



关节五

几何计算方法与作用的归纳

当以比单纯逻辑论证宽泛得多的思想和视角来研究几何图形及其和相关的的问题时，“几何计算”的意义和作用，就被大大地加强了。

第一，几何图形的大小及形状、几何图形间的位置关系，在许多时候本来就需要运用相关的数量来表示，无疑地就会涉及到几何量的计算；

第二，当我们注重研究图形的动点问题，图形的变换及运动问题，在坐标系里研究图形的一些问题时，就更是不可避免地要借助几何量的计算；

第三，那些基于实际而模型化为几何图形的应用类问题，更是必须依靠几何量的计算来解决。

因此，《课标》理念下的几何学习，几何计算的份量加大了，层次提高了。

在本关节，我们先将几何计算的基本方法加以归纳，为而后的应用作好充分准备。

一、掌握好几何计算的两种主要方法

几何计算的两种主要方法是：

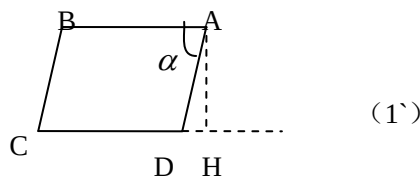
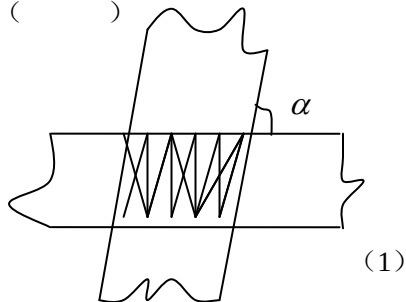
I、借助于解直角三角形；

II、借助于三角形的相似关系。

1、善于用解直角三角形的方法完成几何计算

(1) 要善于依题情恰当地构造直角三角形

例 1 如图，两条宽度都为 1 的纸条，交叉重叠放在一起，且它们的交角为 α ，则它们重叠（如图中阴影）部分的面积是（ ）



A、 $\frac{1}{\sin \alpha}$

B、 $\frac{1}{\cos \alpha}$

C、 $\sin \alpha$

D、 $\cos \alpha$

【观察与思考】将原问题抽象为图 (1')，在菱形 ABCD 中， $\angle A = \angle \alpha$ ，顶点 A 到直线 CD 和直线 CB 的距离都为 1，求菱形 ABCD 的面积。

为此，作 $AH \perp CD$ ，交 CD 的延长线于点 H，则有

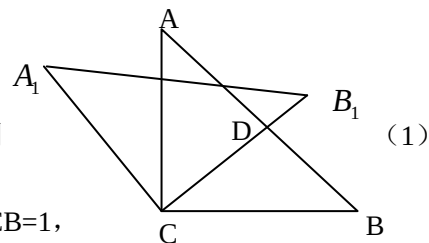
$$S_{\text{菱形}ABCD} = CD \cdot AH = AD \cdot AH, \text{ 其中}$$



$$AH=1, AD = \frac{AH}{\sin \angle ADH} = \frac{1}{\sin \alpha}, \text{即 } S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

解：应选 A。

例 2 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 1$ 。将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 30° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ， CB_1 与 AB 相交于点 D。求 BD 的长。



【观察与思考】注意到 $\angle B = 45^\circ$ ，若作 $DG \perp CB$ 于点 G，如图 (1') 则

可得 $Rt\triangle DBG$ 中， $DG=BG$ ，同时在 $Rt\triangle CDG$ 中， $\angle DCG = 30^\circ$ ，而 $CB=1$ ，从而可构造关于 BD 的方程，求得其值。

解：如图 (1')，作 $DG \perp CB$ 于点 G，设 $BD=x$ ，

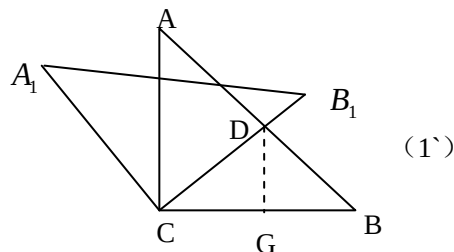
$$\because Rt\triangle DGB \text{ 中, } \angle B = 45^\circ, \therefore DG = BG = \frac{\sqrt{2}}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

在 $Rt\triangle DCG$ 中， $\angle DCG = \angle B_1CB = 30^\circ$ ，

$$\therefore CG = \sqrt{3}DG = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x = \frac{\sqrt{6}}{2} x。$$

$$\because CG + BG = CB = 1, \text{即 } \frac{\sqrt{6}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} x = 1, \text{解得 } x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}。$$

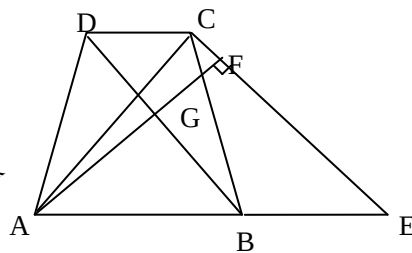
$$\therefore BD \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}。$$



【说明】通过以上两例可以看出，凡涉及到几何图形中量的计算时，应当首先考虑借助于解直角三角形，而在这许多情况下，就需要恰当地构造出相应的直角三角形。

(2) 在图形较为复杂的情况下，要善于恰当地将相关数量转化到某直角三角形

例 3 如图，在等腰梯形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ， $AD=BC$ ，延长 AB 到 E，使 $BE=DC$ ，连结 CE，若 $AF \perp CE$ 于点 F，且 AF 平分 $\angle DAE$ ， $\frac{CD}{AE} = \frac{2}{5}$ ，求 $\sin \angle CAF$ 的值。



【观察与思考】首先，在 $Rt\triangle ACF$ 中， $\sin \angle CAF = \frac{CF}{AC}$ ，剩下的任务

就是去求 CF 和 AC 之间的数量关系，如去求出 CF 用 AC 表示的代数式。为此，去研究相应的条件：

①由 ABCD 为等腰梯形，BECD 为平行四边形 ($BE \parallel CD$ ， $BE=CD$)，可知： $AC=BD=EC$ ；

②由 $AF \perp CE$ 知 $AF \perp BD$ 且 AF 平分 $\angle BAD$ ，得 $\triangle ABD$ 是等腰三角形，设 AF 交 BD 于点 G，则



$$BG = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$$

③由 $BG \parallel EC$, 知 $\triangle ABG \sim \triangle AEF$,

$$\therefore \frac{BG}{EF} = \frac{AB}{AE} = \frac{AE - BE}{AE} = \frac{AE - CD}{AE} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \therefore EF = \frac{5}{3}BG = \frac{5}{3}(\frac{1}{2}AC) = \frac{5}{6}AC.$$

$$\text{如此一来, } CF = EC - EF = AC - \frac{5}{6}AC = \frac{1}{6}AC,$$

$$\text{当然就有 } \sin \angle CAF = \frac{CF}{AC} = \frac{\frac{1}{6}AC}{AC} = \frac{1}{6}.$$

例 4 如图, 把一副三角板如图 (1) 放置, 其中 $\angle ACB = \angle DEC = 90^\circ, \angle A = 45^\circ, \angle D = 30^\circ$, 斜边

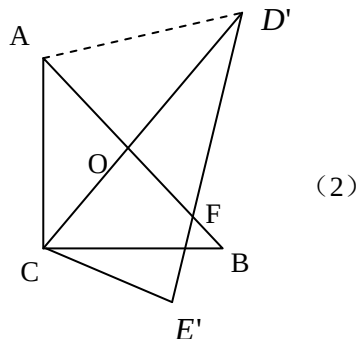
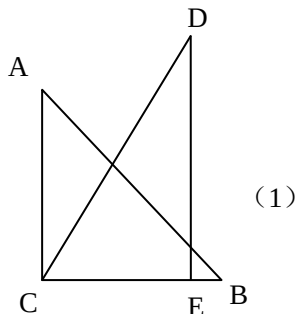
$AB = 6\text{cm}, DC = 7\text{cm}$, 把三角板 DCE 绕点 C 顺时针旋转 15° 得到 $\triangle D'CE'$ 如图 (2), 这时 AB 与 CD' 相交于点

O, $D'E'$ 与 AB 相交于点 F.

(1) 求 $\angle OFE'$ 的度数;

(2) 求线段 AD' 的长;

(3) 若把三角形 $D'CE'$ 绕着点 C 顺时针再旋转 30° 得到 $\triangle D''CE''$, 这时点 B 在 $\triangle D''CE''$ 的内部, 外部, 还是边上? 证明你的判断.



【观察与思考】 对于 (1), 如图 (2'), 设 CB 与 $D'E'$ 相交于点 G, 则可通过 $\angle OFE'$ 与 $\triangle FGB, \triangle CGE'$ 内角的关系, 求得 $\angle OFE'$ 的值;

对于 (2), 可先推出 $\angle AOD' = 90^\circ$, 并导出 OA, OD' 的长;

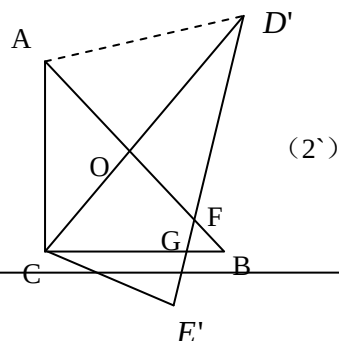
对于 (3), 设直线 CB 交 $D'E''$ 于 B' , 应在 $Rt\triangle B'CE''$ 中计算出 CB' 的长, 为此为基础进行判断.

解: (1) 设 CB 与 $D'E'$ 相交于点 G, 如图 (2'), 则:

$$\angle OFE' = \angle B + \angle FGB = \angle B + \angle CGE'$$

$$= \angle B + [180^\circ - (\angle BCE' + \angle E')]$$

$$= 45^\circ + [180^\circ - (15^\circ + 90^\circ)] = 120^\circ.$$





(2) 连结 AD' ,

$$\because \angle AOD' = \angle OD'F + \angle OFD' = \angle OD'F + (180^\circ - \angle OFE') = 30^\circ + (180^\circ - 120^\circ) = 90^\circ$$

又 $\because AC = BC, AB = 6\text{cm}$, 而 $\angle ACO = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$, $\therefore OA = OB = OC = 3\text{cm}$ 。

在 $Rt\triangle AOD'$ 中, $AO = 3, OD' = CD' - CO = 7 - 3 = 4(\text{cm})$

$$\therefore AD' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})。$$

(3) 点 B 在 $\triangle D''CE''$ 内部, 理由如下:

设 BC (或延长线) 交 $D'E''$ 于点 B' , $\angle B'CE'' = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$,

$$\text{在 } Rt\triangle B'CE'' \text{ 中, } CB' = \sqrt{2}CE'' = \frac{7\sqrt{2}}{2}(\text{cm}),$$

$$\text{又 } \because CB = 3\sqrt{2}(\text{cm}) < \frac{7\sqrt{2}}{2}(\text{cm}), \text{ 即 } CB < CB', \therefore \text{点 B 在 } \triangle D''CE'' \text{ 内部。}$$

【说明】从这两个例子可以看出, 在图形复合, 情况比较复杂时为了在直角三角形中完成计算, 还常需要和题目的条件, 图形的其他特征相结合, 通过有关的性质及定理, 把一些数值和数量关系转化到这个直角三角形中去, 因此, 这样的计算也必须以熟练地掌握几何图形的基本性质为基础。

2、掌握好用两个三角形相似关系实施与完成几何计算

当两个三角形相似时, 就会构成相关线段的比例等式, 而在比例等式当中, 若有一条线段是未知的, 而其他线段是已知的或是未知线段的代数式, 那么这样的比例等式就成了未知线段的方程, 借此方程求出未知线段, 因此, 用两个三角形之间的相似关系, 也可以实施与完成许多几何计算。

(1) 要有借助相似三角形完成几何计算的高度意识

例 5 已知, 三个边长分别为 2, 3, 5 的正方形如图排列, 则图中阴影分部的面积为_____。

【观察与思考】可以用直接法或间接法, 但都需要计算出有关线段的长, 这就需要借助于图中的直角三角形的相似关系。

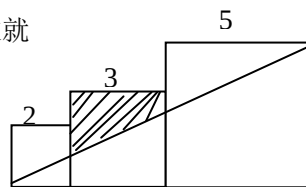
解: 如图 (1'), $\because Rt\triangle BCM \sim Rt\triangle BEN \sim Rt\triangle BHI$

$$\text{则 } \frac{CM}{BC} = \frac{EN}{BE} = \frac{IH}{BH} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

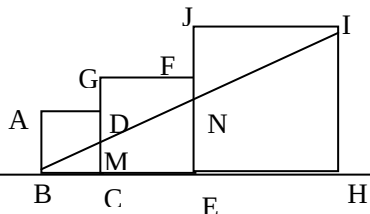
$$\therefore CM = 2 \times \frac{1}{2} = 1。$$

$$EN = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{梯形} MNFG} = \frac{1}{2} \times 3 \times \left[\left(3 - \frac{5}{2} \right) + (3 - 1) \right] = \frac{15}{4}$$



(1)





(1')

【说明】正是借助于图中的相似三角形，使得线段 CM，EN，从而线段 GM，FN 的计算得以落实。

例 6 如图，在矩形 ABCD 中，AC，BD 相交于 O，OE ⊥ BC 于点 E，连结 ED，交 OC 于点 F，作 FG ⊥ BC 于点 G。

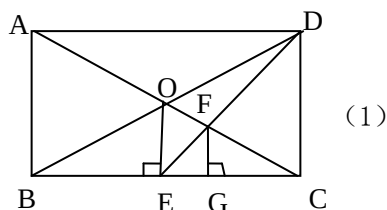
(1) CG 和 CB 有怎样的数量关系？说明理由；

(2) 若想在 CB 上确定一点 H，使 $CB = 4CH$ ，请依据 (1) 得出的结果，说出画图的方法（不必说明理由）

【观察与思考】显然，图中有一些相似三角形，比如：

$\triangle CFG \sim \triangle COE \sim \triangle CAB$ (I 组)； $\triangle EFG \sim \triangle EDC$ (II 组)

$\triangle OEF \sim \triangle CDF$ (III 组)； $\triangle FEC \sim \triangle FDA$ (IV 组) 等。



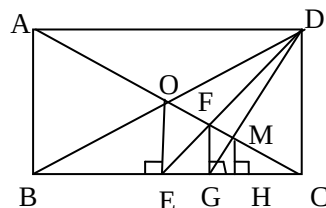
通过分析可知，应用到第 I 组，因为其中含有线段 CG 和 CB (即 $\triangle CFG$ 与 $\triangle CAB$) 而其中的 CF 又包含在第 III 组的三角形中，这样就有：

解：(1) 有结论 $CB = 3CG$. 在 $\triangle OEF$ 和 $\triangle CDF$ 中，由 $OE \parallel CD$ ，易知 $\triangle OEF \sim \triangle CDF$ ，

$$\therefore \frac{CF}{OF} = \frac{CD}{OE} = \frac{2}{1}, \text{ 即 } \frac{CF}{CO} = \frac{2}{3}, \text{ 也即 } \frac{CF}{CA} = \frac{CF}{2CO} = \frac{6}{2} = \frac{1}{3}.$$

在 $\triangle CFG$ 和 $\triangle CAB$ 中， $\because FG \parallel AB$,

$$\therefore \triangle CFG \sim \triangle CAB, \therefore \frac{CG}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } CB = 3CG.$$



(1')

(2) 应这样确定点 H，连结 DG，交 CO 于点 M，作 $MH \perp CB$ 于 H，则应用 $CB = 4CH$ 如图 (1')。

【说明】从以上两例可以看出，在不少情况，需从较多的三角形相似关系中选取最为直接的能够实现计算目的的两对或几对相似三角形，这既需要对图形性质有深刻的认识，也需要善于对问题情意及要达到的目的进行深入分析。

(2) 要善于发现和构造相似三角形

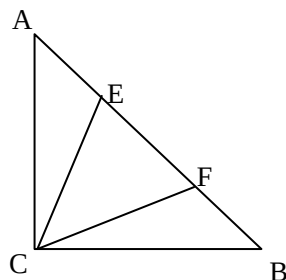
例 7 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$ ，点 E，F 在 AB 上， $\angle ECF = 45^\circ$ ，设 $\triangle ABC$ 的面积为 S。

$$\text{求证：} S = \frac{1}{2} AF \cdot BE.$$

【观察与思考】注意到 $\angle ECF = \angle A = \angle B = 45^\circ$ ，就容易发现有 $\triangle ACF \sim \triangle BEC$ 。

【证明】在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BEC$ 中，

$$\angle A = \angle B = 45^\circ, \angle ACF = \angle ACE + \angle ECF = \angle ACE + 45^\circ = \angle ACE + \angle A = \angle BEC,$$





$\therefore \triangle ACF \sim \triangle BEC$, 得 $\frac{AF}{BC} = \frac{AC}{BE}$, 即 $AF \cdot BE = AC \cdot BC$ 。

$$\therefore S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AF \cdot BE。$$

【说明】利用相似三角形解决问题，首先就要善于从图形中找到相似三角形，这就需要对三角形相似的条件不仅熟悉，且能灵活运用。

例 8 如图，在边长为 8 的正方形 ABCD 中，P 为 AD 上一点，且 $AP = 5$, BP 的垂直平分线分别交正方形的边于点 E, F, Q 为垂足，则 EQ:EF 的值是 ()

A、5:8 B、5:13 C、5:16 D、3:8

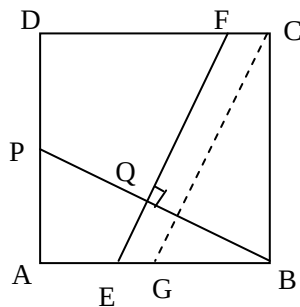
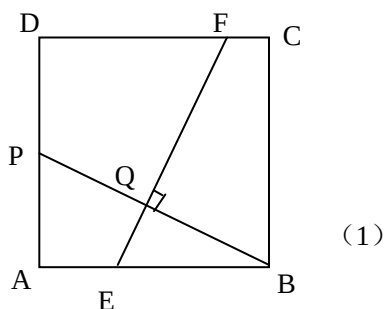
【观察与思考】容易看出 $Rt\triangle BEQ \sim Rt\triangle BPA$, 得 $\frac{EQ}{BQ} = \frac{AP}{AB}$, 既

$$EQ = \frac{1}{2} BP \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16} BP。$$

而根据正方形的性质，易知，如图 (1')，把 FE 平移至 CG 的位置，由 $Rt\triangle CGB \cong Rt\triangle BPA$, 有 $EF = CG = BP$,

$$\therefore EQ:EF = \frac{5}{16} BP:BP = 5:16$$

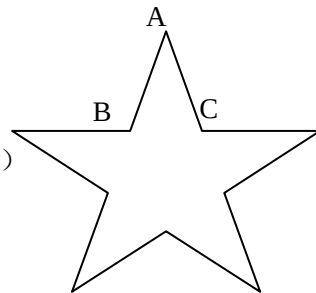
解：选 C。



【说明】在本题是将三角形相似、三角形全等结合起来，分别将线段 EQ, EF 借助 BP 表示出来，从而算出这两条线段的比。

例 9 某装修公司要在如图 (1) 所示的五角星图形中，沿边每隔 20 厘米装一盏闪光灯，若 $BC = (\sqrt{5} - 1)$ 米，则共需要装闪光灯 ()

A、100 盏 B、101 盏 C、102 盏 D、103 盏



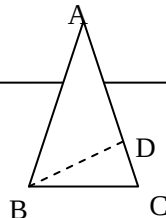
(1)

【观察与思考】研究 $\triangle ABC$ ，由 $BC = (\sqrt{5} - 1)$ 计算出 AB 的长来，如图 (2)

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, $\angle B = \angle C$ (正五边形的外角) $= 72^\circ$, $\angle A = 36^\circ$,

作 $\angle CBD = \angle A$, 交 AC 于点 D, 则 $AD = BD = BC$, 又 $\triangle BCD \sim \triangle ABC$,

$$\text{得: } \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AB},$$





$$\therefore AB = AC = AD + DC = BC + \frac{BC^2}{AB}$$

$$\text{即 } AB^2 - BC \cdot AB - BC^2 = 0, \text{ 也既 } \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - \frac{AB}{BC} - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{解得 } \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\therefore AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot (\sqrt{5}-1) = 2.$$

$$\text{灯的盏数应为 } \frac{2 \times 10}{0.2} = 100$$

解：选 A。

【说明】在本题，关键是根据特定条件，构造出 $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ 。

可以看出：认识到相似三角形的计算功能，善于选用相似三角形，进而适时又恰当地构造出相似三角形，是充分发挥相似三角形在几何计算中重要作用的思想基础和知识基础。

二、重新认识几何计算的数学功能

通过几何计算，不仅仅是求出几条线段的长，几个角的度数，几个图形的面积，其更多的作用：

- 几何计算是深入研究图形性质和图形间关系的重要手段；
- 几何计算是用代数形式刻画变动中图形性质的主要凭借。

也就是说，许多以图形为基础的研究性问题，许多几何与代数相结合的问题，许多图形的变换及其它形式运动的问题，都是以计算为基础，为依据，为桥梁。这里，我们只举两个较简单的例子，实为而后进一步探讨与研究的提示。

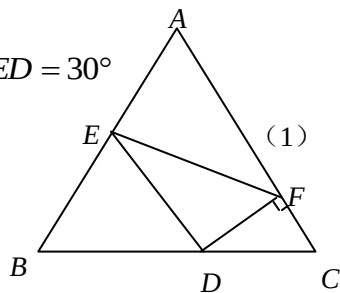
例1 如图(1)， $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，D 为 BC 边上一个动点，作 $DE \parallel CA$ ，交 AB 于点 E， $DF \perp AC$ 于点 F，当 BD 的长取什么值时，可使 $FE \perp AB$ ？

【观察与思考】本题是研究数量与位置关系的对应性，可借助“逆向探究”的方法。如图(1)，假若 $FE \perp AB$ ，则 $\angle AFE = 30^\circ$ ，必有 $\angle DFE = 60^\circ$ ，从而有 $Rt\triangle EFD \sim Rt\triangle DCF$ 。由此求出 BD 的长，再逆过来予以判定。

解：如图，若 $\angle DFE = 60^\circ$ ，则 $\angle EFA = 30^\circ$ ，进而 $\angle FEA = 90^\circ$ ，又有 $\angle FED = 30^\circ$

$\therefore Rt\triangle DCF \sim Rt\triangle EFD$ 。

设 $BD = x$ ，则 $DC = 4 - x$ ， $DF = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x)$ ， $ED = BD = x$ ，

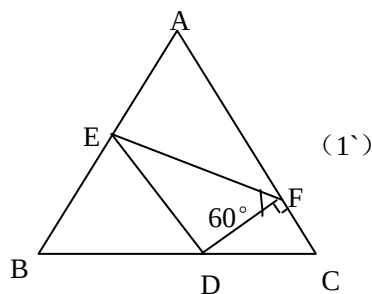




$$\text{又} \therefore \frac{CF}{DF} = \frac{DF}{ED} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}(4-x) = \sqrt{3}x, \text{ 解得 } x = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \text{当 } BD = \frac{12}{5} \text{ 时, 可使 } FE \perp AB \text{ 成立.}$$



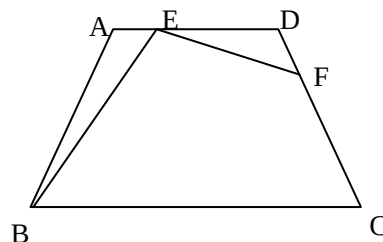
【说明】在本题，虽用了直角三角形一些数量关系，但更主要是要借助于三角形相似。

例2 在梯形ABCD中，AD//BC，AB=DC=AD=6， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点E，F分别在线段AD，DC上，（点E与点A，D不重合）且 $\angle BEF = 120^\circ$ ，设 $AE = x$ ， $DF = y$ 。

(1) 求y与x的函数表达式；

(2) 当x为何值时，y有最大值，最大值是多少？

【观察与思考】这是由数量关系刻画几何量之间的对应关系，或说是几何与代数结合的问题，其解决的依据就是通过“几何计算”。



解：(1) 在梯形ABCD中，AD//BC，AB=DC=AD=6， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = \angle D = 120^\circ, \therefore \angle AEB + \angle ABE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = 120^\circ, \therefore \angle AEB + \angle DEF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle ABE = \angle DEF. \therefore \triangle ABE \sim \triangle DEF. \therefore \frac{AE}{DF} = \frac{AB}{DE}.$$

$$\therefore AE = x, DF = y, \therefore \frac{x}{y} = \frac{6}{6-x}$$

$\therefore y$ 与 x 的函数表达式是

$$y = \frac{1}{6} \cdot x(6-x) = -\frac{1}{6}x^2 + x (0 < x < 6);$$

$$(2) y = -\frac{1}{6}x^2 + x = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 时, } y \text{ 有最大值, 最大值为 } \frac{3}{2}.$$

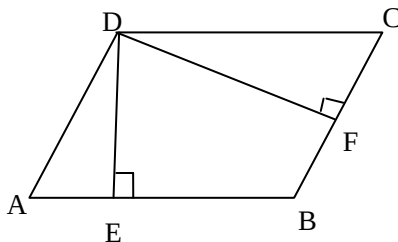
【说明】象本题这样的几何与代数综合题，正是以“几何计算”作为主要解决工具的。



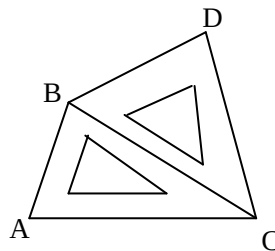
充分重视解直角三角形和两三角形相似的数学功能吧，让它们在更多的综合型问题中发挥更大的作用！

练习题

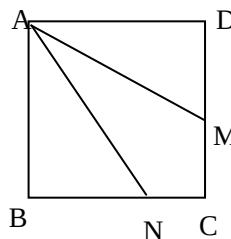
- 1、已知，如图平行四边形 $ABCD$ 中， $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp BC$ 于 F ， $AB=8$ ， $AD=6$ ，平行四边形 $ABCD$ 的面积为 40，求 $\sin \angle EDF$ 的值。



- 2、一副三角尺如图摆放在一起，连结 AD ，求 $\angle ADB$ 的余切值。



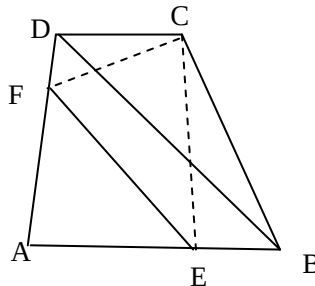
- 3、如图，在正方形 $ABCD$ 中， M 为 DC 的中点， N 为 BC 上的一点，且 $BN=3NC$ ，求 $\cos \angle MAN$ 。



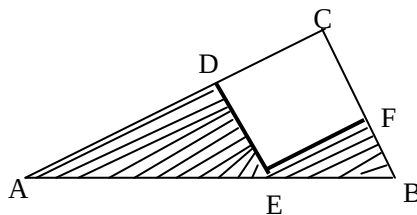
- 4、如图，四边形 $ABCD$ 为一梯形纸片， $AB \parallel CD$ ， $AD=BC$ ，翻折纸片 $ABCD$ ，使点 A 与点 C 重合，折痕为 EF 。已知 $CE \perp AB$ 。

(1) 求证： $EF \parallel BD$ ；

(2) 若 $AB=7$ ， $CD=3$ ，求线段 EF 的长。

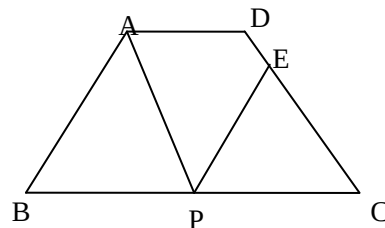


- 5、如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， E 为斜边 AB 上一点， $AE=2$ ， $EB=1$ ，四边形 $DEFC$ 为正方形，则阴影部分的面积为_____。

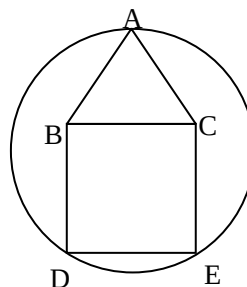


6、如图，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = 3\text{cm}$ ， $BC = 7\text{cm}$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， P 为 BC 上一点，连结 AP ，过点 P 作 PE 交 DC 于点 E ，使得 $\angle APE = \angle B$ 。

- (1) 求 AB 的长；
- (2) $\triangle ABP$ 和 $\triangle PCE$ 是否相似，并说明理由；
- (3) 若 $DE:EC = 5:8$ ，求 BP 的长。

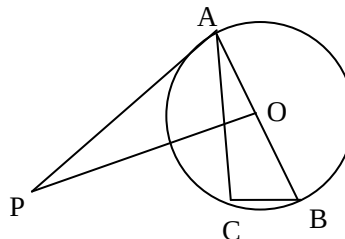


7、已知多边形 $ABDEC$ 是由边长为 2 的等边三角形 ABC 和正方形 $BDEC$ 组成，一圆过 A ， D ， E 三点，求该圆的半径的长。



8、如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， PA 是 $\odot O$ 的切线，过点 B 作 $BC \parallel OP$ 交 $\odot O$ 于点 C ，连结 AC 。

- (1) 求证： $\triangle ABC \sim \triangle POA$ ；
- (2) 若 $AB = 2$ ， $PA = \sqrt{2}$ ，求 BC 的长。（结果保留根号）





9、如图， AB 是半圆 O 的直径，四边形 $CDEF$ 是内接正方形，在正方形 $CDEF$ 的右侧有一正方形 $FGHK$ ，点 G 在 AB 上， H 在半圆上， K 在 EF 上，已知正方形 $CDEF$ 的面积为 16，请计算出正方形 $FGHK$ 的面积。

