



第二篇 新视角与基本思考策略

※新视角易有新发现，帮助开辟新途径；

※基本思考策略是认识规律的具体化，它是解数学题的“最大、最高技巧”。

关节七

从变换视角提高识图与构图的眼力

思考与解决几何图形的问题，主要是借助基本图形的性质（定义，定理等）和图形之间的关系。从关节四我们已经知道，许多基本图形的性质都源于这个图形本身的“变换特征”，而最为重要和最为常用的图形关系“全等三角形”极多的情况也是同样具有“变换”形式的联系。本来两个三角形全等是指它们的形状和大小都一样，和相互间的位置没有直接关系，但是，在同一个问题中涉及到的两个全等三角形，绝大多数都有一定的位置关系，或成轴对称关系，或成平移关系，或成旋转的关系（包括中心对称）。这样，在解决具体的几何图形问题时，图形本身所显示或暗示的“变换特征”，对我们识别出、构造出基本图形和图形关系（如全等三角形），有着极为重要的启发和引导的作用。

解决图形问题的能力，核心要素是善于从综合与复杂的图形中识别和构造出基本图形及基本图形关系，而“变换视角”正好能提高我们这种识别与构造的眼力。

一、从“轴对称”视角识别图形与构造图形

1、当题目的基本背景是轴对称图形时

（1）当背景图形是基本的轴对称图形时

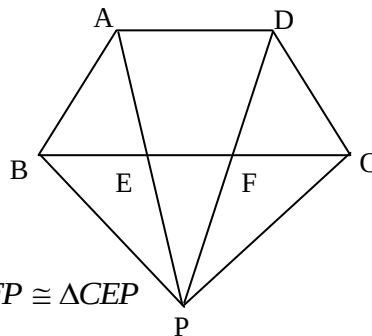
等腰三角形（包括等边三角形）、矩形、菱形、正方形、等腰梯形、圆等基本图形都是轴对称图形，有关这些图形的许多问题恰是由这种轴对称性衍生出来的。这时，相应的对称性就正好昭示着问题的实质并暗示着解决的途径。

例1 如图，梯形ABCD中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，P为梯形ABCD外一点，PA，PD分别交线段BC于点E，F且 $PA = PD$ 。

（1）写出图中三对你认为全等的三角形（不再添加辅助线）

（2）选择你在（1）中写出的全等三角形中的任意一对进行证明。

【观察与思考】注意到点P向AD所作的垂线，既是等腰梯形ABCD的对称轴，也是等腰三角形PAD的对称轴，即整个图形是该垂线为轴对称的。因此，凡是此直线（虽然没有明确地画出来）为对称的两个三角形，都必然是全等的。



解：（1）① $\triangle ABP \cong \triangle DCP$ ；② $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ ；③ $\triangle BEP \cong \triangle CFP$ ；④ $\triangle BFP \cong \triangle CEP$

（2）下面就 $\triangle ABP \cong \triangle DCP$ ；给出证明。

$\because AD \parallel BC, AB = DC, \therefore \angle BAD = \angle CDA$ 。



又 $\because PA = PD$, 即 $\triangle PAD$ 为等腰三角形, $\therefore \angle PAD = \angle PDA$ 。

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle DCP$ 中,

$$PA = PD, AB = DC, \angle BAP = \angle BAD - \angle PAD = \angle CDA - \angle PDA = \angle CDP,$$

所以 $\triangle ABP \cong \triangle DCP$ 。

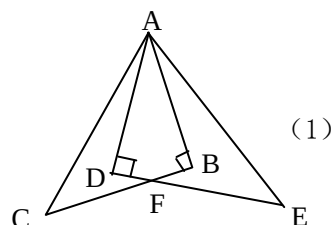
【说明】可以看出, 在证明两个轴对称的三角形全等时, 用轴对称的方式寻找和叙述全等的理由, 既规则有序, 又简捷易行。

(2) 当背景图形是复合式的轴对称图形时

有的题目, 背景图形比较复杂些, 但它仍是轴对称图形, 这时对问题解决的思考, 也要特别注意从这一轴对称性入手。

例2 已知, 如图(1), $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle ADE$, $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$ 。试以图中标有字母的点为端点, 连结出两条新的线段, 如果你连结的两条线段满足相等、垂直或平行关系中的一种, 那么请你把它写出来并证明。

【观察与思考】容易看到并推知: 整个的图形是以A, F两点所在的直线为轴对称的, 其中, D和B, C和E分别为对称点, 连结出所有可连结的线段, 如图(1'), 并设AF和BD交于点M, 和EC交于点N, 根据轴对称的性质可知有: ① $DC = BE$; ② $AF \perp DB, AF \perp CE$; ③ $DB \parallel CE$



解: 如图(1'), 连结DB, DC, BE, CE, 连结AF交DB于点M, 并延长交CE于点N, 有结论:

$$DC = BE, AF \perp DB, AF \perp CE, DB \parallel CE.$$

证明如下:

$$\because Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle ADE,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ADC \text{ 和 } \triangle ABE \text{ 中, } AD = AB, AC = AE, \\ \angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = \angle EAD - \angle DAB = \angle BAE.$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABE, \therefore DC = BE, \angle ACD = \angle AEB.$$

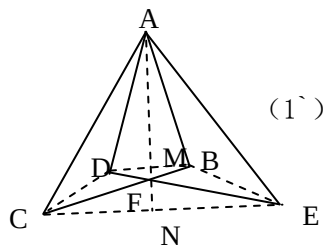
$$\text{在 } \triangle DCF \text{ 和 } \triangle BEF \text{ 中 } DC = BE, \angle DFC = \angle BFE, \\ \angle DCF = \angle ACB - \angle ACD = \angle AED - \angle AEB = \angle BEF.$$

$$\therefore \triangle DCF \cong \triangle BEF, \therefore FD = FB, FC = FE.$$

$$\because AD = AB, FD = FB, \therefore AF \text{ 为 } DB \text{ 的垂直平分线, 当然有 } AF \perp DB,$$

与上同理, 可推得 $CE \perp AN$ (即 $AF \perp CE$),

$$\therefore DB \parallel CE.$$



【说明】正是把握住了本题背景图形的轴对称这一核心特征, 使我们对问题有了最本质的认识, 而后的诸项问题, 都沿这一核心特征被发现和解决。

(3) 沿着背景图形的轴对称性寻找需要添加的辅助线

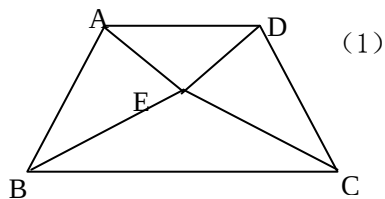
当题目的背景图形是轴对称图形时, 如果需要作辅助线才能解决, 那么辅助线的作法也往往是为了更好地揭示和利用这种轴对称性。

例3 已知, 如图(1), 在梯形ABCD中, $AD \parallel BC$, E为梯形内一点, 且有 $EA = ED, EB = EC$ 。



求证：四边形 ABCD 是等腰梯形

【观察与思考】根据图形所给的条件，可以知道整个图形应是轴对称图形，其对称轴就是过点 E 且和 AD 垂直的直线，因此，以这条对称轴为轴线，通过具有轴对称位置的三角形全等，来推得 $AB=DC$ 。



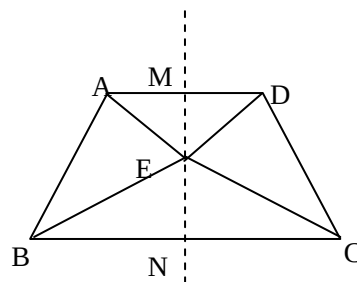
证明：过点 E 作直线 $MN \perp AD$ ，分别交 AD, BC 于点 M, N，如图 (1')。根据已知，也有 $MN \perp BC$ 。

在等腰三角形 EAD 中， $\because EM \perp AD, \therefore \angle AEM = \angle DEM$ ；

在等腰三角形 EBC 中， $\because EN \perp BC, \therefore \angle BEN = \angle CEN$ 。

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle DEC$ 中， $EA = ED, EB = EC$ ，
 $\angle AEB = 180^\circ - \angle AEM - \angle BEN$
 $= 180^\circ - \angle DEM - \angle CEN = \angle DEC$ 。

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DEC, \therefore AB = DC$ ，又知 $AD \parallel BC, \therefore ABCD$ 为等腰梯形。



【说明】在本题，是图形的轴对称性启示我们作上述的辅助线，使得解法简单明快。

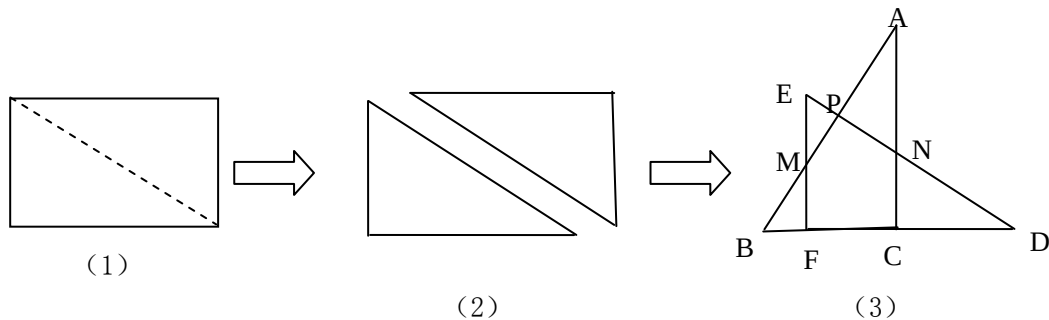
2、当题目的基本背景不是轴对称图形时，应善于发现和运用其中的轴对称成分

有的题目，整个背景图形不是轴对称图形，但某个或某些部分却具有轴对称性，如果我们善于并在局部恰当运用这一对称性，也会帮我们更快更好地获得解决方法。

例 4 将一张矩形纸片沿对角线剪开（如图（1）），得到两张三角形纸片（如图（2）），再将这两张三角形纸片摆放成如图（3）的形式，使点 B, F, C, D 在同一条直线上。

（1）求证： $AB \perp ED$ ；

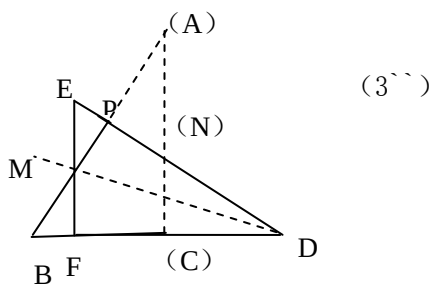
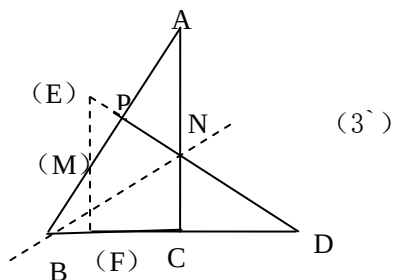
（2）若 $PB = BC$ ，请找出图中与此条件有关的一对全等三角形，并给予证明。



【观察与思考】对于（1），很容易推得结论；对于（2），根据题目的条件和图（3）的构成方式，可以看出它有以下特征：

在图（3'）中，（即在题目的图（3）中去掉 EP, EF 这两条线段后剩下的部分），它是关于 BN 所在的直线为对称的（由 $BP = BC, \angle ACB = \angle DPB = 90^\circ, \angle A = \angle D$ 可保证），由此得到关于 BN 对称的三角形全等，即有：

$\triangle ABC \cong \triangle DBP; \triangle APN \cong \triangle DCN$ 。



在图 (3'') 中, (即是题目的图 (3) 中去掉 AP, AC 这两条线段后剩下的部分), 它是关于直线 MD 为轴对称的 (由 $BP = EF, \angle BPD = \angle EFD = 90^\circ, \angle E = \angle B$ 可保证)。由此得到关于 MD 对称的三角形是全等的, 即有:

$$\triangle DEF \cong \triangle DBP; \triangle MEP \cong \triangle MBF.$$

实际上, (2) 的证明已包含于以上的分析之中了。

解: (1) 证明: $\because \angle A + \angle B = 90^\circ, \angle A = \angle D,$

$$\therefore \angle D + \angle B = 90^\circ \therefore AB \perp DE.$$

(2) 若 $PB = PC$, 则有 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DBP$, 理由是

$$\because \angle B = \angle B, \angle A = \angle D, BP = BC,$$

$$\therefore Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DBP$$

图中与此条件有关的全等三角形还有以下几对:

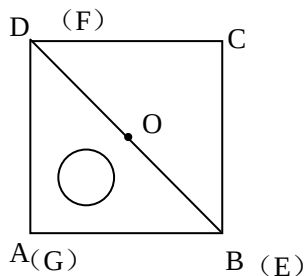
$$Rt\triangle APN \cong Rt\triangle DCN; Rt\triangle DEF \cong Rt\triangle DBP; Rt\triangle MEP \cong Rt\triangle MBF;$$

【说明】由本题可以看出, 从变换的视角认识和研究图形, 会对图形看得更深刻、更全面、更多维、随之, 解决的办法也就能更顺利地找到。

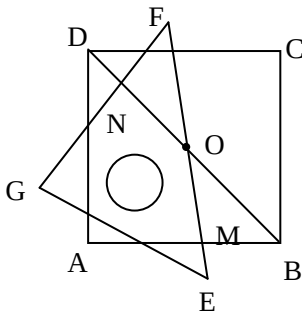
例 5 如图 (1), 一等腰直角三角尺 GEF 的两条直角边与正方形 ABCD 的两条边分别重合在一起, 现正方形 ABCD 保持不动, 将三角尺 GEF 绕斜边 EF 的中点 O (点 O 也是 BD 的中点) 按顺时针方向旋转。

(1) 如图 (2), 当 EF 与 AB 相交于点 M, GF 与 BD 相交于点 N 时, 通过观察或测量 BM, FN 的长度, 猜想 BM, FN 满足的数量关系, 并证明你的猜想。

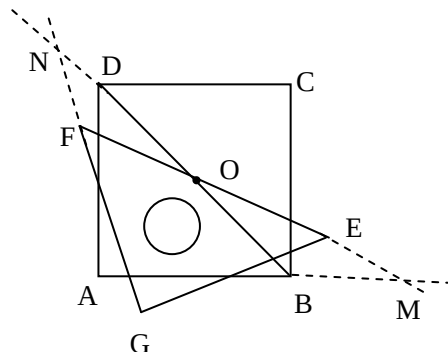
(2) 若三角尺 GEF 旋转得到如图 (3) 所示的位置时, 线段 FE 的延长线与 AB 的延长线相交于点 M, 线段 BD 的延长线与 GF 的延长线相交于点 N, 此时, (1) 中的猜想还成立吗? 若成立; 请证明; 若不成立; 请说明理由。



(1)



(2)



(3)

【观察与思考】实际上, 问题所涉及到的条件和结论, 都与 CD, CB 两边没有关系, 原题相当于两个全等的等腰直角三角形, 从完全重合的位置将其中一个绕“斜边中点”旋转, 那么, 图 (2), 图 (3) 对应的就是下边的图 (2'), 图 (3')。



图(2')和图(3')中,每个图形都是以直线PO为对称的,当然,对称的三角形是全等的,对应的线段和对应的角分别是相等的。

简解: (1) $BM = FN$, 根据是 (见图(2'))

在 $\triangle OBM$ 和 $\triangle OFN$ 中, $OB = OF, \angle B = \angle F = 45^\circ, \angle BOM = \angle FON$,

$\therefore \triangle OBM \cong \triangle OFN$,

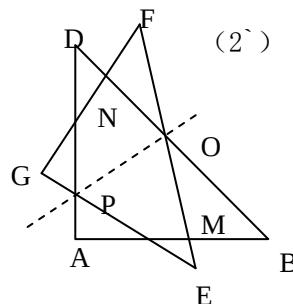
$\therefore BM = FN$ 。

(2) $BM = FN$ 的结论仍然成立, 根据是 (见图(3'))

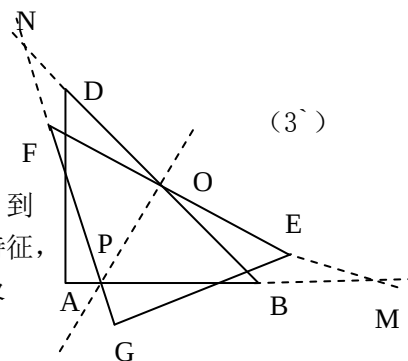
在 $\triangle OBM$ 和 $\triangle OFN$ 中,

$OB = OF, \angle OBM = \angle OFN = 135^\circ, \angle BOM = \angle FON$,

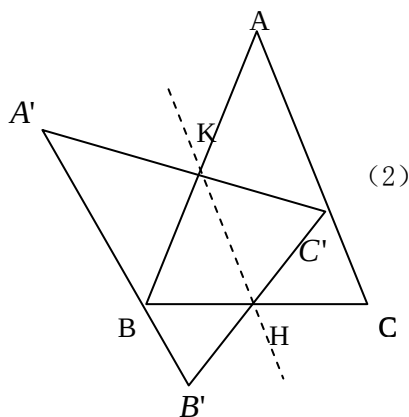
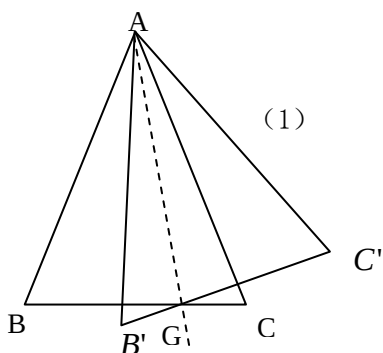
$\therefore \triangle OBM \cong \triangle OFN, BM = FN$ 。



【说明】在本题的分析与思考中,从图(2)到图(2') (同样,由图(3)到图(3')),舍弃了无关的部分图形,更清晰地显示出了“轴对称”的本质特征,而这一特征的被发现和捕获,使得对结论的猜想的形成,及至证明的得到及论述,都变得豁然明朗,顺理成章了。



顺便指出:对任何一个原本的轴对称图形,绕其对称轴上一点旋转 α 角 ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$),那么,由旋转前和旋转后两图形成的新图形,都是一个新的轴对称图形。如:在图(1)中,等腰三角形 ABC 绕其顶点 A 逆时针旋转 α 角到 $\triangle AB'C'$, BC 与 $B'C'$ 相交于 G ,则组合起的新图形是以 AG 为轴的对称图形,在图(2)中,等腰三角形 ABC 绕其底边上的中点 H 逆时针旋转 α 角到 $\triangle A'B'C'$, AB 与 $A'C'$ 相交于点 K ,则组合起的新图形是以 KH 为轴的对称图形。



因此,轴对称图形在一些适当的旋转下,可以产生新的轴对称图形。

由以上两例可以看出,在复合图形中抽取出轴对称部分,常对问题的解决有着非常重要的作用。

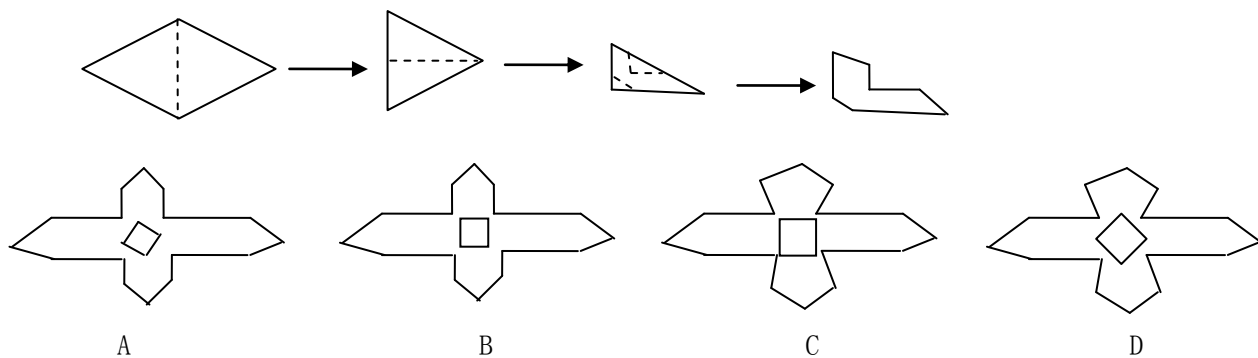
3、图形的折叠与轴对称



对图形进行折叠，其被折叠的部分，在折叠前与折叠后的图形是关于折痕所在的直线对称的。有关对图形折叠问题的考查，主要侧重在两个方面：一个方面是沿着折叠与展开进行考查，实际上是考查对“折叠”的轴对称意义的理解；另一方面是侧重于“折叠”所造成的图形形状关系及数量间关系的考查。

(1) “折叠”与相应的“打开”都是轴对称操作

例6 将一张菱形纸片，按图（1），图（2）的方式沿虚线依次对折后，再沿图（3）中的虚线剪开，最后将图（4）中的纸片打开铺平，所得的图案应该是（ ）

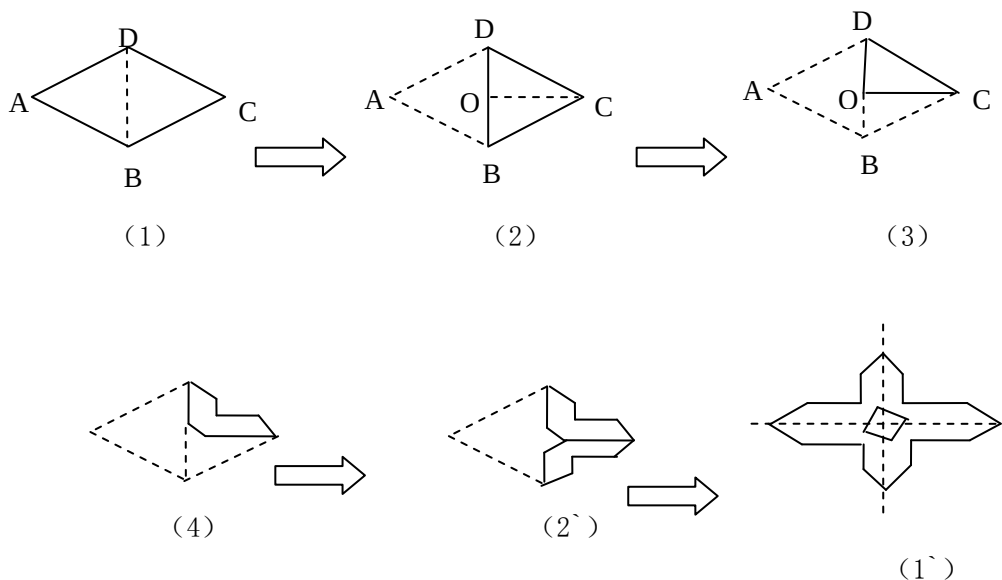


【观察与思考】看题目所述的对图形的操作过程：

第一步两个“折叠”过程（见下边的图）由图（1）到图（2）反映的是 $\triangle DAB$ 和 $\triangle DCB$ ，关于 DB 轴对称；由图（3）到图（4）反映的是 $\triangle CBO$ 和 $\triangle CDO$ 关于 CO 轴对称；

第二步是在“折叠”成的最后图形（3）中剪出图（4）

第三步将原图（4）打开平铺，实际上是在图（4）的基础上做与第一步相反的两次轴对称图形；即由图（4）作轴对称到图（2'），再到由图（2'）作轴对称到图（1'）



解：应选 A

【说明】这类折叠、剪切、打开铺平的问题都可如上程序式地予以解决。

(2) 图形折叠造成的全等和相似

更多的图形折叠问题，是围绕有关图形的形状、位置和数量关系进行研究的，解决的思考要点，可归为这三个方面：第一方面，搞清原图形的特征；第二方面，被折叠部分和它落下生成的部分的全等关系；第三方面，由此形成的新图



形与新关系。

例 7 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 16, BC = 8$, 将矩形沿对角线 AC 折叠, 点 D 落在 E 点处, 且 CE 与 AB 交于点 F , 求 AF 的长。

【观察与思考】原图形为矩形, 由折叠知 $Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle ACD$, 并有 $Rt\triangle AFE \cong Rt\triangle CFB$ 。这样, 在 $Rt\triangle AFE$ 中, 通过勾股定理构造关于 AF 的方程可求得其长。

解: 在 $Rt\triangle AFE$ 和 $Rt\triangle CFB$ 。 $AE = AD = CB, \angle AFE = \angle CFB$,

$\therefore Rt\triangle AFE \cong Rt\triangle CFB \therefore AF = CF$ 。

在 $Rt\triangle AFE$ 中, $AE = AD = 8, EF = CE - CF = CD - AF = 16 - AF$,

$AF^2 = AE^2 + EF^2$, 即 $AF^2 = 8^2 + (16 - AF)^2$

也即 $64 + 256 - 32AF = 0$,

解得 $AF = 10$ 。

【说明】“折叠”问题的解决, 其要点是在对原图和折叠准确把握的基础上, 选择并利用好所形成的新图形的特征和数量。

二、从“旋转变换”视角识别图形与构造图形

要在图形相关问题中恰当而及时地运用“旋转变换”的性质, 最根本的是要搞清楚哪些基本图形、哪些复合图形、哪些指定条件的图形是和“旋转变换”相关的, 又是怎样相关的, 掌握了这些内在的特征和规律, 才有利于将“旋转变换”的性质运用到新的问题情景中去。

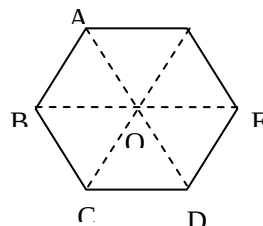
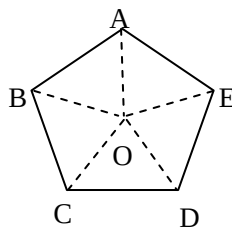
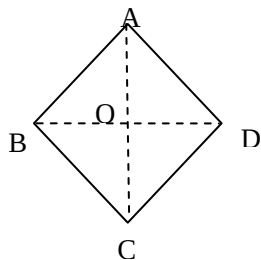
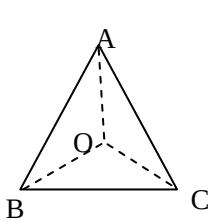
我们说, “旋转变换”常运用在以下四种背景之中, 它们是:

- I、当出现具有“旋转对称性”的基本图形及其变形时;
- II、当出现“两组等边做成有公共顶点的等角”时;
- III、当出现“有公共顶点的等线段”时;
- IV、当题目条件中含有“旋转变换”时。

下边我们分别加以研究和总结。

1、当背景出现具有“旋转对称性”的基本图形或其变形时

设 O 是如下正多边形的中心 (即外接圆的圆心)。



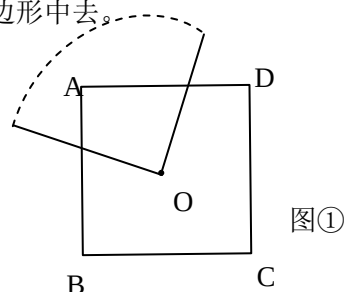
正 (等边) 三角形 ABC 绕其中心旋转 120° 与其自身重合, 所以正三角形是 120° 的旋转对称图形; 正方形 $ABCD$



绕其中心旋转 90° 与其自身重合，所以正方形是 90° 的旋转对称图形；正五边形是 72° 的旋转对称图形，正六边形是 60° 的旋转对称图形……正 n 边形是 $(\frac{360}{n})^\circ$ 的旋转对称图形。

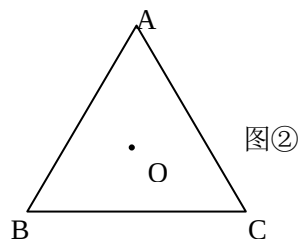
我们把这些正多边形叫做具有旋转对称性的基本图形，实际上，对于等边三角形和正方形的旋转对称性，在关节四已做了较详细的介绍，而这些性质和应用，大都可以类比地推广到正 n 边形中去。

例 1 (1) **操作与证明**：如图①， O 是边长为 a 的正方形 $ABCD$ 的中心，将一块半径足够长，圆心角为直角 的扇形纸板的圆心放在 O 点处，并将纸板绕 O 点旋转，求证：正方形 $ABCD$ 的边被纸板覆盖部分的总长度为定值；



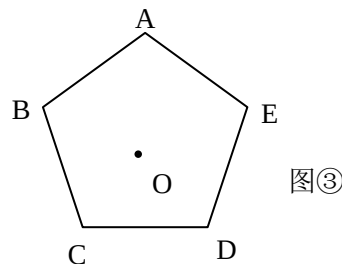
图①

(2) **尝试与思考**：如图②，，将一块半径足够长的扇形纸板的圆心放在边长为 a 的正三角形或正五边形的中心 O 点处，并将纸板绕 O 点旋转，当扇形纸板的圆心角为_____时，正三角形的边被纸板覆盖部分的总长度为定值 a ；当扇形纸板的圆心角为_____时，正五边形的边被纸板覆盖部分的总长度也为定值 a ；



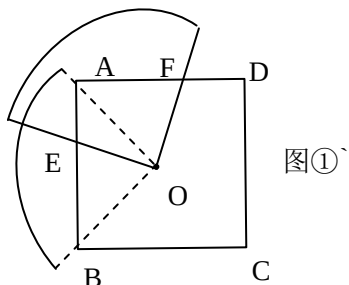
图②

(3) **探究与引伸**：一般地，将一块半径足够长的扇形纸板的圆心放在边长为 a 的正 n 边形的中心 O 点处，并将纸板绕 O 点旋转，当扇形纸板的圆心角为_____时，正 n 边形的边被纸板覆盖部分的总长度为定值 a ；这时正 n 边形被纸板覆盖部分的面积是否也为定值？若为定值，写出它与正 n 边形面积 S 之间的关系；若不是定值，请说明理由。

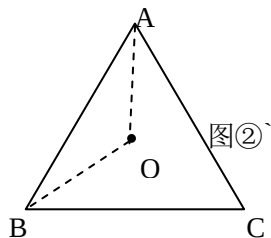


图③

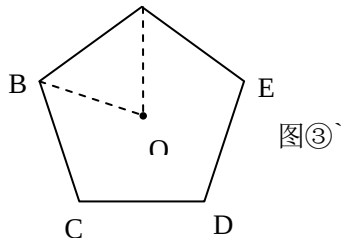
【观察与思考】(1) 如图①`，设扇形的两直径分别经过正方形的两顶点，则正方形的边被覆盖的部分的总长等于其一条边长，即  $a$ ，而通过正方形的  $90^\circ$  旋转对称性，可知在图①的情况下，被覆盖的边的总长度等于 图①` 中被覆盖的边的总长度。



图①`



图②`



图③`

(2) 由 (1) 的思考的类比（只需考虑扇形的直径经过两顶点），如图②`，图③`，即可得合理的猜想。

(3) 可由以上的关于 (1)，(2) 的思考类比推想出相关的结论。

解：如图①`，设扇形的半径分别与正方形的边 AB, AD 交于点 E, F ，连结 OA, OB 。



在 $\triangle OEB$ 和 $\triangle OFA$ 中, $OB = OA$, $\angle OBE = \angle OAF = 45^\circ$, $\angle BOE = \angle AOF$ (同为 $\angle EOA$ 的余角),

$\therefore \triangle OEB \cong \triangle OFA$, 得 $BE = AF$ 。

$\therefore AE + AF = AE + BE = AB = a$

即正方形 ABCD 被扇形覆盖的边的总长度为定值, 等于正方形一条边的长度 a 。

(2) 120° ; 70° 。

(3) $\frac{360^\circ}{n}$; 面积也为定值; 这个定值为 $\frac{1}{n} \cdot S_{\text{正}n\text{边形}}$ 。

【说明】本题猜想的形成和相关证明的获得, 都是正 n 边形的“旋转对称性”在发挥着基础性和导向性的作用。

例 2 用两个全等的等边三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 拼成菱形 ABCD, 把一个含 60° 角的三角尺与这个菱形叠合, 使三角尺的 60° 角的顶点与点 A 重合, 两边分别与 AB, AC 重合, 将三角尺绕点 A 按逆时针方向旋转。

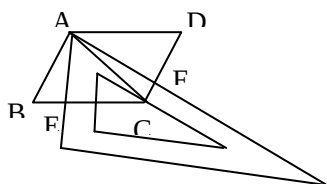


图 (1)

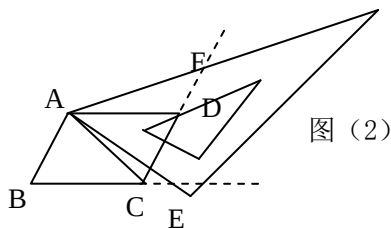


图 (2)

(1) 当三角尺的两边分别与菱形的两边 BC, CD 相交于点 E, F 时, (如图 (1)), 通过观察或测量 BE, CF 的长度, 你能得出什么结论? 并证明你的结论;

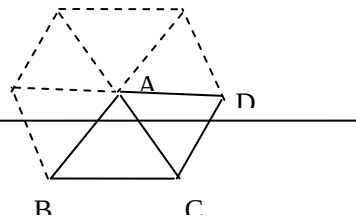
(2) 当三角尺的两边分别与菱形的两边 BC, CD 的延长线相交于点 E, F 时 (如图 (2)), 你在 (1) 中得到的结论还成立吗? 简要说明理由。

【观察与思考】这里的背景图形是特殊的菱形 $ABCD$ ($\angle B = \angle D = 60^\circ$), $\angle BAD = \angle BCD = 120^\circ$, 这立刻使我们联想到如右下图 (※) 的正六边形, 菱形 ABCD 可以看作是它的三分之一, 顶点 A 正相当于这个正六边形的中心, 这样一来, 相应的问题 (1) 与 (2) 不都是这个正六边形“ 60° 的旋转对称性”的具体表现和一种别样的运用形式吗?

无论在 (1) 的情况, 还是 (2) 的情况, 均有 $\triangle ABE \xrightarrow[\text{旋转 } 60^\circ]{\text{绕点 A 逆时针}} \text{重合于 } \triangle ACF$ 。

解: (1) 有结论: $BE = CF$, 证明如下:

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中, $AB = AC$, $\angle ABE = \angle ACF = 60^\circ$,





$$\angle BAE = \angle BAC - \angle EAC = 60^\circ - \angle EAC = \angle EAF - \angle EAC = \angle CAF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF, \therefore BE = CF$$

(2) 仍有 $BE = CF$ ，理由如下：

图(※)

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中， $AB = AC, \angle ABE = \angle ACF = 60^\circ$,

$$\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = 60^\circ + \angle CAE = \angle EAF + \angle CAE = \angle CAF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF, \therefore BE = CF$$

【说明】I、由于将本题和正六边形的“ 60° 的旋转对称性”恰当地联系了起来，使对原问题形成了居高临下的认识，思考与解决起来自然就轻松自如了。

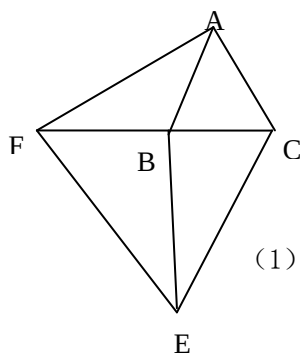
II、其实，等腰直角三角形的“ 90° 的旋转重合性”（见关节四的介绍），也是由正方形的“ 90° 的旋转对称性”衍生出来的，因为等腰直角三角形可以看作是正方形的“一半”。

III、数学学习（包括解题）的能力，很多重要的一个方面便是善于发现和归纳总结出具有统摄作用的规律和原理，这样的规律和原理越多，越有大的统摄面，便说明知识掌握的越深刻，应用起来便越灵活、越有效。

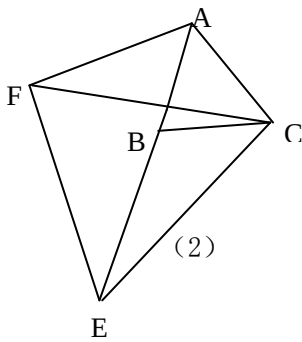
2、当背景图形出现“两组等边做成有公共顶点的等角”时

先看例子：

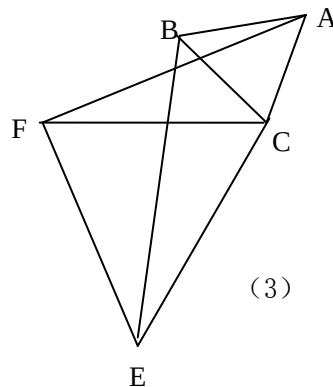
例3 如图(1)， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CEF$ 是两个大小不等的等边三角形，且有一个公共顶点 C，连结 AF 和 BE。



(1)



(2)



(3)

(1) 线段 AF 和 BE 有怎样的大小关系？证明你的结论；

(2) 将图(1)中的 $\triangle CEF$ 绕点 C 旋转一定的角度，得到图(2)，(1)中的结论还成立吗？作出判断并说明理由；

(3) 将图(1)中的 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转一定的角度，画出变换后的图形，(1)中的结论是否成立？

(4) 根据以上的活动，归纳你的发现。

【观察与思考】我们将(3)所要求的图形也画出来，如图(3)，仔细地观察这三个图形容易发现共同的关系：

$\triangle ACF$ $\xrightarrow[\text{旋转 } 60^\circ]{\text{绕点 C 逆时针}}$

重合于 $\triangle BCE$ 。当然这三种情况都有 $AF = BE$ 。



解：（1）有结论： $AF = BE$ ，证明如下：

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中， $AC = BC, FC = EC, \angle ACF = \angle BCE = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE, \therefore AF = BE$

（2） $AF = BE$ 这一结论仍然成立，理由是：

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中， $AC = BC, FC = EC$ ，

$\angle ACF = \angle ACB - \angle FCB = 60^\circ - \angle FCB = \angle FCE - \angle FCB = \angle BCE$ ，

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE, \therefore AF = BE$

（3）如图（3）， $AF = BE$ 这一结论也是成立的，（我们也写出理由）。

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中， $AC = BC, FC = EC$ ，

$\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 60^\circ + \angle BCF = \angle FCE + \angle BCF = \angle BCE$ ，

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE, \therefore AF = BE$

（4）只要两个等边三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CEF$ 有公共顶点 C ，不论两个三角形旋转至怎样的位置，总有 $AF = BE$ 。

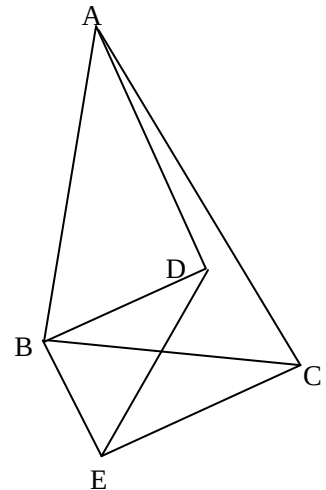
【说明】事实上，在本题的（1），（2），（3）这三种情况中，始终保持了 $CA = CB$ （一组等边） $CF = CE$ （又一组等边） $\angle ACF = \angle BCE$ （两组等边构成有公共顶点 C 的等角），这就保证了 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 可以旋转重合，即全等。一般地，当像本题这样由“两组等边做成有公共顶点的等角”，就提供了旋转重合的基础，由此可以导出一些规律的数量关系与位置关系。

请你研究下题：

如图，已知 $\angle ABC = \angle DBE = 90^\circ$ ， $DB = EB, AB = CB$ 。

（1）求证： $AD = CE, AD \perp CE$ ；

（2）若 $\triangle DBE$ 绕点 B 旋转到 $\triangle ABC$ 的外部，其他条件不变，则（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由。

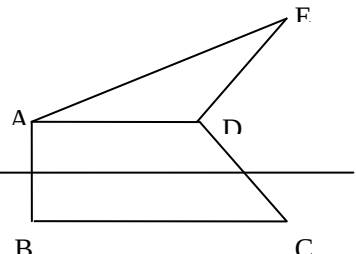


3、当背景图形出现“有公共端点的等线段”时

先看例子：

例 4 如图，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC, AB \perp BC, AD = 2, BC = 3$ ，作 $DE \perp DC$ ，且取 $DE = DC$ ，连结 AE ，则 $\triangle ADE$ 的面积为（ ）

A、1 B、2 C、3 D、不能确定



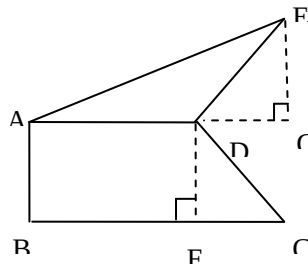


【观察与思考】关键是求出 $\triangle ADE$ 中边 AD 上的高，注意到在背景图形中有 $DE = DC$ ，它们是相等的线段，且有公共顶点 D ，这就具备了旋转重合的前提，若作 $DF \perp BC$ 于点 F ， $EG \perp AD$ ，交 AD 的延长线于 G ，则

$Rt\triangle DCF \xrightarrow[\text{旋转 } 90^\circ]{\text{绕点 } D \text{ 逆时针}} Rt\triangle DEG$ 则

$$EG = CF = 1, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AB \cdot EG = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

解：应选 A。

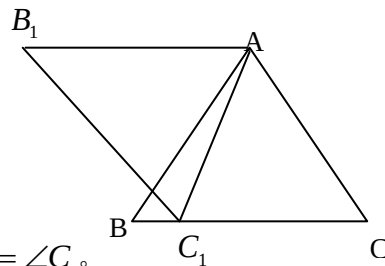


【说明】由 $DG = DE$ ，且 $\angle CDE = 90^\circ$ ，看到 $Rt\triangle DCF$ 和 $Rt\triangle DEG$ 的“ 90° 旋转重合”关系，是本题获解的关键。因此，当图中出现“有公共端点的等线段时”，应联想“旋转变换”。

4、当题目的条件中出现旋转变换时

一般来说，当题目条件中出现旋转变换时，就要考虑如何运用旋转变换的性质问题得以更好的解决。

例 5 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，将 $\triangle ABC$ 点 A 沿顺时针方向旋转得到 $\triangle AB_1C_1$ ，使点 C_1 落在直线 BC 上，（点 C_1 与点 C 不重合），判断边 AB_1 和边 CB 的位置关系，并给出证明。



【观察与思考】直观感觉像是有 $AB_1 \parallel CB$ ，沿着这一猜想去思考。

据 $AB = BC$ ，和 $\triangle ABC$ 旋转至 $\triangle AB_1C_1$ ，立刻有 $\angle B_1AC_1 = \angle B_1C_1A = \angle BAC = \angle C$ 。

而 AC 旋转至 AC_1 ，且 C_1 在 BC 上，就得到 $\angle AC_1C = \angle C$ 。两者结合就有 $\angle B_1AC_1 = \angle AC_1C$ ，这不就是 $AB_1 \parallel CB$ 的保证吗！

解：有结论 $AB_1 \parallel CB$ 。（证明略）

【说明】在本题中，关键是用到 $\triangle AB_1C_1$ 由 $\triangle ABC$ 旋转得到，及点 C_1 在 BC 上，且 AC_1 由 AC 旋转得到，总之，把旋转的性质当作条件充分利用，是这类题目获解的保证。

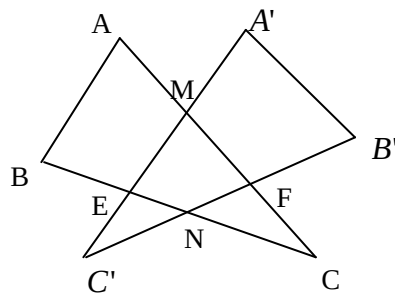
图形性质与图形间关系的发现，既要借助于推理，但更要借助于直觉和观察，变换的意识与变换的视角，会使这种直觉更敏锐、使这种观察更具眼力。



练习题

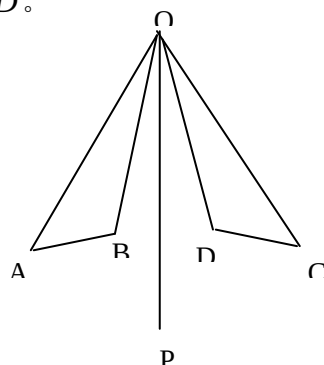
1、已知，如图， $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, $AM = A'M$, BE 和 $B'F$ 一定相等吗？

对判断说明理由。



2、已知：如图， OP 是 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的平分线， $OA = OC, OB = OD$ 。

求证： $AB = CD$ 。



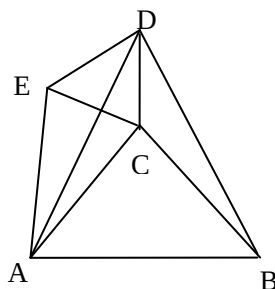
3、如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $AC = BC$ ，以斜边 AB 为一边作等边三角形 ABD ，使点 D, C 在 AB 的同侧，再以 CD 为一边作等边三角形 CDE ，使 E, C 在 AD 的异侧，若 $AE = 1$ ，则 CD 的长为（ ）

A、 $\sqrt{3}-1$

B、 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

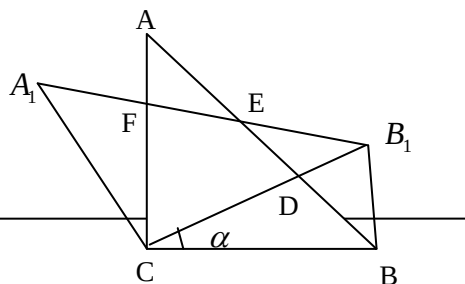
C、 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

D、 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$



4、如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, AC = BC = 1$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转角 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ ，得到 $\triangle A_1B_1C$ ，

连结 BB_1 ，设 CB_1 交 AB 于 D, A_1B_1 分别交 AB, AC 于点 E, F ，在图中不添加其他线段的情况下，请找出一对全等三角形（ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C$ 除外），并加以证明；



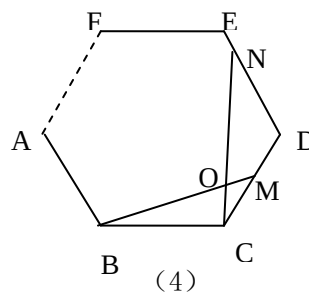
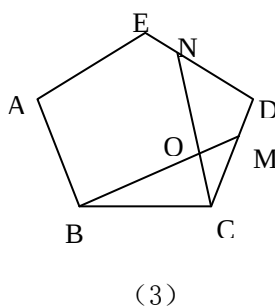
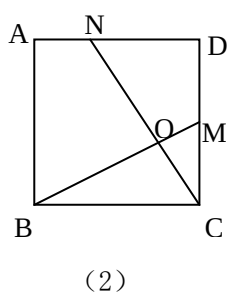
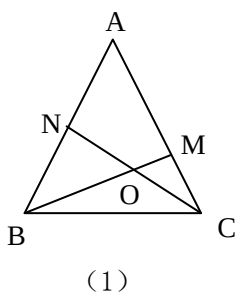


5、问题背景 某课外学习小组在一次学习研讨中，得到了如下两个命题：

①如图（1），在正三角形 ABC 中， M, N 分别是 AC, AB 上的点， BM, CN 相交于点 O ，若 $\angle BON = 60^\circ$ ，
则 $BM = CN$ ；

②如图（2），在正方形 $ABCD$ 中， M, N 分别是 CD, AD 上的点， BM, CN 相交于点 O ，若 $\angle BON = 90^\circ$ ，
则 $BM = CN$

③如图（3），在正五边形 $ABCDE$ 中， M, N 分别是 CD, DE 上的点， BM, CN 相交于点 O ，若 $\angle BON = 108^\circ$ ，
则 $BM = CN$ ；

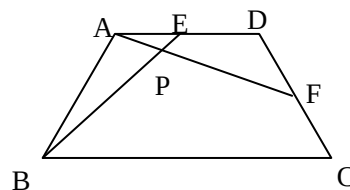


任务要求

- (1) 请你从（1），（2），（3）三个命题中选择一个进行证明；
- (2) 请你继续完成下面的探索：

如图（4），在正 $n(n \geq 3)$ 边形 $ABCDEF \dots$ 中， M, N 分别是 CD, DE 上的点， BM, CN 相交于点 O ，问当 $\angle BON$ 等于多少度时，结论 $BM = CN$ 成立？（不要求证明）

7、在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC, \angle C = 60^\circ, AD = CD$ 。 E, F 分别在 AD, CD 上， $DE = CF, AF, BE$ 交于点 P ，请你量一量 $\angle BPF$ 的度数，并证明你的结论。

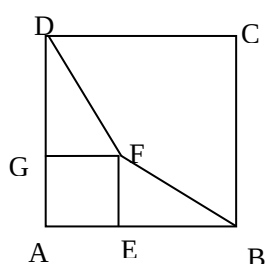




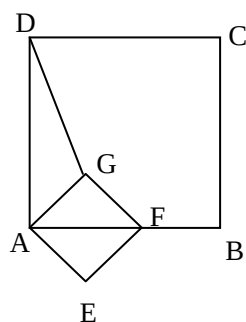
8、已知正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 有一个公共点 A ，点 G, E 分别在线段 AD 和 AB 上。

(1) 如图(1)，连结 DF, BF ，若将正方形 $AEFG$ 绕点 A 按顺时针方向旋转，判断命题：“在旋转过程中，线段 DF 与 BF 的长度始终相等”是否正确？若正确请证明；若不正确请举例说明。

(2) 如图(2)，若将正方形 $AEFG$ 绕点 A 按顺时针方向旋转，连结 DG ，在旋转过程中，你能否找到一条线段与线段 DG 的长度始终相等，并以图(2)为例说明理由。



(1)

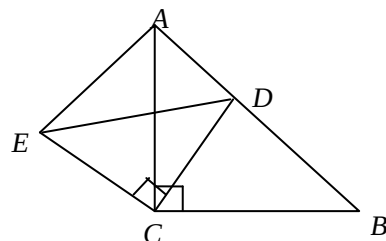


(2)

9、已知，如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， D 为 AB 边上一点。

求证：(1) $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ；

(2) $AD^2 + AE^2 = DE^2$ 。



10、如图， $\triangle ABC$ 是直角三角形， BC 是斜边，将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转后，能与 $\triangle ACP'$ 重合，若 $AP = 3$ ，则 PP' 的长=_____。

