是平行四边形。

(2) 试说明在旋转过程中, 线段 AF 与 EC 总保持相等;

(3) 在旋转过程中, 四边形 BEDF 可能是菱形吗? 如果不能, 请说明理由; 如果能, 说明理由并求出此时 AC 绕点 O 顺时针旋转的度数。

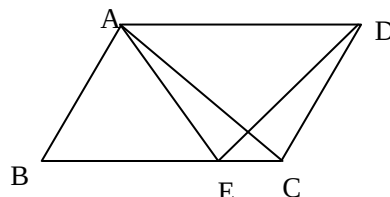




13、如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上一点，且 $AB=AE$ 。

求证：(1) $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ ；

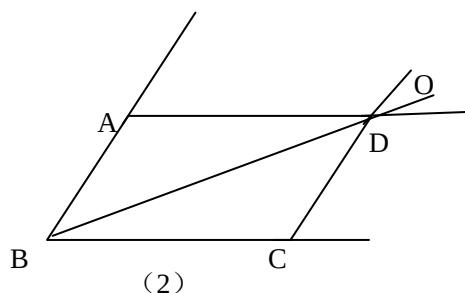
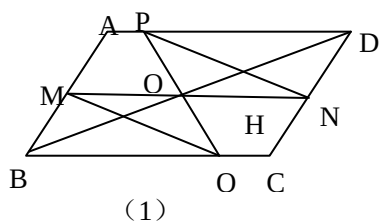
(2) 若 AE 平分 $\angle DAB$, $\angle EAC = 25^\circ$, 求 $\angle AED$ 的度数。



14、已知，如图(1)，在平行四边形 $ABCD$ 中， O 为对角线 BD 的中点，过 O 的直线 MN 交直线 AB 于点 M ，交直线 CD 于点 N ，过 O 的一条直线 PQ 交直线 AD 于点 P ，交 BC 于点 Q ，连结 PN ， MQ 。

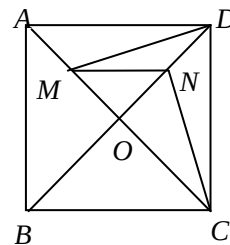
(1) 试证明 $\triangle PON$ 与 $\triangle QOM$ 全等；

(2) 若点 O 为直线 BD 上任意一点，其他条件不变，则 $\triangle PON$ 与 $\triangle QOM$ 又有怎样的关系？试就点 O 在图(2)的位置，画出图形，证明你的猜想。



15、如图，已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于 O ，点 M ， N 分别在 OA ， OD 上，且 $MN \parallel AD$ 。

探究：线段 DM 和 CN 之间的数量关系，写出结论并给出证明。

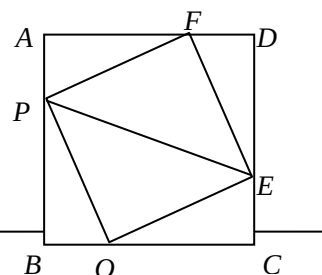


16、如图，在四个动点， P ， Q ， E ， F 分别从正方形 $ABCD$ 的四个顶点出发，沿着 AB ， BC ， CD ， DA 以同样的速度向 B ， C ， D ， A 各点移动。

(1) 判定四边形 $PQEF$ 的形状；

(2) PE 是否总是经过某一个定点，并说明理由；

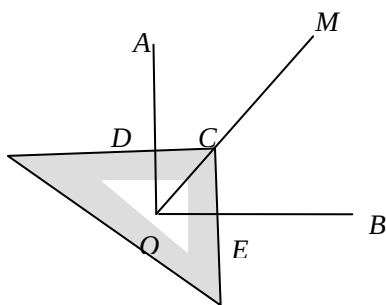
(3) 四边形 $PQEF$ 的顶点位于何处时，其面积最大，最小？各是多少？



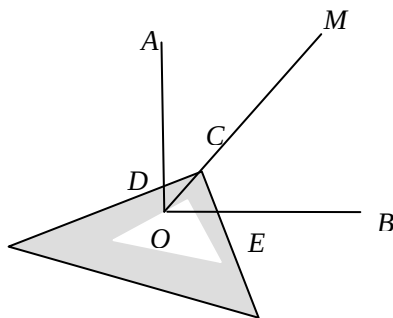


17、已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ，在 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上有一点 C ，将一个三角板的直角顶点与 C 重合，它的两条直角边分别与 OA ， OB （或它们的反向延长线）相交于点 D ， E 。

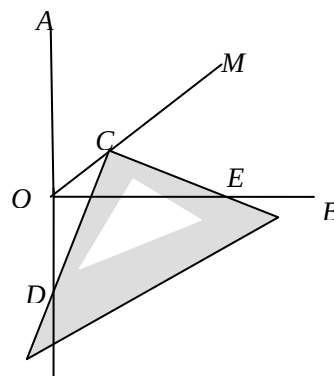
当三角板绕点 C 旋转到 CD 与 OA 垂直时（如图（1）），易证： $OD + OE = \sqrt{2}OC$ 。



(1)



(2)



(3)

当三角形绕点 C 旋转到 CD 与 OA 不垂直时，在如图（2），图（3）这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，线段 OD ， OE ， OC 之间又怎样的数量关系？写出你的猜想，并写出理由。