



关节十一

“存在性”问题和“最值”问题的解决方法

一、关于存在性问题

1、什么样的情况会引发出“存在性问题”？

从一个整体情况或一个变化过程中，判断满足某种特殊要求的情况是否存在，并在存在时将其寻找出来，这样的问题就是“存在性”问题。

如：

题 1 如某月的月历，像图中那样用方框框住 4 个数字，是否存在以下情况：使框住的 4 个数字和为 100？为 90？若存在，请写出这 4 个数字，若不存在，请说明理由。

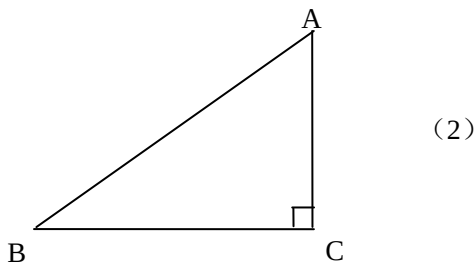
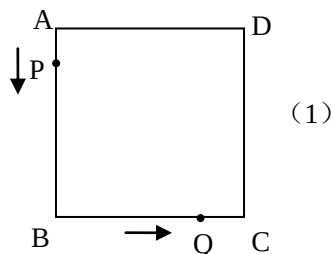
题 2 如图 (1)，四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，动点 P 从 A 点 P 出发，以每秒 1 个单位的速度沿 AB 边向 B 点运动，动点 Q 从点 B 出发，以每秒 3 个单位的速度沿边

$BC \longrightarrow CD \longrightarrow DA$ 运动，两点同时出发，点 P 到达 B 处时两点运动停止，记 P, Q 的运动时间为 t 。

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

(1) 是否存在时刻 t ，使线段 PQ 将正方形 $ABCD$ 的周长分为相等的两部分？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由。

(2) 是否存在时刻 t ，使线段 PQ 将正方形 $ABCD$ 的面积分为 1: 2 两部分，若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由。



题 3 如图 (2)，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，在斜边 AB 上是否存在点 O ，使以 O 为圆心，以 OA 为半径的圆，恰好与 BC 相切？

若存在，请作出 $\odot O$ （保留作图痕迹）；若不存在，请说明理由。

像以上三个题目都属于“存在性”问题。



2、“存在性”问题的基本类型和解决方法

“存在性”问题大体可分为两类：

I、由数量关系确定的“存在性”问题（即要找的是满足一个“特殊”数量方面的要求）；

II、由位置关系确定的“存在性”问题（即要找的是满足一个“特殊”位置方面的要求）。

(1) 由数量关系确定的“存在性”问题

这种类型的“存在性”问题，解决的方法主要是借助于构造方程。

例 1 （见前面的题 1）

【观察与思考】第一，框住的 4 个数字，若设左上角的数字为 a ，则这 4 个数字的和为 $a + (a+1) + (a+7) + (a+8) = 4a + 16$ 。本题就是判断图中有无数字 a ，使和 $4a + 16$ 分别为 100，90？有这样的数字 a 时，求出 a 的值。

第二，落实的办法就是根据和为 100，90 分别构造关于 a 的方程，判断相应的方程是否有解，有解时求出解来。

解：设框住的 4 个数为

a	$a+1$
$a+7$	$a+8$

则它们的和为： $a + (a+1) + (a+7) + (a+8) = 4a + 16$ ，

令 $4a + 16 = 100$ ，解得 $a = 21$ 。

即当框住的 4 个数字为

21	22
28	29

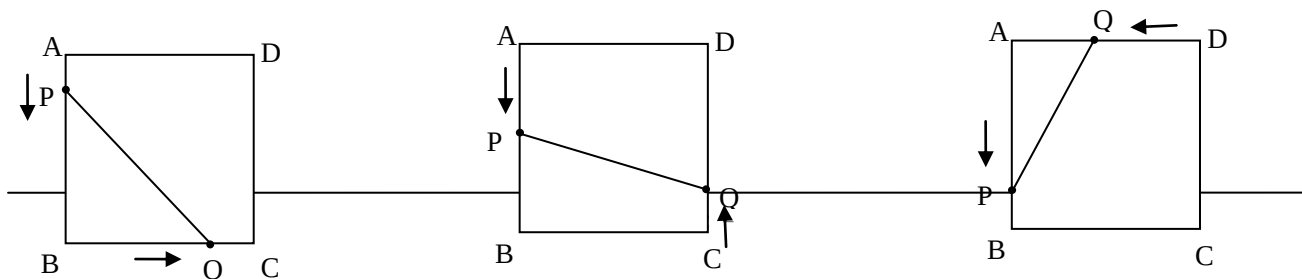
时，它们的和恰为 100。

又，令 $4a + 16 = 90$ ，解得 $a = 18.5$ ，这样的 a 不在月历中。

所以，不存在框住的 4 个数字的和为 90 的情况。

【说明】在这里，把方框中的第一个数字 a 看作一个变量（范围是 1—22），框内的 4 个数字之和 $4a + 16$ 是 a 的函数，而“和为 100，为 90”就是对函数值的特定要求，从而变成了求特定函数值所对应的自变量的值，那当然就是解方程。

例 2 （见前面的题 2）





(1')

(1'')

(1''')

【观察与思考】容易知道，按点 Q 在 BC 上， CD 上， DA 上， P 和 Q 的运动全过程可分为三段：

①当 $0 \leq t \leq 2$ 时，如图 (1')，②当 $2 < t \leq 4$ 时，如图 (1'')，③当 $4 < t \leq 6$ 时，如图 (1''')。应分类考虑 PQ 将正方形 $ABCD$ 分成部分的周长与面积的情况。

解：(1) ①当 $0 \leq t \leq 2$ 时，点 P 在 AB 上，点 Q 在 BC 上，正方形 $ABCD$ 的周长被 PQ 分成的两部分中，顶点 B 所在部分显然小于 $\frac{1}{2} \times$ (正方形 $ABCD$ 的周长)，而另一部分大于 $\frac{1}{2} \times$ (正方形 $ABCD$ 的周长)。因此，不可能有二者相等的时刻；

②当 $2 < t \leq 4$ 时，点 Q 在 CD 上，顶点 B 所在的部分的“周长”为 $(6-t) + 3t$ ，另一部分的“周长”为 $t + (18-3t)$ 。

令 $(6-t) + 3t = t + (18-3t)$ ，解得 $t = 3$ 。

(或令 $(6-t) + 3t = 12$ ，也得同样的结果)。

③当 $4 < t \leq 6$ 时，点 P 在 AB 上，点 Q 在 AD 上， PQ 分成的两部分中，含顶点 B 的部分的“周长”显然大于 $\frac{1}{2} \times$ ($ABCD$ 的周长)，因此不存在二者相等的时刻。

所以，存在 $t = 3$ ，使 PQ 将 $ABCD$ 的周长分为相等的两部分（其实，此时 P 和 Q 分别为边 AB ， CD 的中点）。

(2) ①当 $0 \leq t \leq 2$ 时， $\because S_{\text{正方形}ABCD} = 36$ ，

$$A_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} PB \cdot QB = \frac{1}{2} \cdot (6-t) \cdot 3t = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} ,$$

$\therefore$ 令 $\frac{1}{2} (6-t) \cdot 3t = \frac{1}{3} \times 36$ ，解得 $t_1 = 2, t_2 = 4$ (与 $t \leq 2$ 矛盾，舍去)。

②当 $2 < t \leq 4$ 时，令 $S_{\text{梯形}PBCQ} = \frac{1}{2} \times 6 \times [(6-t) + (3t-6)] = \frac{1}{3} \times 36$ 或

$$\frac{1}{2} [(6-t) + (3t-6)] = \frac{2}{3} \times 36, \text{ 分别解得 } t_3 = 2 \text{ (} 2 < t \leq 4 \text{ 矛盾, 舍去)}, t_4 = 4.$$

③当 $4 < t \leq 6$ 时，令 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (18-3t) = \frac{1}{3} \times 36$ ，解得 $t_5 = 2$ (舍去)， $t_6 = 4$ (舍去)。



所以，存在时刻 $t = 2$ 和 $t = 4$ ，使得 PQ 把正方形 $ABCD$ 的面积分为 $1:2$ 的两部分。

【说明】在 P, Q 的运动过程中，正方形的周长与面积总是被分为两部分，且两部分的值在运动中变化着，现对变化着的值提出特定的要求，以确定这种特殊情况是否真的出现在运动过程之中，这正是“存在性”问题的典型特征，而构造出相应的方程来求解。也真是普遍适用的方法。

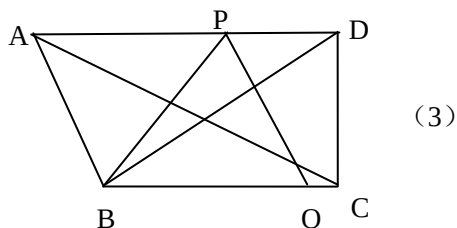
例3 如图(3)，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC, \angle C = 90^\circ, BC = 16, DC = 12, AD = 21$ 。动点 P 从点 D 出发，沿射线 DA 的方向以每秒 2 个单位长度的速度运动，动点 Q 从点 C 出发，在线段 CB 上以每秒 1 个单位的速度向点 B 运动，点 P, Q 分别从点 D, C 同时出发，设运动时间为 t (秒)。

(1) 是否存在时刻 t ，使得 $PQ \perp BD$ ？若存在，求出 t 的值；

若不存在，请说明理由。

(2) 是否存在时刻 t ，使得 $PQ \parallel AC$ ，若存在，求出 t 的值；

若不存在，请说明理由。



【观察与思考】 (1) 和 (2) 应分别由 “ $PQ \perp BD$ ” 和 “ $PQ \parallel AC$ ” 出发构造关于 t 的方程求解。

解：(1) 假若有 $PQ \perp BD$ ，作 $BM \parallel PQ$ ，交射线 DA 于 M ，如图(3') 则 $\angle DBM = 90^\circ$ 。

在 $Rt\triangle DBM$ 中，

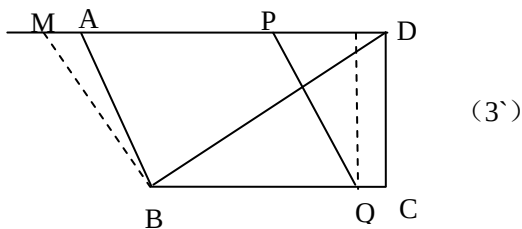
$$BD = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20,$$

$$DM = DP + PM = DP + BQ = 2t + (16 - t) = 16 + t,$$

$$MB = PQ = \sqrt{(2t - t)^2 + 12^2},$$

$$\text{由 } (16 + t)^2 = 20^2 + t^2 + 12^2, \text{ 解得 } t = 9 \text{ (秒)}.$$

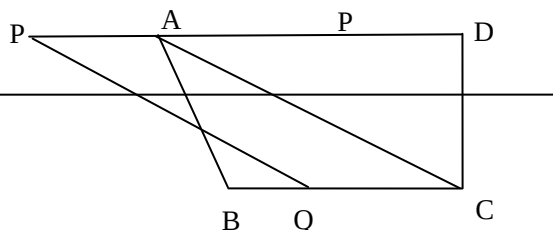
即 $t = 9$ (秒) 时 $PQ \perp BD$ 。



(2) 假若有 $PQ \parallel AC$ ，如图(3'')，易知此时四边形 $APQC$ 为平行四边形，

$\therefore AP = CQ$ ，即 $2t - 21 = t$ ，解得 $t = 21$ ，但点 Q 只在线段 CB 上运动，即 $0 \leq t \leq 16, t = 21$ 不合题意，舍去。

$\therefore$ 不存在时刻 t ，使得 $PQ \parallel AC$ 。





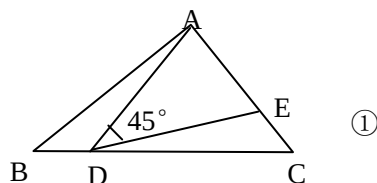
【说明】在 P, Q 的运动过程中，线段 PQ 和 BD, AC 的位置

(3'')

关系是变化的，本题是从中考考虑位置关系特定情况的“存在性”，方法也是按特定情况对应的数量关系去构造相应的方程，用该方程在允许范围内有解、无解来回答“存在”或“不存在”。

例 4 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 2$ ，点 D 在 BC 所在的直线上运动，作 $\angle ADE = 45^\circ$ (A, D, E 按逆时针方向)。

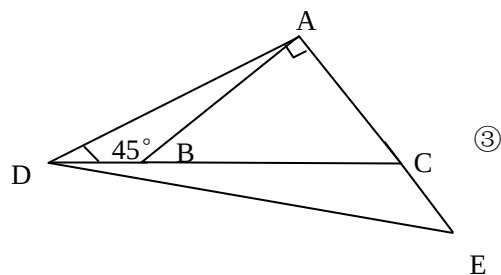
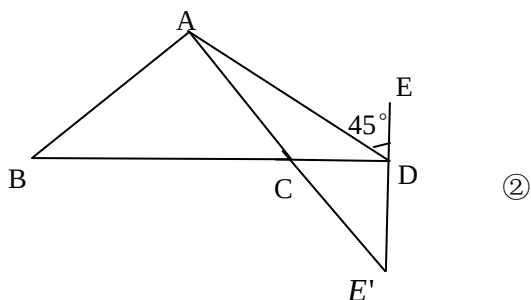
(1) 如图①，若点 D 在线段 BC 上运动， DE 交 AC 于 E 。



①求证： $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ；

②当 $\triangle ADE$ 是等腰三角形时，求 AE 的长。

(2) ①如图②，若点 D 在 BC 的延长线上运动， DE 的反向延长线与 AC 的延长线相交于点 E' ，是否存在点 D ，使 $\triangle ADE'$ 是等腰三角形？若存在，写出所有点 D 的位置；若不存在，请简要说明理由；



②如图③，若点 D 在 BC 的反向延长线上运动，是否存在点 D ，使 $\triangle ADE$ 是等腰三角形？若存在，写出所有点 D 的位置；若不存在，请简要说明理由；

【观察与思考】对于问题 (1)，就是我们熟悉的几何证明与几何计算问题；

对于问题 (2)，只要求出满足要求的 BD 的长，就是确定了 D 点的位置。为此只需要通过三角形的相似关系去构造关于 BD 的方程。

解：(1) ① $\because \angle B = \angle C = 45^\circ$ ，又 $\angle B + \angle BAD = \angle ADE + \angle CDE$ ，即 $\angle BAD = \angle CDE$ 。

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE$

② $\because \frac{AB}{AD} = \frac{DC}{DE}$ ， $\therefore$ 当 $AD = DE$ 时， $AB = DC = 2$ 。

$\therefore CE = BD = 2\sqrt{2} - 2$ ， $\therefore AE = 2 - (2\sqrt{2} - 2) = 4 - 2\sqrt{2}$ 。



(2) ①若 $\triangle ADE'$ 为等腰三角形, $\therefore \angle ADE' = 135^\circ, \therefore$ 只有 $AD = DE'$ 。

$\therefore \angle B = \angle DCE' = 45^\circ, \angle ACB = \angle CAD + \angle ADB$, 而 $\angle ADE = \angle CAD + \angle E'$, 得 $\angle ADB = \angle E'$ 。

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE'$, $\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{DC}{DE'}$, 由 $AD = DE'$, 得 $AB = DC$ 。

$\therefore BD = BC + AB = 2\sqrt{2} + 2$,

存在点 D 使 $\triangle ADE'$ 为等腰三角形, 点 D 在 BC 的延长线上, 距点 B 的 $2\sqrt{2} + 2$ 处。

② $\therefore \angle DAE > 90^\circ, \angle ADE = 45^\circ$

$\therefore \angle AED < 45^\circ$

$\therefore$ 不存在 $\triangle ADE$ 为等腰三角形的情况。

例5 二次函数 $y = \frac{1}{8}x^2$ 的图象如图(1)所示, 过 y 轴上一点 $M(0,2)$ 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 过点 A, B

分别作 y 轴的垂线, 垂足分别为 C, D 。

(1) 当点 A 的横坐标为 -2 时, 求点 B 的坐标;

(2) 在 (1) 的情况下, 分别过点 A, B 作 $AE \perp x$ 轴于 E , $BF \perp x$ 轴于 F , 在 EF 上是否存在点 P , 使 $\angle APB$ 为直角, 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由。

【观察与思考】 (1) 由 $Rt\triangle ACM \sim Rt\triangle BDM$, 可求得点 B 的坐标。

(2) 这时, 如图 (1'), 若在线段 EF 上有点 P 使 $\angle APB = 90^\circ$, 那么立刻推得 $Rt\triangle AEP \sim Rt\triangle PFB$, 依次构造关于 P 点坐标的方程。

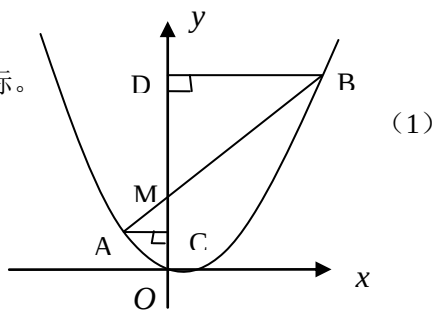
解: (1) 设点 B 的坐标为 $(x, \frac{1}{8}x^2)$, 其中 $x > 0$,

$\therefore A(-2, \frac{1}{2}), M(0,2), C(0, \frac{1}{2}), D(0, \frac{1}{8}x^2)$,

$\therefore MC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, MD = \frac{1}{8}x^2 - 2, AC = |-2| = 2$,

$\therefore Rt\triangle BDM \sim Rt\triangle ACM$, $\therefore \frac{BD}{AC} = \frac{MD}{MC}$, 即

$\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{8}x^2 - 2}{\frac{3}{2}}$, 解得 $x_1 = -2$ (舍去), $x_2 = 8$. $\therefore$ B 的坐标为 $(8, 8)$



(2) 若满足要求的点 P 存在, 设 EP 的长为 a , 连结 AP, BP , 如图 (1')

– 7 –



一个动点（不与 A, C 重合），试问：点 P, E, F 能否构成直角三角形？若能，共有几个？并在图中画出所有满足条件的三角形。

【观察与思考】第一，分情况来考虑：

①若要 $\angle PEF = 90^\circ$ ，只需 $PE \perp EF$ ；

②若要 $\angle PFE = 90^\circ$ ，只需 $PF \perp EF$ ；

③若要 $EP \perp FP$ ，只需 P 为以 EF 为直径的圆与 AC 的交点，且因 $EF = \frac{1}{2}AC$ ，所以 $\frac{1}{2}EF$ 大于 EF 与 AC 之间的距离，所以以 EF 为直径的圆与 AC 必有两个交点。

第二，表示出以上四个点 P 的位置：

解：能使 P, E, F 为顶点的三角形成为直角三角形的点 P 共有四个，如图（1'）。

【说明】其实作图法确定符合某要求的图形，基本思想和用方程求

未知数量的值有极大的相仿之处，都是先假定“存在”，按其具有的

特定要求逆推出它应当是怎样的。

二、关于“最值”问题

所谓“最值”问题，就是求一个变动的数量在某范围内取最大或最小值的问题。

“最值”问题大都归于两类基本模型：

I、归于函数模型：即利用一次函数的增减性和二次函数的对称性及增减性，确定某范围内函数的最大或最小值。

II、归于几何模型，这类模型又分为两种情况：

（1）归于“两点之间的连线中，线段最短”。凡属于求“变动的两线段之和的最小值”时，大都应用这一模型。

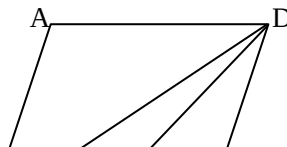
（2）归于“三角形两边之差小于第三边”凡属于求“变动的两线段之差的最大值”时，大都应用这一模型。

1、利用函数模型求最值

由于这类问题在关节三“函数知识的三个支点”已有涉及和说明，这里我们只举一例。

例1 如图（1），平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 4, BC = 3, \angle BAD = 120^\circ$ ， E 为 BC 上一动点（不与 B 重合），

作 $EF \perp AB$ 于 F ，设 $BE = x, \triangle DEF$ 的面积为 S 。当 E 运动到何处时， S 有最大值，最大值为多少？





【观察与思考】容易知道 S 是 x 的函数，为利用函数的性质求 S 的最大值，

就应先把 S 关于 x 的函数关系式求出来，而这又需要借助几何计算。

(1)

解：如图 (1')，延长 FE 交 DC 的延长线于 G ，易知 $FG \perp DG$ 。

$$\therefore S = \frac{1}{2} EF \cdot DG, \text{ 而 } EF = BE \cdot \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

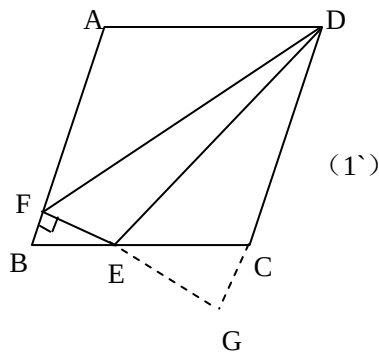
$$\text{又, 在 } Rt\triangle CEG \text{ 中, } CE = 3 - x, CG = (3 - x) \cdot \cos 60^\circ = \frac{3 - x}{2}.$$

$$\therefore DG = DC + CG = 4 + \frac{3 - x}{2} = \frac{11 - x}{2}.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot DG = -\frac{\sqrt{3}}{8} x^2 + \frac{11\sqrt{3}}{8} x, \text{ 其中 } 0 < x \leq 3.$$

$$\because -\frac{\sqrt{3}}{8} < 0, \text{ 对称轴 } x = \frac{11}{2}, \therefore \text{当 } 0 < x \leq 3, S \text{ 随 } x \text{ 的增大而增大}.$$

$$\therefore \text{当 } x = 3, \text{ 即 } E \text{ 与 } C \text{ 重合时, } S \text{ 有最大值, } S_{\text{最大}} = 3\sqrt{3}.$$



【说明】可以看出，函数是解决“数量”最值问题的最基本的方法。

2、利用几何模型求最值

(1) 归入“两点之间的连线中，线段最短”

例 2 如图 (1) 所示，在一笔直的公路 MN 的同一旁有两个新开发区 A, B ，已知 $AB = 10$ 千米，直线 AB 与公路 MN 的夹角 $\angle AON = 30^\circ$ ，新开发区 B 到公路 MN 的距离 $BC = 3$ 千米。

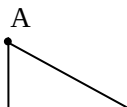
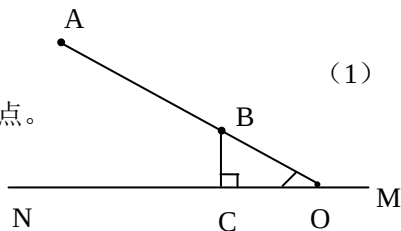
(1) 求新开发区 A 到公路 MN 的距离；

(2) 现从 MN 上某点 P 处向新开发区 A, B 修两条公路 PA, PB ，使点 P 到新开发区 A, B 的距离之和最短，请用尺规作图在图中找出点 P 的位置（不用证明，不写作法，保留作图痕迹），并求出此时 $PA + PB$ 的值。

【观察与思考】对于 (1)，直接归于几何计算。

对于 (2)，首先利用“轴对称”的性质，把原题中的求“ $PA + PB$ ”最短，转化成求“ $PA' + PB$ ”最短（其中 A' 是 A 关于 MN 的对称点）。

解：(1) 先作 AD 垂直于 MN 于点 D 如图 (1')





在 $Rt\triangle OBC$ 中, $OB = 2BC = 6$ (千米)

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $AO = AB + BO = 16$ (千米) $\angle AOD = 30^\circ$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AO = 8 \text{ (千米)}$$

(2) 作点 A 关于 MN 的对称点 A' , 连结 BA' 交 MN 于点 P 。

(1')

结果如图 (1''), 点 P 即为所求。

如图 (1''), 作 $CA'' \parallel BA'$ 交 AA' 的延长线于点 A'' 。

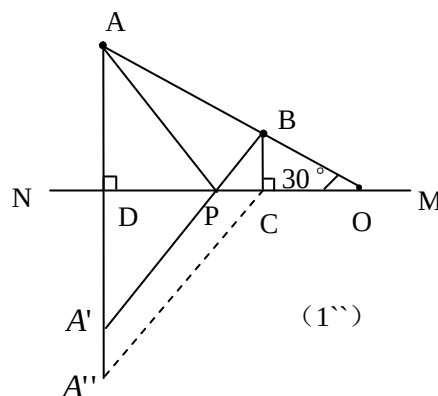
在 $Rt\triangle CA''D$ 中, $A''D = AD + BC = 11$ (千米),

$$CD = OD - OC = 8\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ (千米)}。$$

$$\therefore BA' = CA'' = \sqrt{A''D^2 + CD^2} = \sqrt{121 + 75} = 14 \text{ (千米)}。$$

$$\therefore \text{此时 } PA + PB = BA' = 14 \text{ (千米)}$$

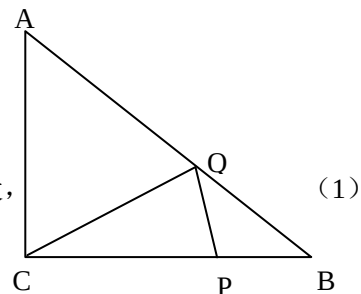
【说明】 本题的关键在于将“在直线上确定一点, 使它到直线同侧的两点距离之和最短”, 转化为“直线异侧两点距离之和最短”, 进而再用“两点之间的所有连线中, 线段最短”。



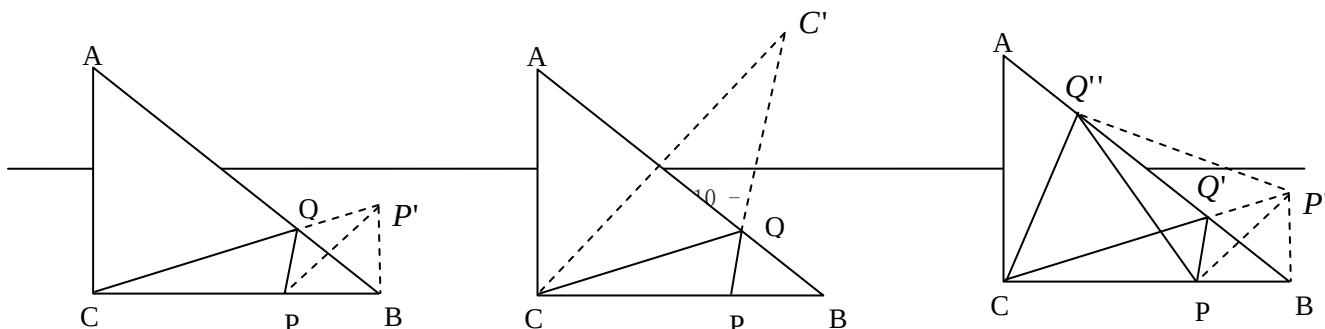
例3 如图, (1), 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 2, \angle ACB = 90^\circ$, P 为 BC 边上一定点, (不与点 B, C 重合),

Q 为 AB 边上一动点, 设 BP 的长为 $a (0 < a < 2)$, 请写出 $CQ + PQ$ 最小值, 并说明理由。

【观察与思考】 其实, 本题和例2中的(2)基本上是相同的, 是“在直线 AB 上求一点 Q , 使它到 AB 同侧的两个定点 C 和 P 的距离之和最小”。因此, 可由图 (1') (连结 P 关于 AB 的对称点 P' 与 C 所成线段, 交 AB 于 Q 。或图 (1'') (连结 C 关于 AB 的对称点 C' 与 P 所成线段,



交 AB 于 Q , 都同样可得 $CQ + PQ$ 最小值。





(1')

(1'')

(1''')

解：如图 (1''')，作点 P 关于 AB 的对称点 P' ，连结 CP' 交 AB 于点 Q' ，易知 $\triangle PBQ' \cong \triangle P'BQ'$ ，

$\therefore BP' = BP = a, \angle P'BQ' = \angle PBQ' = 45^\circ$ 。

在 $Rt\triangle CBP'$ 中， $CP' = \sqrt{CB^2 + P'B^2} = \sqrt{4 + a^2}$ ，

又，在 AB 上任意取一异于 Q' 的点 Q'' ，连结 $CQ'', PQ'', P'Q''$ ，则

$$CQ'' + PQ'' = CQ'' + P'Q'' > CP' = \sqrt{4 + a^2}$$

$\therefore$ 对 AB 边上的动点 Q ，最小值为 $\sqrt{4 + a^2}$ 。

【说明】 I、在本题，关键仍是将 $CQ + PQ$ 最小问题，转化成求线段 CP' 的长，转化的桥梁仍是利用“轴对称”的性质；

II、至于求线段的长，仍是以归入“解直角三角形”为第一选择。

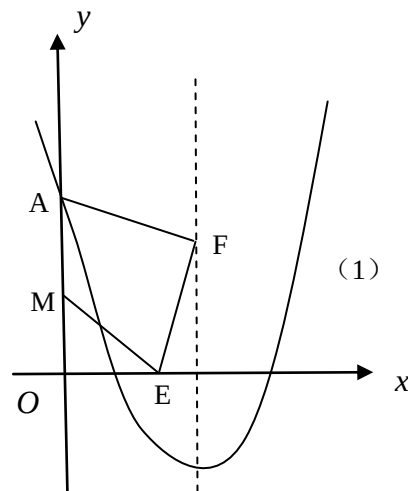
例 4 如图 (1)，抛物线 $y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 3$ 和 y 轴的交点为 A ， M 为 OA 的中点，若有一动点 P ，自 M 点处出发，沿直线运动到 x 轴上的某点（设为点 E ），再沿直线运动到该抛物线对称轴上的某点（设为点 F ），最后又沿直线运动到点 A ，求使点 P 运动的总路程最短的点 E ，点 F 的坐标，并求出这个最短路程的长。

【观察与思考】 容易知道，点 A 的坐标为 $(0, 3)$ ，抛物线的对称轴为

$x = 3$ ，点 M 的坐标为 $(0, \frac{2}{3})$ 。实际上是求点 E, F 位于何处时有

$ME + EF + FA$ 最短，仍归于用“两点之间的所有连线中，线段最短”来求解，这只需作 M 关于 x 轴的对称点 M' ，点 A 关于对称轴 $x = 3$ 的对称点 A' ，连结 $M'A'$ ，如图 (1')，即可将原问题解决。

解：如图 (1')，由题意可得 $A(0, 3)$ ， $M(0, \frac{2}{3})$ ，抛物线的对称点





为 $x=3$ ，点 M 关于 x 轴的对称点为 $M'(0, -\frac{3}{2})$ ，点 A 关于抛物线对称轴 $x=3$ 的对称点为 $A'(6, 3)$ 。连结 $M'A'$ 。

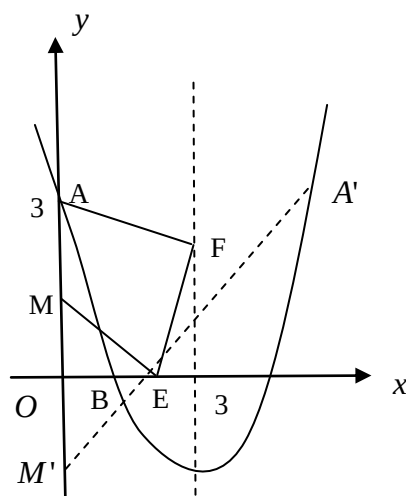
根据轴对称性及两点间线段最短可知， $A'M'$ 的长就是所求点 P 运动中最短总路程的长， $A'M'$ 在直线的方程为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ （过程略）。

设 $A'M'$ 与 x 的交点为 E ，则 E 为在 x 轴上所求的点， $A'M'$ 与直线 $x=3$ 的交点为所求的 F 点。

可得 E 点的坐标为 $(2, 0)$ ， F 点的坐标为 $(3, \frac{3}{4})$ 。

由勾股定理可求出 $A'M' = \frac{15}{2}$ （过程略）

所以点 P 运动的总路程（ $ME + EF + FA$ ）最短时间为 $\frac{15}{2}$ 。



不管在什么背景下，有关线段之和最短问题，总是化归到“两点之间的所有连线中，线段最短”，而转化的方法大都是借助于“轴对称点”。

(2) 归于“三角形两边之差小于第三边”

例 5 如图 (1)，直线 $y = -\sqrt{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 C ，与 y 轴交于点 B ，点 A 为 y 轴正半轴上的一点， $\odot A$ 经过点 B 和点 O ，直线 BC 交 $\odot A$ 于点 D 。

(1) 求点 D 的坐标；

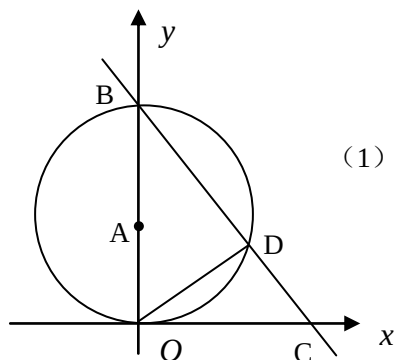
(2) 过 O, C, D 三点作抛物线，在抛物线的对称轴上是否存在一点 P ，使线段 PO 与 PD 之差的值最大？若存在，请求出这个最大值和点 P 的坐标。若不存在，请说明理由。

【观察与思考】对于 (1)，可通过解直角三角形求得点 D 的坐标。

对于 (2) 如图 (1')，过 O, C, D 三点的抛物线的对称轴为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

对于该对称轴上的任意一点 P 都有 $PO - PD = PC - PD \leq CD$ ，而只

有当点 P 恰为直线 CB 与抛物线的对称轴 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$





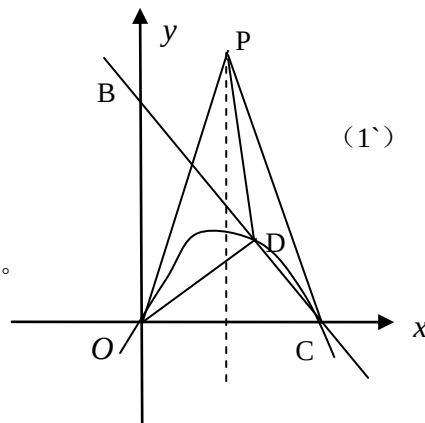
的交点时, $PC - PD = DC$, 为最大。

解: (1) 在 $y = -\sqrt{3}x + 2$ 中, 分别令 $x = 0, y = 0$ 得 B 点的坐标为 $(0, 2)$, C 点的坐标为 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$

$\because OB$ 为 $\odot A$ 的直径, $\therefore OD \perp BC$ 。

$$\because \tan \angle CBO = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \angle B = 30^\circ, \angle C = 60^\circ, \text{ 且 } OD = \frac{1}{2}OB = 1。$$

在 $Rt\triangle COD$ 中, 由 $\angle COD = 30^\circ$ 和 $OD = 1$, 得点 D 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ 。



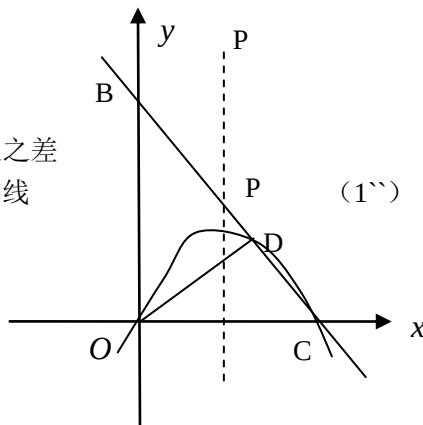
(2) 如图 (1''), 当点 P 为该抛物线的对称轴 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 CD 所在的

直线 $y = -\sqrt{3}x + 2$ 的交点处时, $PO - PD = PC - PD = CD$, 其值最大, 而 $CD = OD \cdot \tan 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 2 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{解得此时点 P 的坐标为 } (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)。$$

$\therefore$ 点 P 为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 时 $PO - PD$ 取最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【说明】 这里将求“两线段之差的最大值”, 借助“三角形两边之差小于第三边”转化为求一条特殊线段的长, 其间, 还借助了抛物线对称轴的性质。



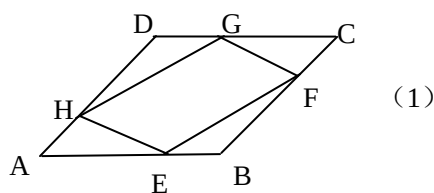


练习题

1、已知：四边形 $ABCD$ 中， $AB=1$, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的点，且 $AE=BF=CG=DH$ 。

设四边形 $EFGH$ 的面积为 S ， $AE=x(0 \leq x \leq 1)$ 。

如图，当四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle A = 30^\circ$ 时，四边形 $EFGH$ 的面积 S 能否等于 $\frac{5}{16}$ ？若能，求出相应 x 的值，若不能，请说明理由。



2、抛物线 $y = -(x-m)^2 + 1$ 与 x 轴的交点为 A, B （点 B 在点 A 的右侧），与 y 轴的交点为 C ，是否存在这样的 m 值，使点 B 在 x 轴的正半轴上，点 C 在 y 轴的负半轴上，且 $\triangle BOC$ 为等腰三角形？若存在，请求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

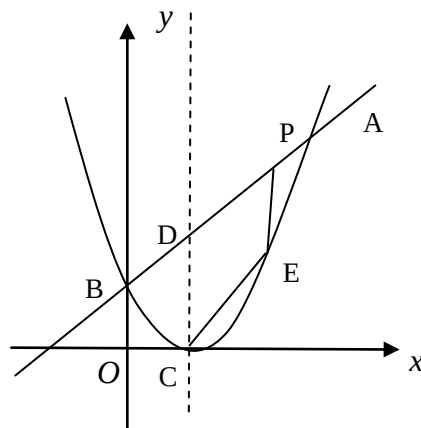
3、已知抛物线 $C_1: y = -x^2 + 2mx + n$ （ m, n 为常数，且 $m \neq 0, n > 0$ ）。的顶点为 A ，与 y 轴交于点 C ；抛物线 C_2 与抛物线 C_1 关于 y 轴对称，其顶点为 B ，连结 AC, BC, AB 。



- (1) 请在横线上直接写出抛物线 C_2 的解析式: _____ ;
- (2) 当 $m=1$ 时, 判定 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;
- (3) 抛物线 C_1 上是否存在点 P , 使得四边形 $ABCP$ 为菱形? 如果存在, 请求出 m 的值; 如果不存在, 请说明理由。

4、如图, 已知二次函数图象的顶点坐标为 $C(1, 0)$, 直线 $y=x+m$ 与该二次函数的图象交于 A, B 两点, 其中 A 点的坐标为 $(3, 4)$, B 点在 y 轴上。

- (1) 求 m 的值及这个二次函数的解析式;
- (2) P 为线段 AB 上的一个动点 (点 P 与 A, B 不重合), 过 P 作 x 轴的垂线与这个二次函数的图象交于 E 点, 设线段 PE 的长为 h , 点 P 的横坐标为 x , 求 h 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;
- (3) D 为直线 AB 与这个二次函数图象对称轴的交点, 在线段 AB 上是否存在一点 P , 使和四边形 $DCEP$ 是平行四边形? 若存在, 请求出此时 P 点的坐标; 若不存在, 请说明理由。

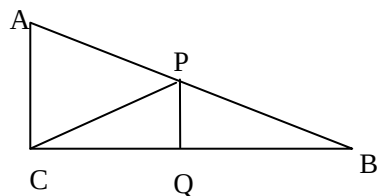


5、已知, $\triangle ABC$ 中, $AC=5, BC=12, \angle ACB=90^\circ$, P 是 AB 边上的动点 (与点 A, B 不重合) Q 是 BC 边上的动点 (与点 B, C 不重合)。

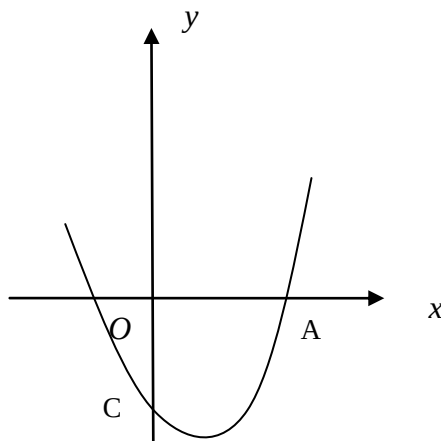
- (1) 如图, 当 $PQ \parallel AC$, 且 Q 为 BC 的中点时, 求线段 CP 的长。



(2) 当 PQ 与 AC 不平行时, $\triangle CPQ$ 可能为直角三角形吗? 若有可能, 请求出线段 CQ 的长的取值范围, 若不可能, 请说明理由。



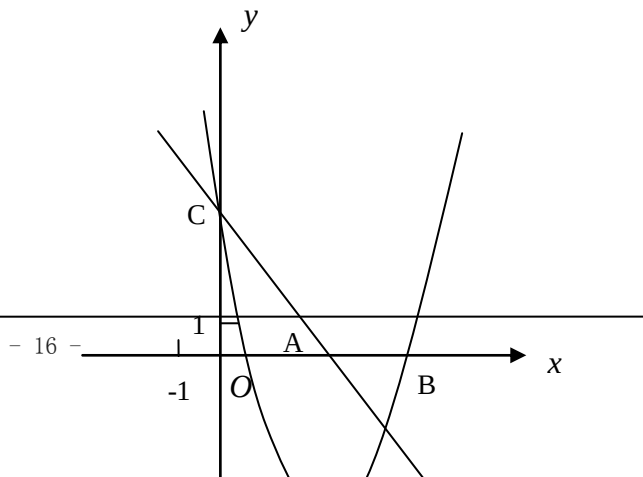
6、已知, 如图, 抛物线 $y = x^2 - 4x - 5$, 它和 x 轴交点中右侧的一点为 A , 和 y 轴的交点为 C 。在该抛物线上是否存在点 P , 使 $\triangle AOP \cong \triangle COP$? 如果存在, 请指明点 P 所在的位置, 如果不存在, 请说明理由。



7、已知抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$

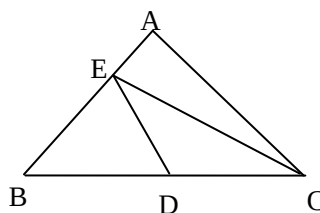
(1) 在抛物线上求一点 P_0 使得 $\triangle ABP_0$ 为等腰三角形, 并写出 P_0 点的坐标。

(2) 除 (1) 中所求的 P_0 点外, 在抛物线上是否还存在其它的点 P 使得 $\triangle ABP$ 为等腰三角形? 若存在, 请求出一共有几个满足条件的点 P (要求简要说明理由, 但不证明); 若不存在这样的点 P , 请说明理由。





8、如图， $\triangle ABC$ 中， $AC = BA = 2, \angle CAB = 90^\circ$ ， D 是 BC 的中点， E 是 AB 边上的一动点，则 $EC + ED$ 的最小值_____。

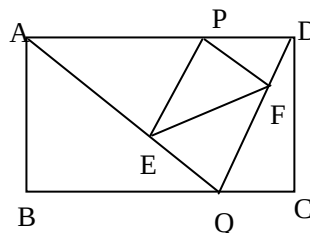


9、已知矩形 $ABCD$ 的边长 $AB = 2, BC = 3$ ，点 P 是 AD 边上的一个动点（ P 异于 A, D ）， Q 是 BC 边上任意一点，连结 AQ, DQ 。过点 P 作 $PE \parallel DQ$ 交 AQ 于 E ，作 $PF \parallel AQ$ 交 DQ 于 F 。

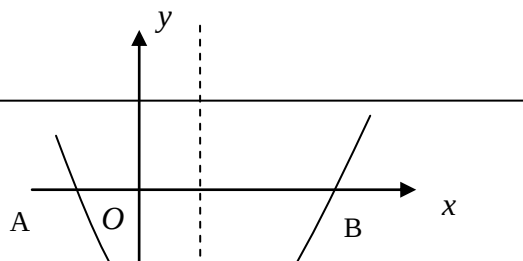
(1) 求证： $\triangle APE \sim \triangle ADQ$ ；

(2) 设 AP 的长为 x ，试求 $\triangle PEF$ 的面积 y 关于 x 的函数关系式，并求当点 P 在何处时， y 取最大值，最大值是多少？

(3) 当点 Q 在何处时， $\triangle ADQ$ 的周长最小？（指出确定点 Q 在何处的过程或方法，不必证明）。



10、已知，如图，抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 与 x 轴交于 A, B 两点，交 y 轴于点 C ，在该抛物线的对称轴上是否存在点 Q ，使得 $\triangle QAC$ 的周长最小？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

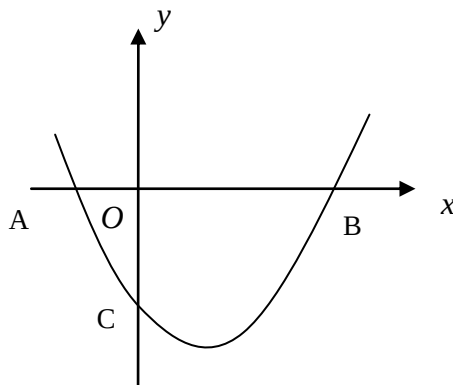




11、抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C ，已知抛物线的对称轴为 $x = 1, B(3, 0), C(0, -3)$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P ，使点 P 到 B, C 两点的距离之差最大？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



12. 如图所示，在平面直角坐标系中， $Rt\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, 0)$ ， $O(0, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，把 $\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle COD$ 。

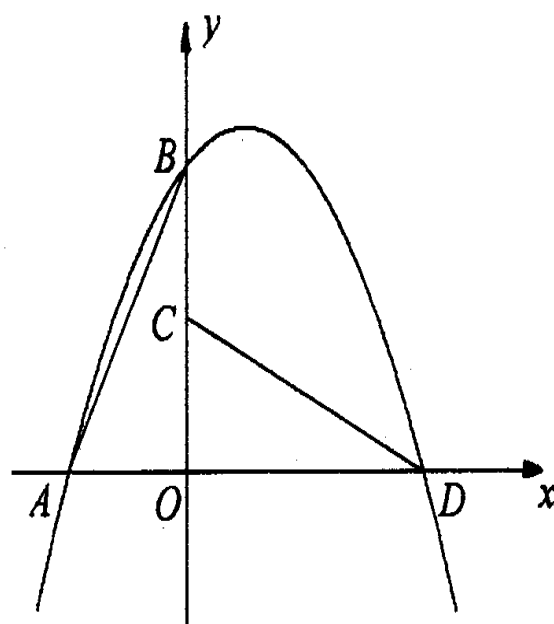
(1) 求 C, D 两点的坐标；

(2) 求经过 A, B, D 三点的抛物线的解析式；

(3) 在 (2) 中抛物线的对称轴上取两点 E, F (点 E 在点 F 的上方)，且 $EF=1$ ，使四边形 $ACEF$ 的周长最小，



求出 E、F 两点的坐标。



13、如图，已知平面直角坐标系， A, B 两点的坐标分别为 $A(2, -3), B(4, -1)$ 。

(1) 若 $P(p, 0)$ 是 x 轴上一个动点，则当 $p =$ _____ 时， $\triangle PAB$ 的周长最短。

(2) 若 $C(a, 0), D(a+3, 0)$ 是 x 轴上两个动点，则当 $a =$ _____ 时，四边形 $ABDC$ 的周长最短。

(3) 设 M, N 分别为 x 轴和 y 轴上的动点，请问：是否存在这样的点 $M(m, 0), N(0, n)$ ，使四边形 $ABMN$ 的周长最短？若存在，请求出 $m =$ _____， $n =$ _____，若不存在，请说明理由。

