



关节十二

探究二：几何图形的不变性

和变化规律以及特殊条件下的特定性

关于几何图形性质方面的探究，已成为近年来各地中考试卷中带有普遍性的热点，细分起来，这样的题目又可分为两大类：

第一类，设置变化性的图形背景，探究由变化所体现的“图形不变性”或“变化规律”。

第二类，设置附有特殊条件或特殊结论的图形背景，研究由此生产的“特定性质”。

这两类探究问题正好体现着人们扩展认识的两个基本方向：一是由特殊向一般扩充，二是向相对更为特殊的方向深入。

现在我们分别来解析与归纳这两类探究性问题应解的思考特征。

一、探究图形变化引出的不变性或变化规律

从图形变化过程来看，又分为三条途径：

I、由“图形变换”形成变化背景，探究其中的不变性或变化规律；

II、由“特殊到一般”形成的变化背景，探究其中的不变性或变化规律；

III、由“类比”形成的变化背景，探究其中的不变性或变化规律。

从解法的思考来说，三类题目尽管有很多一致性，但因图形变化的背景不同必然带来基本切入点的不同。

1、图形变换引出的不变性或变化规律

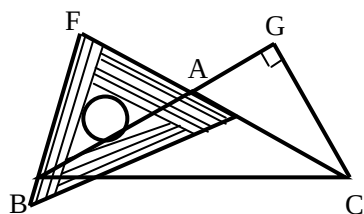
我们知道，图形的“轴对称”、“平移”、“旋转”这些变换，是图形运动及延伸的重要途径，研究这些“变换”中的图形的“不变性”或“变化规律”，便是既自然又现成的展开方式。对于这些起源于“变换”的探究性问题，解法的思考当然要围绕“变换”而展开，主要思考方向可有：

I、化归到基本图形的“变换性质”；

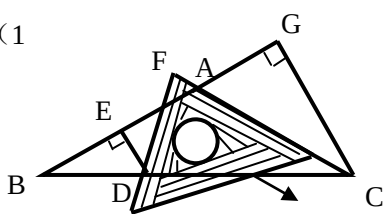
II、沿“变换”考查图形变化中所体现的统一性和差异性。

(1) 借助于“化归到基本图形或变换性质”的思考获得解达

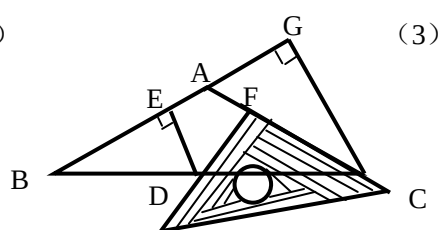
例1 如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, $CG \perp BA$ 交BA的延长线于点G。一等腰直角三角尺按如图(1)所示的位置摆放，该三角尺的直角顶点为F，一条直角边与AC边在一条直线上，另一条直角边恰好经过点B。



(1)



(2)



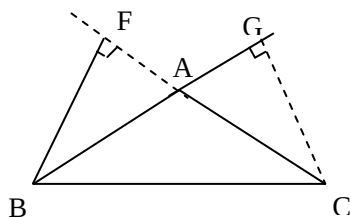
(3)

(1) 在图 (1) 中请你通过观察、测量 BF 与 CG 的长度, 猜想并写出 BF 与 CG 满足的数量关系, 然后证明你的猜想。

(2) 当三角尺沿 AC 方向平移到图 (2) 所示的位置时, 一条直角边仍与 AC 边在同一直线上, 另一条直角边交 BC 边于点 D 。过点 D 作 $DE \perp BA$ 于点 E 。此时请你通过观察、测量 DE, DF 与 CG 的长度, 猜想并写出 $DE + DF$ 与 CG 之间满足的数量关系, 然后证明你的猜想。

(3) 当三角尺在 (2) 的基础上沿 AC 方向继续平移到图 (3) 所示的位置时, (点 F 在线段 AC 上, 且点 F 与点 C 不重合) 时, (2) 中的猜想是否仍然成立? (不说明理由)。

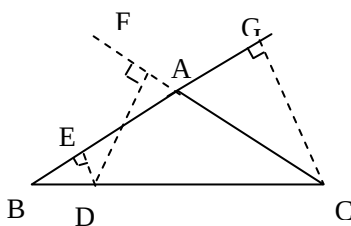
【观察与思考】 经过仔细审题, 排除“三角尺”和其平移的表面干扰, 题中的图 (1), 图 (2), 图 (3) 对应的几何图形就是:



$$AB = AC$$

$BF \perp CA$ 于 F , $CG \perp BA$ 于 G

(1')

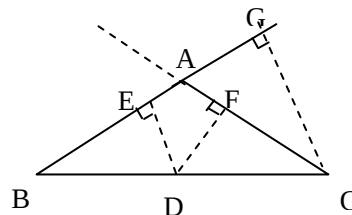


$AB = AC$, D 为 BC 上一点,

$DE \perp BA$ 于 E , $DF \perp CA$ 于 F ,

$CG \perp BA$ 于 G 。

(2')



$AB = AC$, D 为 BC 上一点,

$DE \perp BA$ 于 E , $DF \perp CA$ 于 F ,

$CG \perp BA$ 于 G 。

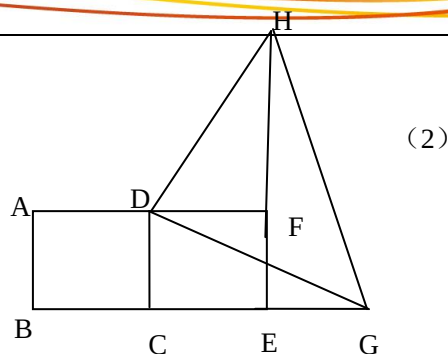
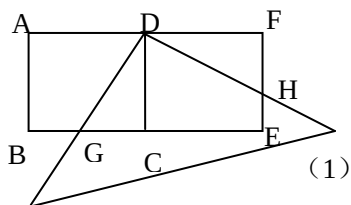
(3')

它们就是我们早已熟悉的基本模式: “等腰三角形底边上任意一点到两腰的垂线段之和都等于这个三角形一腰上的高”。至此, 本题的解法已是显而易见, 本题的思考就是“回归到基本模式”, 而题目所体现的就是“图形中变换中的不变性”。

例 2 用两个全等的正方形 $ABCD$ 和 $CDFE$ 拼成一个矩形 $ABEF$, 把一个足够大的直角三角尺的直角顶点与这个矩形的边 AF 的中点 D 重合, 且将直角三角尺绕点 D 按逆时针方向旋转。

(1) 当直角三角尺的两直角边分别与矩形 $ABEF$ 的两边 BE , EF 相交于点 G , H 时, (如图 (1)), 通过观察或测量 BG 与 EH 的长度, 你能得到什么结论? 并证明你的结论。

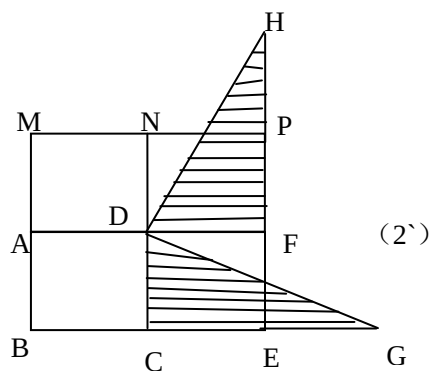
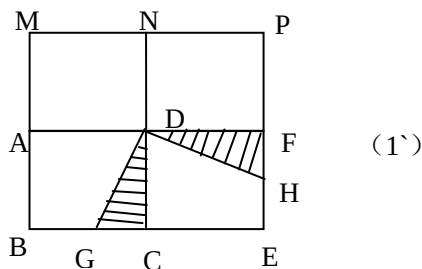
(2) 当直角三角尺的两直角边分别与 BE 的延长线, EF 的延长线相交于点 G , H 时, (如图 (2)), 你在图 (1) 中得到的结论还成立吗? 简要说明理由。



【观察与思考】可以有两种化归的思考方法：

方法 I、若将原图再补上两个全等的小正方形，使基本背景成为一个大正方形，如图 (1') 和图 (2')。这时点 D 就是大正方形的中心。根据“正方形是关于中心 90° 旋转对称图形”（见关节四），立刻知道 $Rt\triangle DCG$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 便与 $Rt\triangle DFH$ 重合，当然全等，即均有 $CG = FH$ ，进而有 $BG = EH$ 。

方法 II、原图的背景 $ABCEFD$ 是由两个全等的正方形拼成，因此，若正方形 $ABCD$ 绕点 D 逆时针旋转 90° ，则它与正方形 $CEFD$ 重合，由 $\angle GDH = 90^\circ$ ，可知在此过程中 BG 与 EH 重合（具体论述略）。



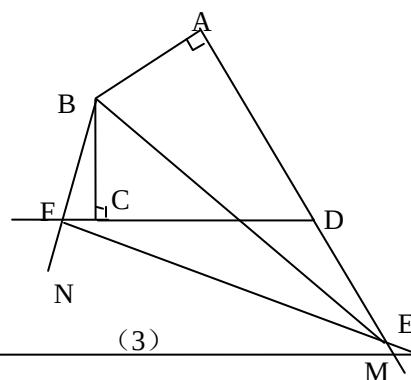
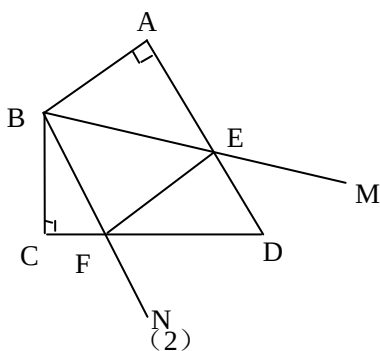
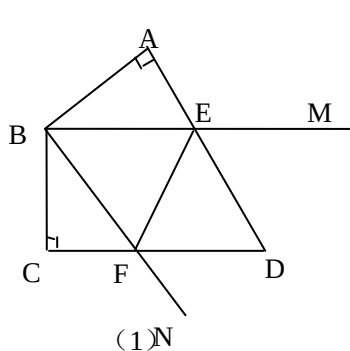
本题的思考也是回归到“基本图形的性质”，而题目体现的也是“图形变换中的不变性”。

解：只需按如上的方法 I 写出相应的三角形全等的理由即可（结论和过程略）。

例 3 已知，四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp AD, BC \perp CD, BA = BC, \angle ABC = 120^\circ, \angle MBN = 60^\circ$ ， $\angle MBN$ 绕 B 点旋转，它的两边分别交 AD, DC （或它们的延长线）于 E, F。

当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时，（如图 (1)），易证： $AE + CF = EF$ 。

当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时，在图 (2) 和图 (3) 中这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，线段 AE, CF, EF 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明。

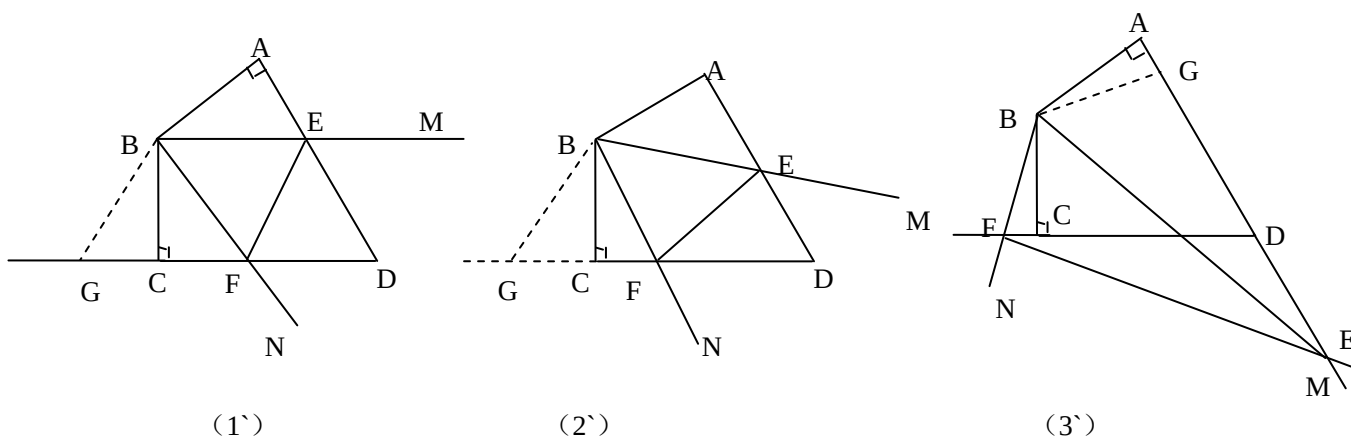




【观察与思考】由背景 $BA = BC, \angle ABC = 120^\circ$ ，可知 BA 和 BC 具有绕点 B 旋转 120° 的重合性，依此构造全等三角形。

解：在图（1）和图（2）中均有 $AE + CF = EF$ ，理由如下：

如图（1'）和图（2'），作 $\angle FBG = 60^\circ$ ，交 DC 延长线于点 G （这时即有 $Rt\triangle BAE$ 绕点 B 顺时针旋转 120° 重合于 $Rt\triangle BCG$ 中，



在 $Rt\triangle BAE$ 和 $Rt\triangle BCG$ 中，

$$\because BA = BC, \angle ABE = 120^\circ - \angle EBC = 120^\circ - (\angle EBF + \angle FBC) = 60^\circ - \angle FBC = \angle CBG.$$

$$\therefore Rt\triangle BAE \cong Rt\triangle BCG, \therefore AE = CG, BE = BG.$$

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BGF$ 中， $\angle EBF = \angle GBF = 60^\circ, BE = BG, BF$ 公用。

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BGF, \therefore EF = GF = CG + CF = AE + CF.$$

对于（3）的情况，有结论： $EF = AE - CF$ 。理由是：

如图（3'），作 $\angle EBG = 60^\circ$ ，交 AD 于点 G ，与情况（1'）、（2'）类似地可证明

$$Rt\triangle BAG \cong Rt\triangle BCF, \text{ 得 } AG = CF, \text{ 又可有 } \triangle BGE \cong \triangle BFE, \text{ 可知 } EF = EG = AE - AG = AE - CF$$

由图（1）到图（2）体现的是“不变性”，而由图（1）到图（3），体现的却是“变换过程中的变化规律”。

由以上三个例子可以看出：

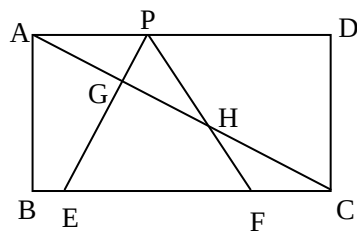
许多由图形变换引出的不变性或变化规律问题，解法思考的第一选择是将问题化归到“基本图形的变换性质”。这也进一步说明：“化归到基本”是数学思考的最基本的最重要的原则。

（2）借助于考察图形变换过程中各种形态（情况）的统一和差异性来获得解法

例 4 如图，已知矩形 $ABCD$ ， $AB = \sqrt{3}, BC = 3$ ，在 BC 上取两点 E, F （ E 在 F 左边），以 EF 为边作等边三角形 PEF ，使顶点 P 在 AD 上， PE, PF 分别交 AC 于点 G, H 。



- (1) 求 $\triangle PEF$ 的边长；
 (2) 若等边三角形 $\triangle PEF$ 的边 EF 在线段 BC 上移动，试猜想：
 PH 与 BE 有何数量关系？并证明你猜想的结论。



【观察与思考】本题的核心是研究特定的等边 $\triangle PEF$ 在矩形 $ABCD$ 内平移的有关问题，首先，把矩形 $ABCD$ 的情

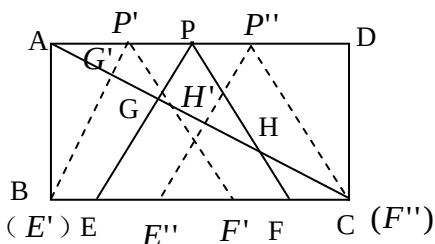
况搞清楚：在已知数据的基础上易知 $\tan \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即

$$\angle ACB = \angle CAD = 30^\circ$$

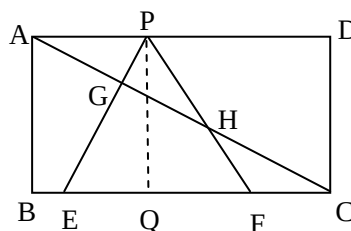
其次，把等边 $\triangle PEF$ 在矩形 $ABCD$ 内平移中的各类形态集中在图 (1) 中，进行观察和比较，容易看到：

第一，在特殊情况 (E 重合于 B 时)，由 $Rt\triangle AB(E')P'$ 可计算出 $P'E' = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2$ 。即 $\triangle PEF$ 的边长为 2。

第二，比较 $\triangle PEF$ 和 $\triangle P'E'F'$ 两种形态对应的图形情况，有 $PH = PA = PP' + P'A = BE + 1$ ，再比较 $\triangle P''E''F''$ 和 $\triangle P'E'F'$ 两种形态所对应的图形情况，有 $P''F''(H'') = P''A = P''P' + P'A = BE'' + 1$ 。这就促使我们形成了对 PH 和 BE 数量关系的猜想，并找到了其根据，至于计算和证明，我们还应按题目提供的一般情况的图形来进行。



(1)



(2)

解：(1) 过 P 作 $PQ \perp BC$ 于 Q，如图 (2)，在 $Rt\triangle PEQ$ 中，

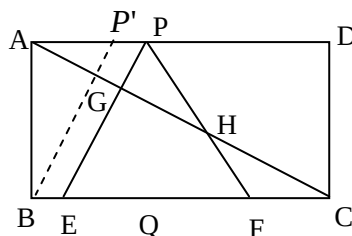
$$\because PQ = AB = \sqrt{3}, \angle PEQ = 60^\circ, \therefore PE = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

(2) PH 和 BE 数量关系是 $PH = BE + 1$ 。理由如下：

作 $BP' \parallel PE$ ，交 AD 于 P' ，如图 (3)

在 $Rt\triangle BP'A$ 中， $BP' = 2, \angle ABP' = 30^\circ, \therefore AP' = 1$ 。

$$\because \angle PAH = \angle PHA = 30^\circ, \therefore PH = PA = PP' + P'A = BE + 1.$$



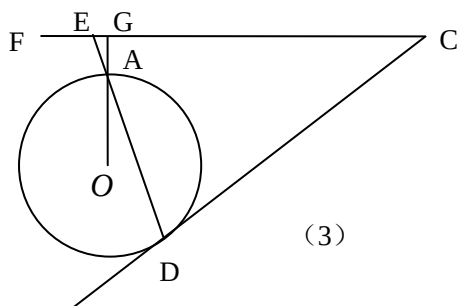
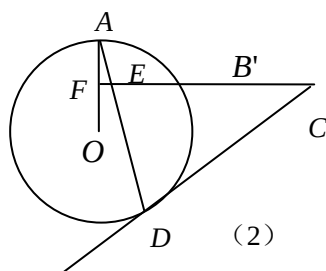
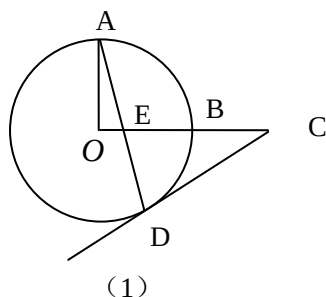
(3)

【说明】正是借助于对特殊情况的考察，特别是不同形态情况的对比，更快地发现了等边 $\triangle PEF$ 平移反映的不变性。

例 5 (1) 如图，(1)， OA, OB 是 $\odot O$ 的两条半径，且 $OA \perp OB$ ，点 C 是 OB 延长线上的任意一点，过点 C 作 CD 切 $\odot O$ 于点 D，连结 AD 交 OC 于点 E，求证： $CD = CE$ 。



(2) 若将图(1)中的半径 OB 所在的直线向上平移交半径 OA 于点 F ，交 $\odot O$ 于点 B' ，其他条件不变，如图(2)，那么 $CD = CE$ 的结论还成立吗？为什么？

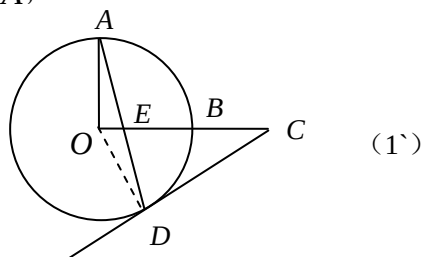


(3) 若将图(1)中的半径 OB 所在的直线向上平移到与 $\odot O$ 相离的位置，它与半径 OA 的延长线交于点 G ，点 E 是 DA 延长线与 CF 的交点，其他条件不变（如图(3)），那么 $CD = CE$ 的结论还成立吗？为什么？

【观察与思考】先考虑图(1)这种特殊情况下是如何推得结论的。背景图形中有两个特殊点：一是 $OA \perp OB$ ，二是 CD 切 $\odot O$ 于点 D ，若连结 OD ——为使切线发挥作用，如图(1')，立刻得到 $\angle OAD = \angle ODA$ ，而分别为它们余角的 $\angle OEA$ 和 $\angle CDE$ 自然也就相等，这样，已得到了 $CD = CE$ 的保证。

将图(2)、图(3)的情况与图(1)的情况对比，上述的“两个特殊点”仍然保持，因此，结论和根据也理应保持。

解：(1) 连结 OD ，如图(1')，由 $OD = OA$ ，得 $\angle OAD = \angle ODA$ ，



$$\because OA \perp OB, \therefore \angle CED = \angle OEA = 90^\circ - \angle OAD.$$

$$\because CD \text{ 切 } \odot O \text{ 于点 } D, \therefore OD \perp CD.$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ - \angle ODA = 90^\circ - \angle OAD = \angle CED.$$

$$\therefore CD = CE.$$

(2) $CD = CE$ 的结论仍然成立，理由是：

在图(2)中连结 OD 。

$$\angle CDE = 90^\circ - \angle ODA = 90^\circ - \angle OAD = \angle FEA = \angle CED, \therefore CD = CE.$$

(3) $CD = CE$ 的结论也是成立的，理由是：

在图(3)中，若连结 OD ，与(1)同理，

$$\text{有 } \angle CDE = 90^\circ - \angle ODA = 90^\circ - \angle OAD = 90^\circ - \angle GAE = \angle CED, \therefore CD = CE.$$

【说明】I、本题的思考突出了先研究特殊，再去沟通其他的情况和特殊情况的本质的联系；

II、在本题正是“平移不改变角度”这一特征，保证了题中反映的不变性的成立。

由以上两个例子看出：

相当多由图形变换引出的不变性或变化规律的问题，解法的思考应沿“变换”为线索，探究清楚其各类形态间的统一和差异，以及变换过程中“变”与“不变”间的关系，



2、由背景扩充引出的不变性或变化规律

由背景扩充，尤其是从特殊到一般，是知识形成与发展的重要途径。在这个过程中，重要的课题就是研究哪些性质保持不变，哪些性质发生了变化，又是怎样的规律变化的。

解决这类问题，思考时应该突出如下两点：

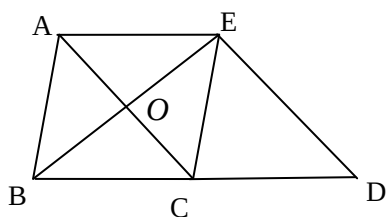
- I、善于构造“特殊”和运用“特殊”；
- II、善于在比较中把握不同情形下的知识与方法的共同点。

(1) 善于构造“特殊”和运用“特殊”

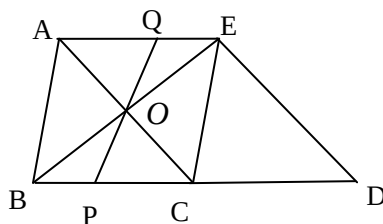
例6 如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 5$ ， $AC = 6$ 。 $\triangle ECD$ 是 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移得到的，连结 BE 交 AC 于点 O ，连结 AE 。

(1) 判断四边形 $ABCE$ 是怎样的四边形，说明理由。

(2) 如图(2)， P 是线段 BC 上一动点(不与 B ， C 重合)。连结 PO 并延长交线段 AE 于点 Q ，四边形 $PQED$ 的面积是否随点 P 的运动而发生变化？若变化，请说明理由；若不变，求出四边形 $PQED$ 的面积。



(1)



(2)

【观察与思考】对于(1)，易推得四边形 $ABCE$ 是菱形；对于(2)，我们可以借助于点 P 的极端位置来思考，假定 P 在 B 点处(虽然题目 P 不与 B ， C 重合，但不影响我们把这种情况作为思考的“桥梁”)，则此时 $S_{\text{四边形}PQED} = S_{\triangle BED}$ ，如此一来，(2)的结论和理由就一起得到了。

解：(1) 四边形 $ABCE$ 是菱形；证明如下：

$\because \triangle ECD$ 是由 $\triangle ABC$ 沿 BC 平移得到的。 $\therefore EC \parallel AB$ ，且 $EC = AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

又 $\because AB = BC$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是菱形。

(2) 四边形 $PQED$ 的面积不随点 P 的运动而发生变化，是确定的值。

由菱形的中心对称性知， $\triangle PBO \cong \triangle QEO$ ， $\therefore S_{\triangle PBO} = S_{\triangle QEO}$ ，



$\because \triangle ECD$ 是 $\triangle ABC$ 平移得到的, $\therefore ED \parallel AC, ED = AC = 6$,

又 $\because BE \perp AC, \therefore BE \perp ED$ 。

$$\therefore S_{\text{四边形} PQED} = S_{\triangle QEO} + S_{\text{四边形} POED} = S_{\triangle PBO} + S_{\text{四边形} POED} = S_{Rt\triangle BED} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot ED = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24。$$

例 7 已知, 如图 (1), 以 $\triangle ABC$ 的边 AB , AC 为边分别向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$, 连结 EG , 试判断 $\triangle AEG$ 和 $\triangle ABC$ 面积之间的关系, 并说明理由。

【观察与思考】 在条件中给出的 $\triangle ABC$ 没有任何其他限制, 为了获得 $\triangle AEG$ 和 $\triangle ABC$ 面积关系的认识, 我们对 $\triangle ABC$ 从“一般”中取出其包含的“特殊”——令 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC = 90^\circ$, 即直角三角形, 如图“特殊”, 明显地看出, 这时有 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle AEG$, 立刻得 $S_{\triangle AEG} = S_{\triangle ABC}$, 因此, 促使我们产生猜想: 对于任意的 $\triangle ABC$, 如

题中操作得到 $\triangle AEG$, 都应当有 $S_{\triangle AEG} = S_{\triangle ABC}$ 。设法验证这个猜想。

因为 $AE = AB$, 只需要再有 $\triangle AEG$ 中 AE 边上的高和 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高相等, 就可推得 $S_{\triangle AEG} = S_{\triangle ABC}$, 而由 $\angle EAG$ 和 $\angle BAC$ 为互补, $AG = AC$, 以上两个高相等是很容易推出的。(见图 (1'))

解: 结论: $S_{\triangle AEG} = S_{\triangle ABC}$ 。理由如下:

作 $GM \perp EA$, 交 EA 的延长线于点 M ; 作 $CN \perp AB$, 交 AB 于点 N 。

$$\text{则: } S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AE \cdot GM, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN。$$

$$\because AE = AB, GM = AG \cdot \sin \angle GAM, CN = AC \cdot \sin \angle BAC,$$

又 $\angle GAM$ 和 $\angle BAC$ 同为 $\angle EAG$ 的补角, 即 $\angle GAM = \angle BAC$,

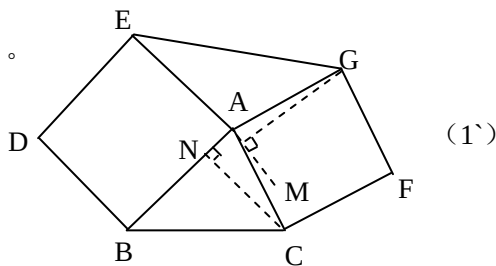
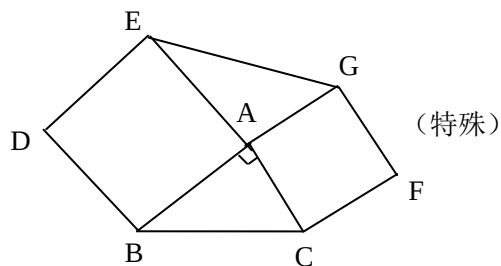
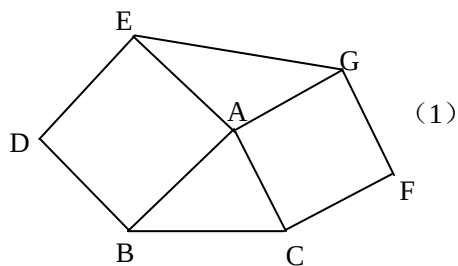
$$\text{且 } AG = AC, \therefore GM = CN$$

$$\therefore S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AE \cdot GM = \frac{1}{2} AB \cdot CN = S_{\triangle ABC}。$$

由以上两例可以看出:

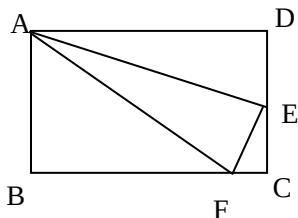
为了探究“一般情况”的某种不变性, 可以构造或选择恰当的“特殊”, 先搞清楚这一“特殊”的情况下的结论及根据, 再由此获得对“一般”的认识及解决的方法。

(2) 善于在情景的比较中把握知识或方法的共同点





例8 如图(1), 小明在研究正方形 $ABCD$ 的有关问题时, 得出: “在正方形 $ABCD$ 中, 如果点 E 是 CD 的中点, 点 F 是 BC 边上一点, 且 $\angle FAE = \angle EAD$, 那么 $EF \perp AE$ 。”他又将“正方形”改为“矩形”、“菱形”、和“任意平行四边形”(如图(2), 图(3), 图(4)), 其他条件不变, 发现仍然有“ $EF \perp AE$ ”的结论。



(1)

(2)

(3)

(4)

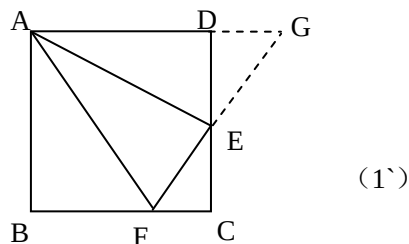
你同意小明的观点吗? 若同意, 请结合图(4)加以说明; 若不同意, 请说明理由。

【观察与思考】若在图(1)中证明 $EF \perp AE$, 应注意利用 BC 的中点 E 的“中心对称功能”, 可延长 EF 交 AD 的延长线于点 G 。如图(1'), 由 $\triangle FEC$ 和 $\triangle GED$ 关于点 E 的中心对称, 易得 $FE = GE$ 。结合 $\angle FAE = \angle GAE$, 立刻得 $AE \perp FE$ 。

对于图(2), 图(3), 图(4)的情况, 上述辅助线和相应的结果都有同样的保证。因此, “ $EF \perp AE$ ”的结论也成立, 且证明方法也相同。

解: (略)

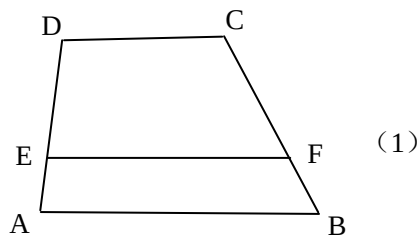
【说明】在本题, 尽管图形背景由特殊扩充到一般, 但由于“ AE 是 $\angle FAD$ 的角平分线”, “ E 是 CD 的中点”这两个结论的决定条件不变, 使得结论也就具有“不变性”, 即“条件本质的不变性”决定了“结论的不变性。”。



(1')

例9 如图(1), 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = b$, $CD = a$, E 为 AD 边上任意一点, $EF \parallel AB$, 且 EF 交 BC 于点 F , 某学生在研究这一问题时发现如下事实:

- ①当 $\frac{DE}{AE} = 1$ 时, 有 $EF = \frac{a+b}{2}$;
- ②当 $\frac{DE}{AE} = 2$ 时, 有 $EF = \frac{a+2b}{3}$;
- ③当 $\frac{DE}{AE} = 3$ 时, 有 $EF = \frac{a+3b}{4}$;



(1)

当 $\frac{DE}{AE} = k$ 时, 参照上述研究结论, 请你猜想用 k 表示 EF 的一般结论, 并给出证明;

(2) 现有一块直角梯形田地 $ABCD$ (如图(2)所示), 其中 $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AB = 310$ 米, $DC = 170$ 米, $AD = 70$ 米, 若要将这块地分成两块, 由农户来承包, 要求这两块地均为直角梯形, 且它们的面积相等, 请你给出具体分割方案。



【观察与思考】对于(1)，由①，②，③的情况和结论容易得到

猜想：当 $\frac{DE}{AE} = k$ 时，应有 $EF = \frac{a+kb}{k+1}$ 。为了获得对这个一般

猜想的证明，我们从对 $\frac{DE}{AE} = 2$ 时这一“简单”情况的研究入手，

以获得证明方法的启示。

如图(1')，若 $\frac{DE}{AE} = 2$ ，作 $CH \parallel DA$ ，交 AB 于 H ，交 EF 于 M （因为我们总是把梯形的问题转化到平行四边

形和三角形中来解决）。易知 $EM = DC = AH$ ， $\frac{CM}{MH} = \frac{DE}{AE} = 2$ ，而由 $\triangle CMF \sim \triangle CHB$ 得

$$\frac{MF}{HB} = \frac{CM}{CH} = \frac{CM}{CM + MH} = \frac{CM}{CM + \frac{1}{2}CM} = \frac{2}{3}, \text{ 即}$$

$$MF = \frac{2}{3}HB = \frac{2}{3}(b-a), \text{ 这样就有 } EF = EM + MF = a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}.$$

这样的证明手段可以“移植”到“ $\frac{DE}{AE} = k$ ”的情况。

对于(2)，实际上是用(1)的结论来解决具体问题。

解：(1) 结论为：“当 $\frac{DE}{AE} = k$ 时，有 $EF = \frac{a+kb}{k+1}$ 。”

至于证明，可类比上面的观察与思考进行（略）。

(2) 若在 AD, CB 上分别有点 E, F ，且 $EF \parallel AB$ ，并且满足 $S_{\text{梯形}DEFC} = S_{\text{梯形}EABF}$ 。

设 $\frac{DE}{AE} = x$ ，则由 $AE + DE = 70$ 得： $AE = \frac{70}{x+1}$, $DE = \frac{70x}{x+1}$ 。

由(1)的结论知： $EF = \frac{170+310x}{x+1}$ 。

$$\text{得方程：} \frac{1}{2} \cdot \frac{70x}{x+1} \cdot \left(170 + \frac{170+310x}{x+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{x+1} \cdot \left(\frac{170+310x}{x+1} + 310\right).$$

化简为 $12x^2 - 7x - 12 = 0$ ，解得 $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$ （舍去）

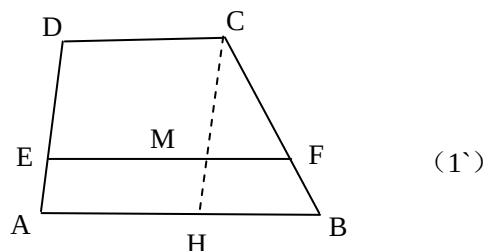
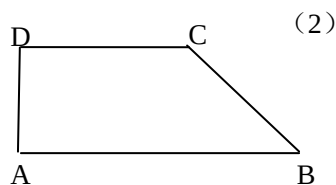
即应在 AD 上取点 E ，使 $AE = \frac{70}{\frac{4}{3}+1} = 30$ （米），作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于 F ，则 EF 就把原直角梯形分成面积相等

的两个直角梯形。

【说明】本题的思考是从简单情况获取对一般情况结论和论证方法的启发。

由以上两例说明：

研究“特殊”情况与“一般”情况之间的知识、方法、原理诸方面的共同之处，是解决扩充型不变性或变化规律问题的一种有效策略。

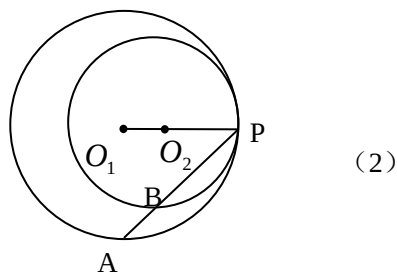
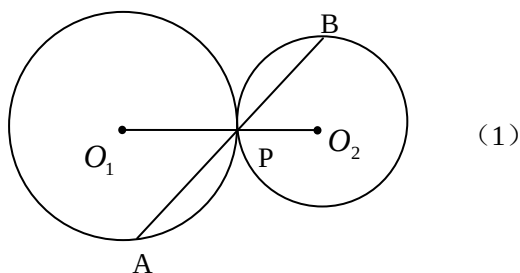




3、由类比引出的图形的不变性或变化规律

“类比”也是人们拓展视野、认识新事物、增长新知识的重要方法和途径，同样，它也是我们在数学中探究图形性质“变中不变”或“变中的变化规律”的重要方法和途径。

例 10 已知， $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切于点 P ，它们的半径分别为 R, r 。一直线绕 P 点旋转，与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 分别交于点 A, B （点 P, B 不重合）。探索规律：

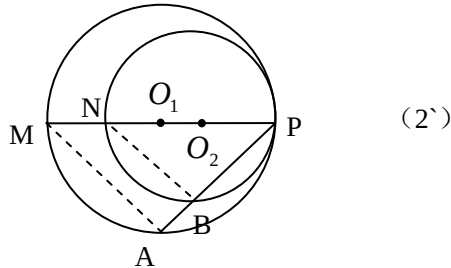
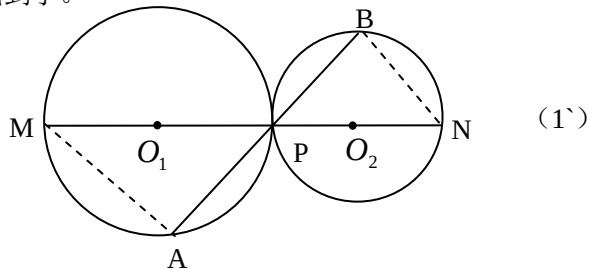


(1) 如图 (1)，当 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切时，探究 $\frac{PA}{PB}$ 与半径 R, r 之间的关系式，请证明你的结论。

(2) 如图 (2)，当 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切时，第 (1) 题探究的结论是否成立？为什么？

【观察与思考】对于 (1)，容易想到构造以直径为斜边的直角三角形，如图 (1')，则有 $Rt\triangle PAM \sim Rt\triangle PBN$ ，可知， $\frac{PA}{PB} = \frac{R}{r}$ ，

对于 (2)，类比 (1) 的解决方法，自然也会想到去构造相似的直角三角形，如图 (2')，则两圆内切时的解决方法也就找到了。



解：(1) 有结论 $\frac{PA}{PB} = \frac{R}{r}$ ，证明如下：

设 $O_1 O_2$ 延长后分别与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于点 M 和点 N ，连结 AM, BN ，如图 (1')。

$\because PM, PN$ 分别为 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 的直径， $\therefore \angle A, \angle B$ 均为直角，又 $\angle APM = \angle BPN$ ，

$\therefore Rt\triangle APM \sim Rt\triangle BPN$ ， $\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PN} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r}$ 。

(2) $\frac{PA}{PB} = \frac{R}{r}$ 的结论仍然成立。（理由请同学们自己说明）。

【说明】就两圆相切来说，外切与内切是两种相对的情况，由外切情况下的某性质很自然地去联想内切情况下的相同性质，这就是典型的“类比”，当然，类比的结果可能成立，也可能不成立，但无论成立还是不成立，都会使认识得到拓展和深化，都是有意义的，当然，本题是两种情况 有相同的结论，即“变中的不变”，这也是知识发展



的一种形式。

例 11 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是 BC 上任意一点, 过 D 分别向 AB, AC 引垂线, 垂足分别为 E, F , CG 是 AB 边上高。

(1) DE, DF, CG 的长之间存在着怎样的等量关系? 并加以证明。

(2) 若 D 在底边的延长线上, (1) 中的结论还成立吗? 若不成立, 又存在怎样的关系? 请说明理由。

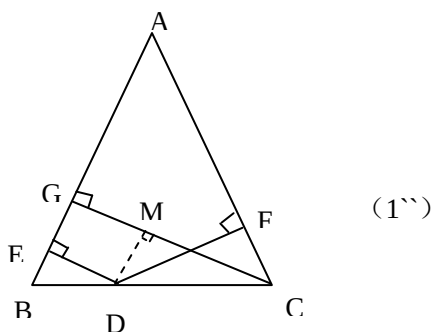
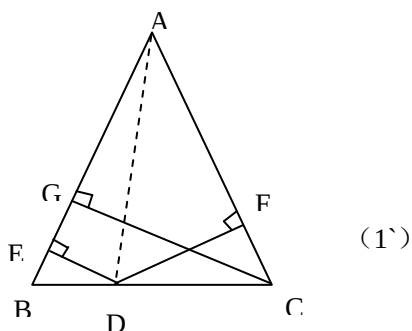
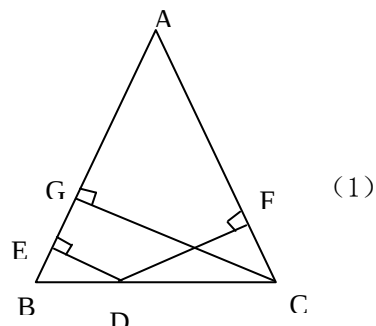
【观察与思考】(1) 是比较熟悉的问题, 结论是: $DE + DF = CG$ 。对于 (2), 通过画图观察, 此时, $DE + DF = CG$ 的结论不再成立, 那新的结论该是怎样的呢? 对比 (1) 的结果证明方法, 也容易得到 (2) 的结果和证明方法。

解: (1) 有结论: $DE + DF = CG$, 证明如下:

方法一: (面积法)

连结 AD (如图 (1')), 则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 即 $\frac{1}{2} AB \cdot CG = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$ 。

因为 $AB = AC$, 所以 $CG = DE + DF$ 。



方法二, (构造全等三角形法或称“截长法”)

作 $DM \parallel AB$, 交 CG 于点 M , 如图 (1'') 由四边形 $EDMG$ 为矩形, 得 $DE = MG$ 。

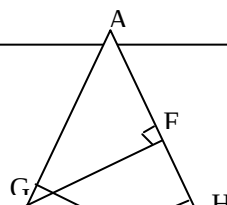
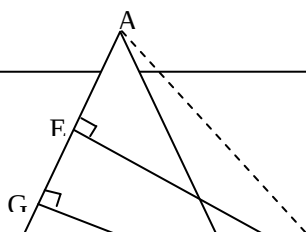
又 $\angle MDC = \angle B = \angle FCD$, 且 CD 公用。

$\therefore Rt\triangle CMD \cong Rt\triangle DFC$, 得 $DF = CM$ 。

$\therefore CG = MG + CM = DE + DF$ 。

(2) 当点 D 在 BC 延长线上时, (1) 中的结论不成立, 而有 $DE - DF = CG$ 。理由如下:

说理一: 连结 AD , 如图 (2')





则 $S_{ABD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$ ，即有， $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot CG + \frac{1}{2} AC \cdot DF$

$\because AB = AC, \therefore DE = CG + DF$ ，即 $DE - DF = CG$ 。

当点 D 在 CB 的延长线上时，则有 $DF - DE = CG$ ，理由如下：

作 $BH \perp AC$ 于点 H，则 $BH = CG$ ，作 $BN \parallel AC$ ，交 DF 于点 N，如图（2''）由四边形 $BHFN$ 为矩形，

得 $FN = BH$ ，又 $\angle DBN = \angle ACB = \angle ABC = \angle DBE$ ，DB 公用。

$\therefore Rt\triangle DBN \cong Rt\triangle DBE$ ， $\therefore DE = DN, \therefore CG = BH = FN = DF - DN = DF - DE$ 。

【说明】I、在本题，点 D 在直线 BC 上，可分三种情况：（1）在线段 BC 上；（2）在线段 BC 的延长线上，（3）在线段 CB 的延长线上，由情况（1）的某种性质联想情况（2），（3）的对应性质，是典型的“类比”。本题的类比结果是原结论不成立，但得到了对应的结论，这就是“变中的变化规律”，同样扩展了知识和认识。

II、本题类比得到的结论虽然不同，但证明方法具有统一性，或说运用着同样的原理和方法，这又体现着“变中的不变”。

以上三类“不变性”或“变化规律”问题，集中体现了探究能力就是在对“变中不变”和“变中变时变为什么”的辨析和掌握中得到提高的，希望同学们在上述解析的基础上，进一步总结，以形成自我变化的更多更有效的思考策略。

二、探究特定结论或特定条件

很多的探究性问题是这样的：或则是对背景图形加上特殊限定，在此基础上探究有无形成特定的性质（或结论）；或则是对背景图形希望能具备某一特殊性质（即结论），为此去探究应当附加怎样的条件。我们把前一类称为“探究特定结论”，后一类称为“探究特定条件”。在各地的中考试卷中，这两类题目呈增加的趋势。

1、“探究特定结论”问题的思考特征

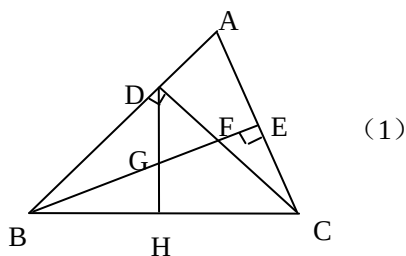
这类问题从结构来看其特征是：在背景图形上附加较多或较强的“特殊条件”，而正是这些“特殊条件”才是“特定结论”得以出现的根据和保证。因此，总体上来说，解决这类问题的切入点正在于与“探究”方向结合的情况下对“特殊条件”的深入研究和恰当运用（当然也要同时兼顾其他条件）。

（1）从条件直接推演

例 1 已知：如图（1）， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于点 D，BE 平分 $\angle ABC$ ，且 $BE \perp AC$ 于 E，与 CD 相交于点 F，H 是 BC 边的中点，连结 DH 与 BE 相交于点 G。



- (1) 求证: $BF = AC$;
 (2) CE 和 BF 有怎样的数量关系, 写出判断并给出证明;
 (3) CE 与 BG 的大小关系如何? 试证明你的结论。



【观察与思考】在三角形 ABC 中添加了诸多限制条件, 从而使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 极为特殊了, 即:

i、由 BE 平分 $\angle ABC$, 和 $BE \perp AC$, 得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 顶角 $\angle ABC = 45^\circ$, 底角 $= 67.5^\circ$ 。

ii、由 $\angle ABC = 45^\circ$, $CD \perp AB$, 得 $\triangle DBC$ 为等腰三角形, 而 DH 为其底边上的中线;

iii、由 $BD = CD$, $\angle DBF = \angle DCA = 22.5^\circ$, 得 $Rt\triangle DBF \cong Rt\triangle DCA$ 。

有了这些研究, 结论的探究和推证就很多容易了。

简解: (1) 由 i、ii、iii、得 $Rt\triangle DBF \cong Rt\triangle DCA$, $\therefore BF = AC$ 。

(2) 由 (1) 知 $BF = AC$, 而由 i 知 $AC = 2CE$, $\therefore BF = 2CE$

(3) 若连结 CG , 由 DH 为 BC 的对称轴知 $CG = BG$, 而 $Rt\triangle CGE$ 中, CG 为斜面边。

$\therefore CE < CG = BG$ 。

【说明】在本题, $\triangle ABC$ 为顶角是 45° 的等腰三角形和 $\triangle DBC$ 为等腰直角三角形是各结论成立的决定因素, 所

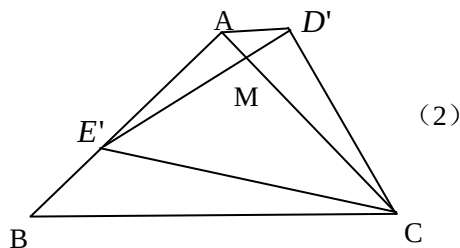
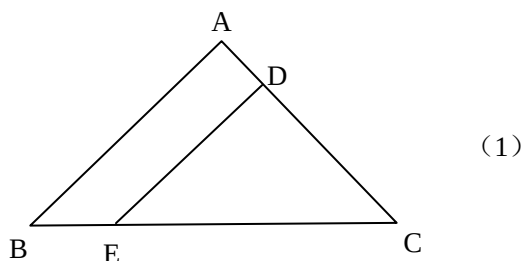
以, 由本题的原始条件 $\longrightarrow$ 如上的 i、ii、iii、是思考的关键步骤, 是“条件研究和运用”的主要体现。

例 2 如图 (1), 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2\sqrt{3}$, D, E 两点分别在 AB, AC 上,

$DE \parallel AB$, $CD = 2\sqrt{2}$, 将 $\triangle CDE$ 绕点 C 顺时针旋转, 得到 $\triangle CD'E'$ (如图 (2)), 点 D', E' 分别与 D, E 对应,

点 E' 在 AB 上, $D'E'$ 与 AC 相交于点 M 。

- (1) 求 $\angle ACE'$ 的度数;
 (2) 判断 $ABCD'$ 是怎样的四边形, 并说明理由。



【观察与思考】结合要求的“结论”, 研究本题的条件, 可知:

i、 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 进而 ($\triangle D'E'C$) 都是等腰直角三角形, 且腰长分别为 $2\sqrt{3}$ 和 $2\sqrt{2}$;

在此基础上进一步有:



ii、在 $Rt\triangle CE'A$ 中, $CE' = CE = 4, AC = 2\sqrt{3}$, 可知 $\angle ACE' = 30^\circ$

iii、在 $\triangle E'CB$ 和 $\triangle D'CA$ 中, $\angle E'CB = \angle D'CA = 15^\circ$, $\frac{BC}{E'C} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{CA}{D'C} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ 。

即 $\triangle E'CB \sim \triangle D'CA$

对旋转后的图形 (2) 中出现的新图形有了如上的认识, 相应的结论就容易求得和探究了。

简解: (1) 由以上的 i、ii、可得 $\angle ACE' = 30^\circ$;

(2) 由 iii、得 $\triangle E'CB \sim \triangle D'CA \therefore \angle CAD' = \angle CBE' = 45^\circ = \angle ACB$, 可知 $AD' \parallel BC$, 而 $\angle ABC = 45^\circ, \angle BCD' = 60^\circ$, 可知 AB 与 $D'C$ 不平行, 所以 $ABCD'$ 是梯形。

【说明】在本题, 条件的研究侧重在两点: 第一, 把基本背景 (1) 对应的情况和旋转结合起来; 第二, 重在围绕要解决的问题 (1) 和 (2) 把相应的新图形 (如图 (2) 中的 $\triangle ACE', \triangle BCE', \triangle ACD'$ 等)。的有关数量搞清楚。

例 3 我们知道: 有两条边相等的三角形叫等腰三角形。类似地, 我们定义: 至少有一组对边相等的四边形叫做等对边四边形。

(1) 请写出一个你学过的特殊四边形中是等对边四边形的图形的名称;

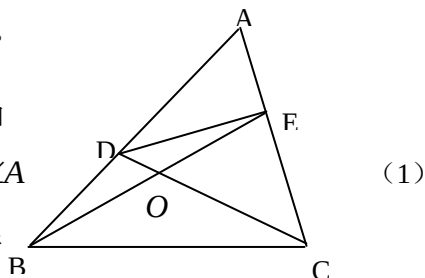
(2) 如图 (1), 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, 设 CD, BE 相交于点 O , 若 $\angle A = 60^\circ, \angle DCB = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle A$ 。

请你写出图中一个与 $\angle A$ 相等的角, 并猜想图中哪个四边形是等对边四边形;

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle A$ 是不等于 60° 的锐角, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, 且 $\angle DCB = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle A$, 探究: 满足上述条件的图形中是否存在等对边四边形, 并证明你的结论。

【观察与思考】在全面审题的基础上很容易解决问题中的 (1), 而由 $\angle BOC = 180^\circ - \angle DCB - \angle EBC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle A = 180^\circ - \angle A$

则在 $\angle A = 60^\circ$ 时, 易知 $\angle BOD = \angle COE = 60^\circ$, 并容易看到四边形



$DBCE$ 可能是等对边四边形, 因此, 问题 (2) 获解。剩下的核心问题是 (3), 即如何在 “ $\angle DCB = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle A$ ” 这个条件下, 去推得 “ $BD = CE$ 。”

i、观察原图形, 容易由 “ $\angle DCB = \angle EBC$ ” 这个条件结合 BC 公用, 想到去作辅助线: “ $BF \perp CD$, 交 CD 延长线于 F , 作 $CG \perp BE$ 于 G 。”以构造出 $Rt\triangle CBF \cong Rt\triangle BCG$, 得到 $BF = CG$ 。

ii、在 i 和基础上, 进一步想到应由 “ $\angle DCB = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle A$ ”, 去导出 $\angle BDF = \angle CEB$, 也即导出 $\angle CDB + \angle CEB = 180^\circ$, 事实上, $\angle CDB = \angle A + (\angle C - \frac{1}{2}\angle A), \angle CEB = \angle A + (\angle B - \frac{1}{2}\angle A)$, 当然有

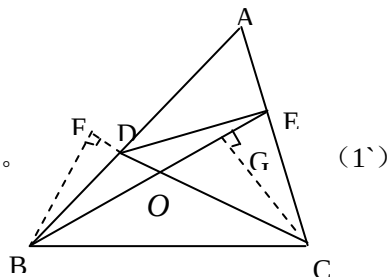


$\angle CDB + \angle CEB = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，由此可推得 $Rt\triangle BDF \cong Rt\triangle CEG$ ，得到 $BD = CE$ 。

解：（1）等腰梯形，矩形等；

（2） $\angle EOC = \angle A$ ，四边形 $DBCE$ 是等对边四边形；

（3）四边形 $DBCE$ 是等对边四边形，证明已在“观察与思考”中。



【说明】我们看，本题的（3）关键步骤是通过作 $BF \perp CD$ ， $CG \perp BE$ 构造全等三角形，但这种作法的诱发，却是条件“ $\angle DCB = \angle ECB$ ”的提示和引导。

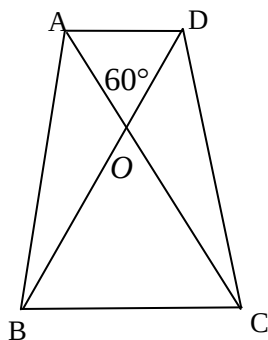
结合背景和探究结论的基本方向研究条件，充分发挥特殊条件的特殊作用，是获得特定结论和给出特定结论证明的基础及保证。

（2）更灵活的利用条件

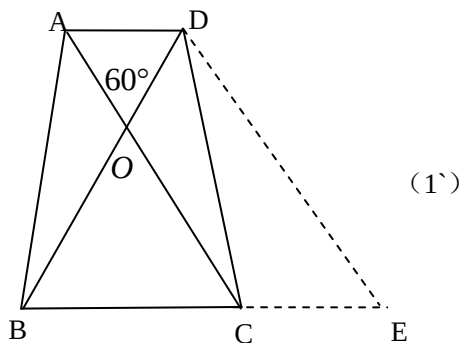
例 4 我们给出如下定义：若一个四边形的两条对角线相等，则称这个四边形为等对角线四边形。请解答下列问题：

（1）写出你所学过的特殊四边形中是等对角线四边形的两种图形的名称；

（2）探究：当等对角线四边形中两条对角线所夹锐角为 60° 时，这对 60° 角所对的两边之和其中一条对角线的大小关系，并证明你的结论。



(1)



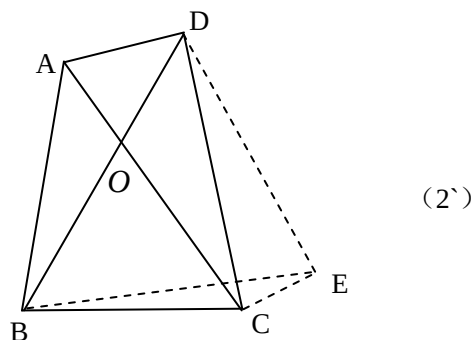
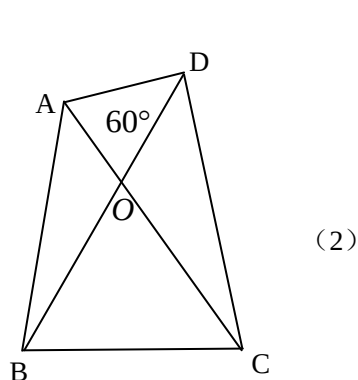
(1')

【观察与思考】问题（1）很多容易，而问题（2）的探究，就要从条件“两条对角线相等，且所夹的锐角为 60° ”出发，进行研究，通过画图，可以知道，符合这个条件的四边形应有两类，如图（1）和（2）分别有 $OA = OD$ 和 $OA < OD$ 。

而为了探究 $BC + AD$ 和 AC 的关系，在图（1）这种特殊情况可如图（1'）那样平移 AC 到 DE ，此时 $\triangle DBE$ 为等边三角形，可推得 $AD + BC = BE = DE = AC$ ；这又促使我们想到：在图（2）这样的情况，仍将 AC 平移至 DE ，如图（2'），连结 BE, CE 。据 $\triangle DBE$ 为等边三角形和 $\triangle BCE$ 的三边关系，有 $AD + BC = CE + BC > BE = DE = AC$ 。



如此一来，结论为 $AD + BC \geq AC$ 连同证明方法都被我们探究了出来。



解：（略）

【说明】在本题，全面认识与分析条件下图形的类型，并以“特殊”情况的研究为先导，顺利地将问题解决。

以上两例提示我们：条件的研究和运用仍有原则与策略，那就是：一要全面考虑它所涵盖的各种情景；二要善于发挥“特殊”情况的指引和铺垫作用。

2、“探究特定条件”问题的思考特征

探究特定条件常用的思考策略是：

- I、借助分析法找结论成立的充分条件；
- II、借助逆向思考的方法由结论倒推条件

（1）借助“分析法”寻找结论成立的充分条件

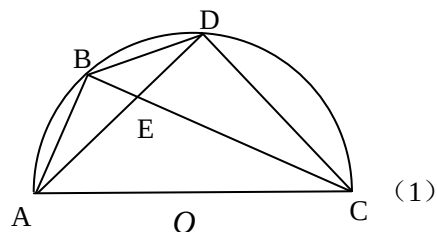
大家对“分析法”应较为熟悉，现公举一例说明。

例5 如图（1），半圆 O 为 $\triangle ABC$ 的外接半圆， AC 为直径， D 为弧 BC 上的一动点。

（1）问添加一个什么条件后，能使得 $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BD}$ ？请说明理由。

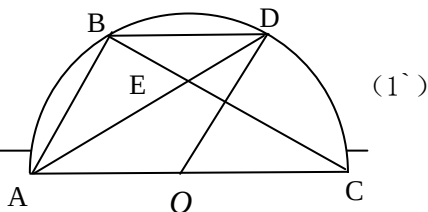
（2）若要有 $AB \parallel OD$ ，点 D 所在的位置应满足什么条件？

（3）如图（1'），在（1）和（2）的条件下，四边形 $AODB$ 是什么特殊四边形？证明你的结论。



【观察与思考】（1）和（2）是探究特定条件，而（3）是探究特定结论。

对于问题（1），要使 $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BD}$ 成立，只需有 $\triangle BDE \sim \triangle BCD$ ，





而在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\angle DBE$ 即 $\angle CBD$, 故只需 $\angle ADB = \angle DCB$,

因此, 添加的条件可以是 B 为弧 AD 的中点。或 $AB = BD$;

对于问题 (2), 要使 $AB \parallel OD$, 只需 $\angle BAC = \angle DOC$, 而这又只

需 D 为弧 BC 的中点。

对于问题 (3), 满足 (1) 和 (2) 的条件, 即弧 $AB =$ 弧 $BD =$ 弧 DC , 对应的图形如图 (1'), 由 $\angle BDA = \angle DAC$, 得 $BD \parallel OA$, 又已有 $AB \parallel DO$, 且 $OA = OD$, 所以四边形 $AODB$ 菱形。

解: (略)

【说明】 在较简单的情况下, 如本题, 用“分析的方法”是探究特定条件最常用与最有效的方法。

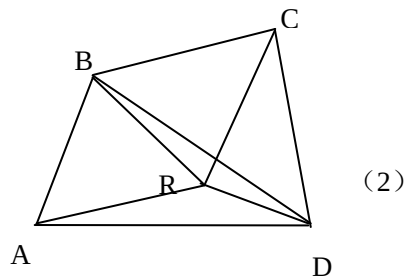
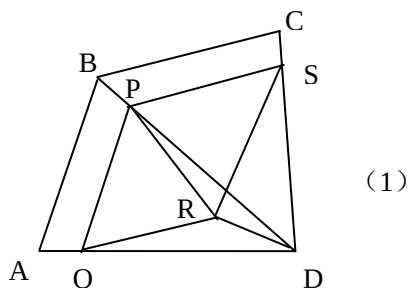
(2) 借助逆向思考由结论倒推条件

即将结论加入已有的条件之中, 然后推演, 由此得出某一结果, 再检验它是否正好为要求的条件。

例 6 如图 (1), 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = BC = CD$, $\angle BAD$ 和 $\angle CDA$ 均为锐角, 点 P 是对角线 BD 上的一点, $PQ \parallel BA$, 交 AD 于点 Q , $PS \parallel BC$, 交 DC 于点 S , 四边形 $PQRS$ 是平行四边形。

(1) 当点 P 与点 B 重合时, 图 (1) 变为图 (2), 若 $\angle ABD = 90^\circ$, 求证: $\triangle ABR \cong \triangle CRD$;

(2) 对于图 (1), 若四边形 $PRDS$ 也是平行四边形, 此时, 你能推出四边形 $ABCD$ 还应满足什么条件?



【观察与思考】 问题 (1) 是一道寻常的证明题, 容易解决。

问题 (2) 就属于一个“探究特定条件”的问题了, 用逆向思考的方法, 构造一个新命题: 条件是: 本题的原有条件, 再加上“四边形 $PRDS$ 是平行四边形”, 探究结论: 四边形 $ABCD$ 还具有怎样的性质? 该命题相应的图形应是图 (3), 解决这个命题可获 (2) 的答案。

解: (1) 在图 (2) 中, $\angle ABD = 90^\circ$, $AB \parallel CR$, $\therefore CR \perp BD$ 。

$\because BC = CD$, $\therefore \angle BCR = \angle DCR$ 。

$\because ABCR$ 是平行四边形, $\therefore \angle BCR = \angle BAR$, $\therefore \angle BAR = \angle DCR$,

又 $AB = CR$, $AR = BC = CD$,

$\therefore \triangle ABR \cong \triangle CRD$,



(2) 这时如图 (3), 由 $PS \parallel QR, PS \parallel RD$ 知, 点 R 在 QD 上, 故 $BC \parallel AD$ 。

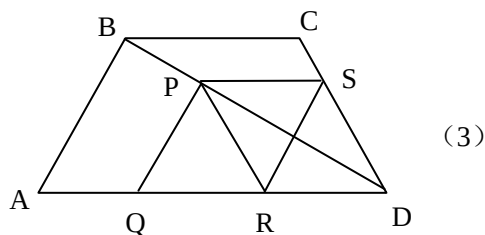
又由 $AB = CD$, 知 $\angle A = \angle CDA$ 。

$\therefore SR \parallel PQ \parallel BA$,

$\therefore \angle SRD = \angle A = \angle CDA, \therefore SR = SD$ 。

$\therefore PS \parallel BC$ 及 $BC = CD, \therefore SP = SD$ 。

$\therefore SP = DR, \therefore SR = SD = RD. \therefore \angle CDA = 60^\circ$ 。

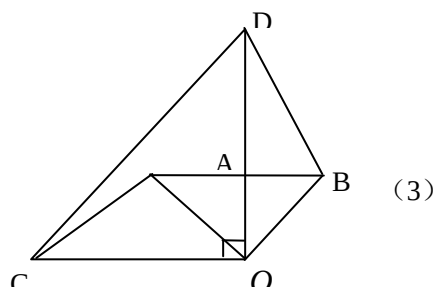
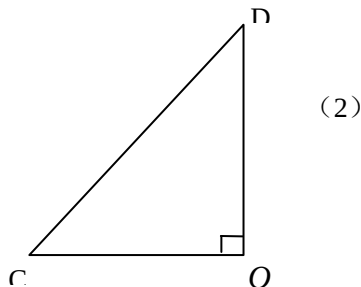
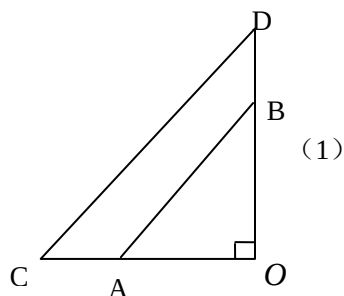


所以, 要使四边形 $PRDS$ 也是平行四边形, 四边形 $ABCD$ 还应满足 $BC \parallel AD, \angle CDA = 60^\circ$ 。

【需要特别说明的是】像本例用“逆向思考”的方法探究条件, 应当再回来验证原题加上该条件后, 确能保证欲有结论的成立, 只是我们这里的推演过程的确是可逆的, 因此没有强调这一点, 但在其他情况的使用中, 应注意“验证”这一步骤。

练习题

1、如图 (1), 两个不全等的等腰直角三角形 OAB 和 OCD 叠放在一起, 并且有公共的直角顶点 O 。



(1) 将图 (1) 中的 $\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° , 在图 (2) 中作出旋转后的 $\triangle OAB$ (保留作图痕迹, 不写作法, 不证明)。

(2) 在图 (1) 中, 你发现线段 AC, BD 的数量关系是_____, 直线 AC, BD 相交成_____度角。

(3) 将图 (1) 中的 $\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转一个锐角, 得到图 (3), 这时 (2) 中的两个结论还成立吗? 作出判断并说明理由。若 $\triangle OAB$ 绕点 O 继续旋转更大的角时, 结论仍然成立吗? 作出判断, 不必说明理由。

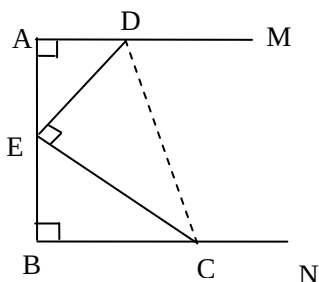
2、如图 (1), 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 顶点 D, C 分别在 AM, BN 上运动, (点 D 不与 A 重合, 点 C 不与 B 重合)。 E 是 AB 上的动点 (点 E 不与 A, B 重合) 在运动过程中始终保持 $DE \perp EC$ 且 $AD + DE = AB = a$ 。

(1) 证明: $\triangle ADE \sim \triangle BEC$

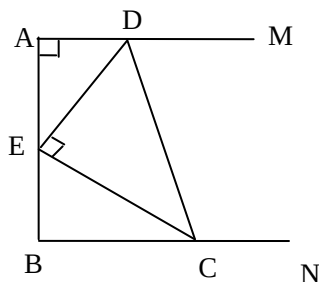
(2) 当点 E 为 AB 边的中点时 (如图 (2)), 求证: ① $AD + BC = CD$; ② DE, CE 分别平分 $\angle ADC, \angle BCD$;



(3) 设 $AE = m$ ，请探究： $\triangle BEC$ 的周长是否与 m 的值有关，若有关，请用含有 m 的代数式表示 $\triangle BEC$ 的周长，若无关，请说明理由。



(1)

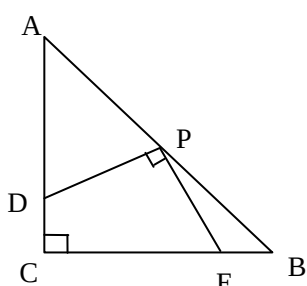


(2)

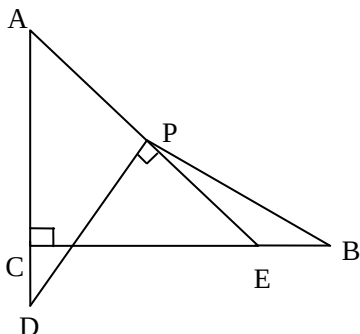
3、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ 。

(1) 将一块等腰直角三角形的直角顶点放在斜边 AB 的中点 P 处，将三角板绕点 P 旋转，如图 (1) 和图 (2)，判断线段 PD 和 PE 之间有什么数量关系？并就图形 (1) 给出证明；

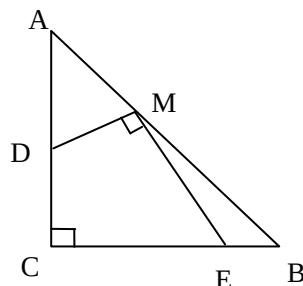
(2) 若将三角板的直角顶点放在斜边 AB 上的 M 处，且 $AM : BM = m : n$ ，和前面一样操作，试问线段 MD 和 ME 之间有什么数量关系？并结合图 (3) 加以证明。



(1)

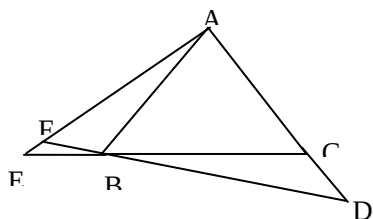


(2)

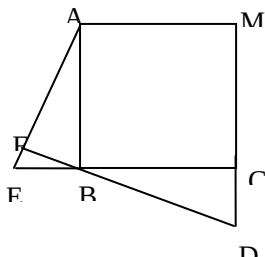


(3)

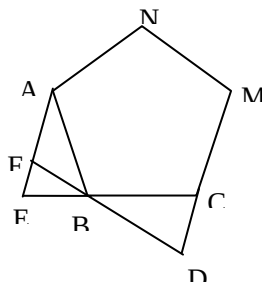
4、如图 (1)，(2)，(3) 中，点 E ， D 分别是正三角形 ABC ，正四边形 $ABCM$ ，正五边形 $ABCMN$ 中以点 C 为顶点，一边延长线和另一边反向延长线上的点，且 $BE = CD$ ， DB 延长线交 AE 于 F 。S



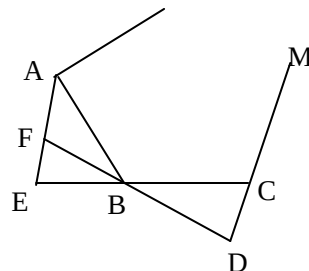
(1)



(2)



(3)



(4)

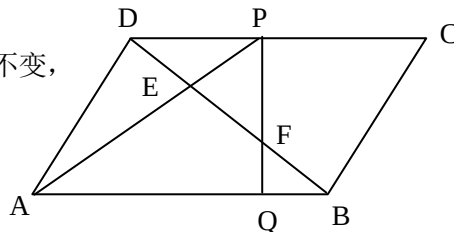
(1) 求图 (1) 中， $\angle AFB$ 的度数；

(2) 图 (2) 中， $\angle AFB$ 的度数为 _____；图 (3) 中 $\angle AFB$ 的度数为 _____。



(3) 根据前面探索, 请你将本题推广到一般的正 n 边形情况。

5、(1) 在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 为对角线 DB 的两个等分点, 连结 AE 延长交 CD 于 P , 连结 PF 延长交 AB 于 Q , 如图, 探究: AQ 和 BQ 之间的数量关系, 并给出证明。



(2) 若将平行四边形 $ABCD$ 改为梯形, ($AB \parallel CD$), 其他条件不变,

此时 (1) 中的结论还成立吗? (不必说明理由)。

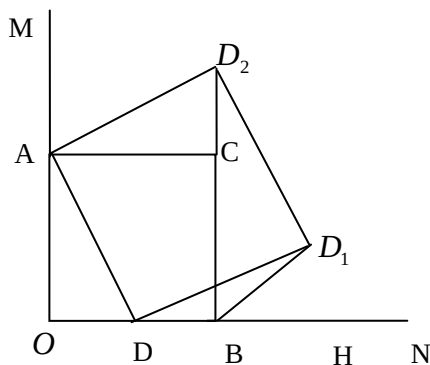
6、已知, $\angle MON = 90^\circ$, 四边形 $AOBC$ 是正方形, 其中点 A, B 分别在射线 OM, ON 上。

(1) 如图, 设 D 为 OB 的中点, 以 AD 为边在 $\angle MON$ 内作正方形 ADD_1D_2 ;

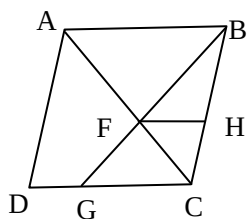
①求 $\angle NBD_1$ 的度数;

②求证: 点 D_2 在直线 BC 上。

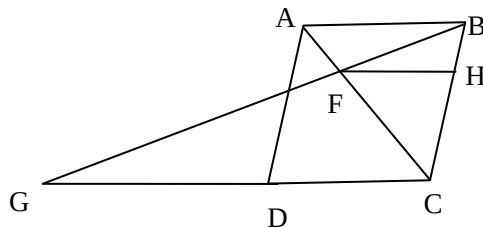
(2) 设 P 为射线 ON 上任意一点, 以 AP 为边在 $\angle MON$ 内作正方形 APP_1P_2 。请画图, 写出与 (1) 中问题对应的两个问题, 作出判断并说明理由。



7、如图 (1), 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, G 是线段 CD 上任意一点时, 连结 BG 交 AC 于 F 。过 F 作 $FH \parallel CD$ 交 BC 于 H , 可以证明结论 $\frac{FH}{AB} = \frac{FG}{BG}$ 成立。



(1)



(2)

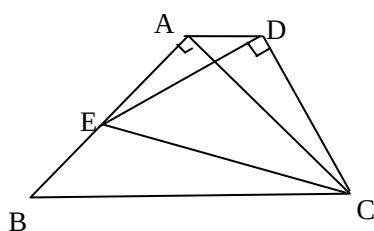
(1) 探究: 如图 (2), 上述条件中, 若 G 在 CD 的延长线上, 其它条件不变时, 其结论是否成立? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请说明理由。



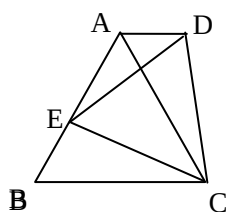
(2) 计算：若菱形 $ABCD$ 中， $AB = 6, \angle ADC = 60^\circ$ ， G 在直线 CD 上，且 $CG = 16$ ，连结 BG 交 AC 所在的直线于 F ，过 F 作 $FH \parallel CD$ 交 BC 所在的直线于 H ，求 BG 与 FG 的长。

(3) 发现：通过上述过程，你发现 G 在直线 CD 上时，结论 $\frac{FH}{AB} = \frac{FG}{BG}$ 还成立吗？

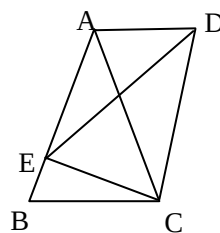
8、已知：等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = 90^\circ$ ，如图 (1) E 为 AB 上任意一点，以 CE 为斜边作等腰直角三角形 CDE ，连结 AD ，则有 $AD \parallel BC$ 。



(1)



(2)



(3)

(1) 若将等腰直角三角形 ABC 改为正三角形 ABC ，如图 (2)， E 为 AB 边上任意一点， $\triangle CDE$ 为正三角形，连结 AD ，上述结论还成立吗？答：_____。

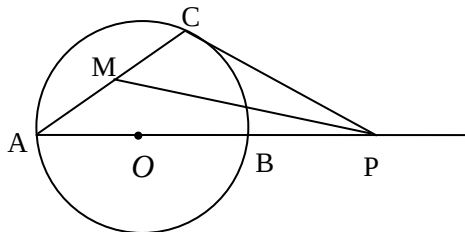
(2) 若 $\triangle ABC$ 为任意等腰三角形， $AB = AC$ ，如图 (3)， E 为 AB 边上任意一点， $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ ，连结 AD ，请问 AD 与 BC 的位置关系怎样？答：_____。

(3) 请你在上述 3 个结论中，任选一个结论进行证明。

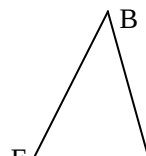
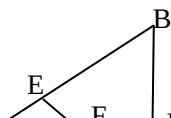
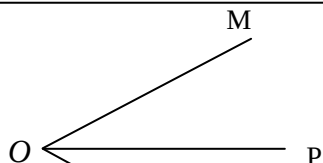
9、如图， $\odot O$ 的直径 $AB = 6\text{cm}$ ， P 是 AB 延长线上的一点，过 P 点作 $\odot O$ 的切线，切点为 C ，连结 AC 。

(1) 若 $\angle CPA = 30^\circ$ ，求 PC 的长。

(2) 若点 P 在 AB 的延长线上运动， $\angle CPA$ 的平分线交 AC 于点 M ，你认为 $\angle CMP$ 的大小是否发生变化？若变化，请说明理由，若不变，求出 $\angle CMP$ 的值。



10、如图 (1)， OP 是 $\angle MON$ 的平分线，请你利用该图形画一对以 OP 所在直线为对称轴的全等三角形。





(1)

(2)

(3)

请你参考这个作全等三角形的方法，解答下列问题。

(1) 如图(2)，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 是直角， $\angle B = 60^\circ$ ， AD ， CE 分别是 $\angle BAC$ ， $\angle BCA$ 的平分线， AD ， CE 相交于点 F ，请你判断并写出 FE 与 FD 之间的数量关系。

(2) 如图(3)，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle ACB$ 不是直角，而(1)中的其他条件不变。

请问，你在(1)中所得结论是否仍然成立？请证明；若不成立，请说明理由。

11、如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， M 是 AB 的中点， $AM = AN$ ， $MN \parallel AC$ 。

(1) 求证： $MN = AC$ ；

(2) 如果把条件“ $AM = AN$ ”改为“ $AM \perp AN$ ”，其它条件不变，那么 $MN = AC$ 不一定成立，如果再改变一个条件，就能使 $MN = AC$ 成立，请你写出改变的条件并说明理由。

