



关节十四

坐标系里的几何图形

将几何图形置于坐标系，是为了用代数的方法研究图形，因此坐标系里是“数形结合”的大演场，是“几何与代数综合”的新舞台。现在，我们就来研究这类问题的思考与解法特征。

坐标系里的几何图形问题又可分三类：

I、坐标系里的基本几何图形；

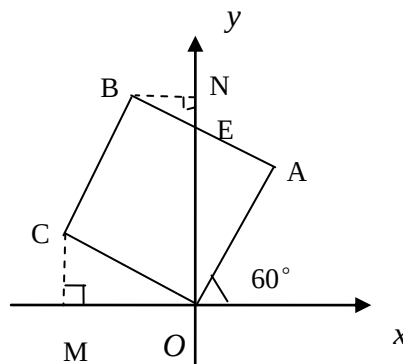
II、坐标系里的几何图形引入动点；

III、坐标系里的几何图形实施交换。

※这三类问题围绕的共同核心都是“求点的坐标”与“求线段的长度”，解决的共同依据是“几何图形的性质”（包括变换的性质）和“几何计算”（特别是构造与解直角三角形。）

一、坐标系里的基本几何图形

例1 如图，已知边长为1的正方形OABC在直角坐标系中，B，C两点在第二象限内，OA与x轴的夹角为 60° ，那么C点的坐标是_____，B点的坐标是_____。



【观察与思考】 去构造合适的直角三角形，如图那样作辅助线，可由 $Rt\triangle OCM$ 求得点C的坐标，由 $Rt\triangle OEA$ 和 $Rt\triangle BEN$ 求得点B的坐标。

解：如图所示，作 $CM \perp x$ 轴于点M，在

$Rt\triangle OCM$ 中， $OC=1$ ， $\angle COM=30^\circ$ ，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}, MO = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore C \text{ 点的坐标为 } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

又设AB与y轴的交点为E， $BN \perp y$ 轴于N。

$$\text{在 } Rt\triangle OEA \text{ 中， } OA=1, \angle EOA=30^\circ, AE = \frac{\sqrt{3}}{3}, OE = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



在 $Rt\triangle BEN$ 中, $BE = AB - AE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $\angle BEN = 60^\circ$

$$\therefore EN = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, BN = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, ON = OE + EN = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$\therefore$ 点 B 在第二象限, $\therefore$ B 点的坐标为 $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$ 。

【说明】从本题可以看出:

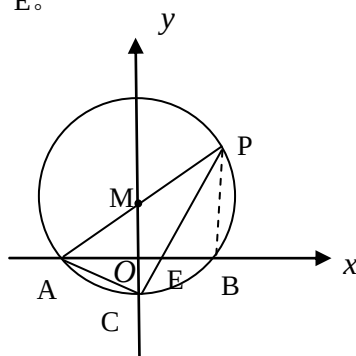
I、求点的坐标是坐标系里几何图形问题的核心,而求点的坐标的基本过程是分这样的两步走:首先,选定或构造恰当的直角三角形,通过解相关的直角三角形,求得有关的线段的长;然后根据点所在的象限,将有关线段的长转换为点的坐标。

II、坐标系里图形问题解法的优或劣,决定因素表现在对相关直角三角形的选取和构造上。

例2 如图,在平面直角坐标系中,以点 $M(0, \sqrt{3})$ 为圆心,以 $2\sqrt{3}$ 长为半径作 $\odot M$ 交 x 轴于 A, B 两点,交 y 轴于 C, D 两点,连结 AM 并延长交 $\odot M$ 于 P 点,连结 PC 交 x 轴于 E。

(1) 求出 CP 所在直线的解析式;

(2) 连结 AC, 求 $\triangle ACP$ 的面积。



【观察与思考】对于(1), 要求 CP 所在直线的解析式, 只要求出 C 点和 P 点的坐标即可。

对于(2), 要求 $\triangle ACP$ 的面积, 注意 $\angle ACP = 90^\circ$, 则可归结为去求线段 AC, PC 的长度。当然更巧妙的方法是在知道 $\angle MAC = 60^\circ$ 的情况下, 转为去求等边三角形 ACM 的面积。

解: (1) 连结 PB, $\therefore PA$ 是 $\odot M$ 的直径, $\therefore \angle PBA = 90^\circ$ 。

$\therefore DC$ 是 $\odot M$ 的直径, 且垂直弦 AB, $\therefore DC$ 平分弦 AB。

在 $Rt\triangle AMO$ 中, $AM = 2\sqrt{3}$, $OM = \sqrt{3}$, $\therefore AO = OB = 3$ 。

又 $\therefore MO \perp AB$, $\therefore PB \parallel MO$. $\therefore PB = 2OM = 2\sqrt{3}$, $\therefore P$ 点的坐标为 $(3, 2\sqrt{3})$ 。

又知 $C(0, -\sqrt{3})$, 设直线 CP 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 则

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = 3k + b \\ -\sqrt{3} = b \end{cases} \quad \text{解得:} \quad \begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \quad \therefore \text{直线 CP 的解析式为 } y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$



(2) 在 $Rt\triangle AMO$ 中, $\tan \angle AMO = \frac{AO}{MO} = \sqrt{3}, \therefore \angle AMO = 60^\circ$

又 $\because AM = CM, \therefore \triangle AMC$ 为等边三角形, 且边 $AC = AM = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\triangle ACM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{而 } S_{\triangle ACP} = 2S_{\triangle ACM} = 2 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

【说明】I、本例进一步说明, 坐标系里图形式问题, 都是以求点的坐标和线段的长度为核心, 为基础的。

II、要善于抓住背景图形的特征, 如本题的第(2)问, 正是利用了 $\triangle ACM$ 为等边三角形这一特殊点, 从而使计算简化了。

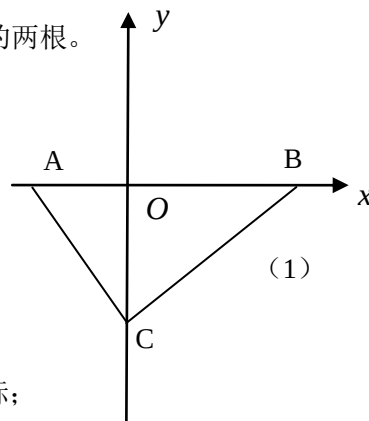
例3 如图(1), 在平面直角坐标系中, $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 在 x 轴上, 顶点 C 在 y 轴的负半轴上, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$,

点 P 在线段 OC 上, 且 PO, PC 的长 ($PO < PC$) 是方程 $x^2 - 12x + 27 = 0$ 的两根。

(1) 求 P 点的坐标;

(2) 求 AP 的长;

(3) 在 x 轴上是否存在点 Q , 使以点 A, C, P, Q 为顶点的四边形是梯形? 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由。



【观察与思考】对于(1), 只要求出题目所给方程的根, 则易知 P 点的坐标;

对于(2), 由(1)已求得 P 点的坐标, 再由 OC 的长度和 $\tan \angle ACO = \tan \angle ABC$, 可由 $Rt\triangle ACO$ 中推得 A 点的坐标, 进而可得 AP 的长;

对于(3)实际上是由 P 点作与 AC 的平行的直线和 x 轴的交点 Q , 或由 C 点作与 AP 平行的直线和 x 轴的交点 Q , 再依作法求 Q 点的坐标。

解: (1) 解方程 $x^2 - 12x + 27 = 0$, 得 $x_1 = 3, x_2 = 9$ 。

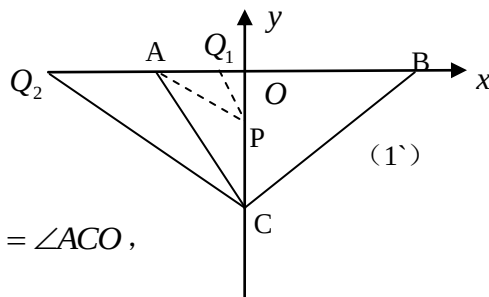
又 $PO < PC$, 可知 $PO = 3$ 。得 P 点的坐标为 $P(0, -3)$ 。

(2) 由(1)知 $PO = 3, PC = 9, \therefore OC = 12$ 。又 $\because \angle ABC = \angle ACO$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CAO$ 中, $AO = OC \cdot \tan \angle ACO = 12 \times \frac{3}{4} = 9, \therefore A(-9, 0)$ 。

$$\therefore AP = \sqrt{OA^2 + OP^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}.$$

(3) 如图(1'), 由图上分析可知: 当 $PQ \parallel CA$, 且交 x 轴于 Q_1 时, 四边形 $ACPQ_1$ 是梯形, 或者, $CQ_2 \parallel PA$, 且交 x 轴于 Q_2 时, 四边形 AQ_2CP 为梯形。





①若 Q_1 在 x 轴上, 且 $PQ_1 \parallel AC$, 则 $Rt\triangle OQ_1P \sim Rt\triangle OAC$,

$$\therefore \frac{OQ_1}{OP} = \frac{OA}{OC}, \therefore OQ_1 = \frac{3 \times 9}{12} = \frac{9}{4} \therefore Q_1(-\frac{9}{4}, 0)。$$

②若 Q_2 在 x 轴上, 且 $CQ_2 \parallel AP$, 则 $Rt\triangle OQ_2C \sim Rt\triangle OAP$,

$$\therefore \frac{OQ_2}{OC} = \frac{OA}{OP}, \therefore OQ_2 = \frac{12 \times 9}{3} = 36, \therefore Q_2(-36, 0)。$$

这就是说, 当 Q 的坐标为 $(-\frac{9}{4}, 0)$ 时, 四边形 $ACPQ$ 为梯形, 而当 Q 的坐标为 $(-36, 0)$ 时, 四边形 $AQCP$ 也为梯形。

【说明】 1、可以看出, 求点的坐标和线段长都是坐标系里图形问题的基础, 除了运用解直角三角形的方法之外, 借助于相似三角形 (特别是相似的直角三角形) 也是常用的手段。

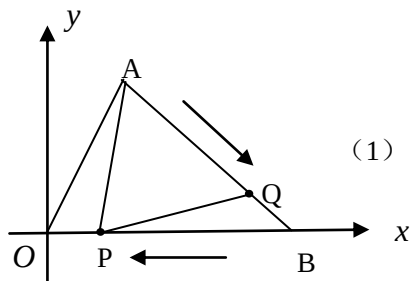
11、类似于本题中 (3) 这样的问题, 切要注意先在图形上分析清楚, 然后再去进行推导和计算, 我们把它概括为 “先在图上分析、操作, 再用代数的方法表示出来。”

二、坐标系里的图形引入动点

例 1 如图 (1), 直角坐标系中, 已知点 $A(2, 4)$, $B(5, 0)$, 动点 P 从点 B 出发沿 BO 向终点 O 运动, 动点 Q 从点 A 出发沿 AB 向终点 B 运动, 两点同时出发, 速度均为每秒 1 个单位, 设从出发起运动了 x s。

(1) 求 Q 点的坐标; (用含 x 的代数式表示)

(2) 当 x 为何值时, $\triangle APQ$ 是一个以 AP 为腰的等腰三角形?



【观察与思考】 对于 (1), 若作 $AM \perp x$ 轴于 M , 作 $QN \perp x$ 于 N , 可借助 $Rt\triangle BQN$ 和 $Rt\triangle BAM$ 的相似关系, 导出 Q 点的坐标来。

对于 (2), 可通过 “等腰” (即线段相等) 构造关于 x 的方程来解决。

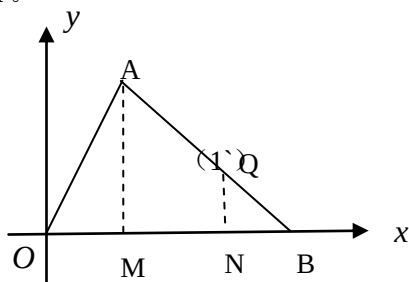
解: (1) 如图 (1'), 作 $AM \perp x$ 轴于 M , 作 $QN \perp x$ 轴于 N , 在 $Rt\triangle BAM$ 中,

$AM = 4, BM = 5 - 2 = 3, \therefore AB = 5$, 在 $Rt\triangle BQN$ 中, $BQ = 5 - x$ 。

$$\therefore Rt\triangle BQN \sim Rt\triangle BAM, \therefore \frac{QN}{AM} = \frac{BN}{BM} = \frac{BQ}{BA}。$$

$$\therefore QN = \frac{AM \cdot BQ}{BA} = \frac{4}{5}(5 - x) = 4 - \frac{4}{5}x,$$

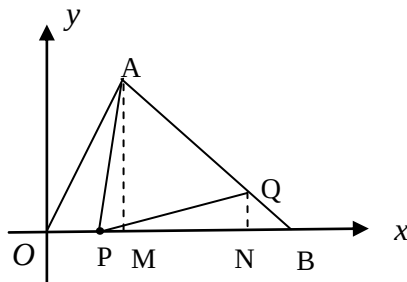
$$BN = \frac{BM \cdot BQ}{BA} = \frac{3}{5}(5 - x),$$





$$\therefore ON = OB - BN = 5 - \frac{3}{5}(5-x) = 2 + \frac{3}{5}x.$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } (2 + \frac{3}{5}x, 4 - \frac{4}{5}x).$$



(1'')

(2) 见图 (1''), P 点的坐标为 $(5-x, 0)$, 其中 $0 \leq x \leq 5$ 。

$$PN = 2 + \frac{3}{5}x - (5-x) = \frac{8}{5}x - 3, PM = |2 - (5-x)| = |x-3|,$$

$AQ = x$, 若 $\triangle APQ$ 是以 AP 为腰的等腰三角形, 则有

$$\textcircled{1} AP = AQ, \text{ 即 } AP^2 = AQ^2, \text{ 也即 } AM^2 + PM^2 = AQ^2, \text{ 得 } 4^2 + (x-3)^2 = x^2, \text{ 从中解得 } x = \frac{25}{6}.$$

$$\textcircled{2} PQ = AP, \text{ 即 } PQ^2 = AP^2, \text{ 也即 } QN^2 + PN^2 = AM^2 + PM^2, \text{ 得}$$

$$(4 - \frac{4}{5}x)^2 + (\frac{8}{5}x - 3)^2 = 4^2 + (x-3)^2, \text{ 解得 } x_1 = 0 \text{ (舍去)}, x_2 = \frac{50}{11}.$$

经检验可知, 当 $x = \frac{25}{6}$ 或 $x = \frac{50}{11}$ 时, $\triangle APQ$ 都是以 AP 为腰的等腰三角形。

【说明】1、本例说明, 坐标系里的图形与动点相关的问题, 其基础问题仍然是求点的坐标和线段的长度, 只是此时有关的量, 可能要用与“运动”有关的数量的代数式来表示。

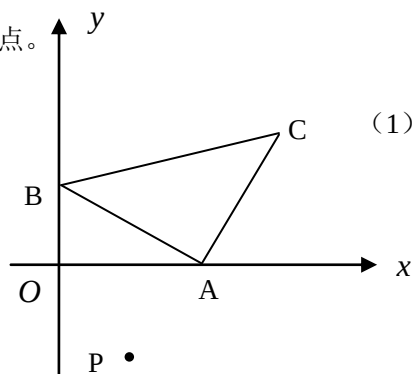
11、从本题解的过程可以看到, 善于构造恰当的直角三角形, 以及灵活恰当地实施“坐标”与“线段长”之间的转换, 是落实解法的可靠保证。

例 2 如图 (1), 在直角坐标系里, 已知点 $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 1)$, 以线段 AB 为一直角边在第一象限内作等腰直角三角形 ABC, 其中 $\angle BAC = 90^\circ$, 点 $P(1, a)$ 为坐标系中的一个动点。

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$;

(2) 证明不论 a 取任何实数, $\triangle BOP$ 的面积是一个常数;

(3) 要使得, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP}$, 求实数 a 的值。



(1)



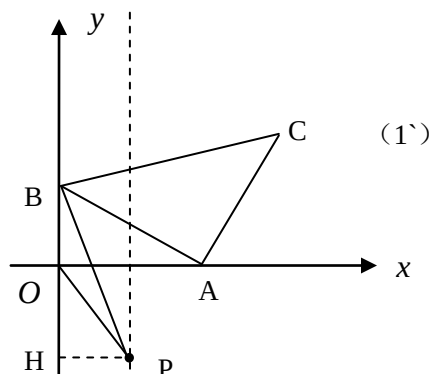
【观察与思考】对于(1)，只需求出线段 AB 的长度即可；

对于(2)，容易知道动点 $P(1, a)$ ，是在 $x=1$ 这条直线上，如图(1')，而 $x=1$ 和 y 轴是平行的，所以在 $\triangle BOP$ 中，边 BO 上的高是确定不变的值。

对于(3)， $S_{\triangle ABP}$ 是由动点 P 决定的，从而是关于实数 a 的函数，

令这个函数的值和 $S_{\triangle ABC}$ 相等，由该方程可解出相应 a 的值，只是

$S_{\triangle APD}$ 的计算需要找到好的落实方法。如图(1'')，设点 N 的坐标为 $(1, 0)$ ，过点 N 作垂线 x 轴的直线为 l （也即 $x=1$ ）， P 在 l 上，又设 l 和 AB 交于点 D ，可知有 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle BPD}$ 。而后两个三角形面积易求。



解：(1) $\because A(\sqrt{3}, 0)$ ， $B(0, 1)$ ， $\therefore OA = \sqrt{3}$ ， $OB = 1$ ， $\therefore AB = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ 。

$\because Rt\triangle ABC$ 是以 AB 为直角边的等腰直角三角形。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2。$$

(2) 如图(1')，设 $PH \perp y$ 轴于 H ，则 $PH = 1$ 。

$$\therefore S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2} BO \cdot PH = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}，为定值 \frac{1}{2}。$$

(3) 如图(1'')，设点 $N(1, 0)$ ，过点 N 且垂直于 x 轴的直线为 l ，则动点 P 在 l 上。

设 l 与 AB 交于点 D ，则由 $Rt\triangle ADN \sim Rt\triangle ABO$ ，得 $\frac{DN}{BO} = \frac{AN}{AO}$ ，即 $\frac{DN}{1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ 。

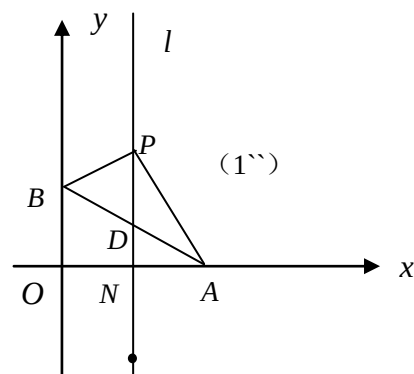
$$\therefore DN = \frac{3-\sqrt{3}}{3}，即 D 点的坐标为 (1, \frac{3-\sqrt{3}}{3})。$$

$\therefore$ 点 B 到 PD （即直线 l ）的距离为 1 ，点 A 到 PD 的距离为 $\sqrt{3}-1$ 。

$$且 线 段 PD 的 长 度 为 \left| a - \frac{3-\sqrt{3}}{3} \right|。$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle BPD} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot \left| a - \frac{3-\sqrt{3}}{3} \right| + \frac{1}{2} \times 1 \cdot \left| a - \frac{3-\sqrt{3}}{3} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \cdot \left| a - \frac{3-\sqrt{3}}{3} \right|。$$





$\therefore$ 当 $a_1 = 1 + \sqrt{3}$ 或 $a_2 = \frac{3-5\sqrt{3}}{3}$ 时, 均能使 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC}$ 。

【说明】由本题可以看出, 涉及动点构成的三角形的面积计算, 其实和固定的点构成的三角形的面积计算一样, 主要是借助“底”和“高”两个线段的计算来实现的。另外, 有时需要像(3)的解的过程那样, 将一个三角形的面积拆(或拼)成两个(或几个)更易计算的三角形面积。

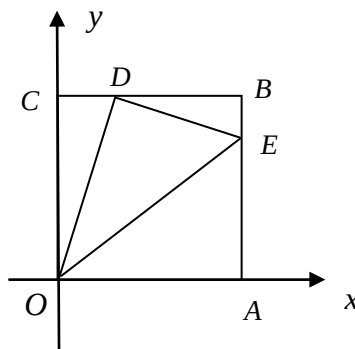
例3 如图, 边长为1的正方形 $OABC$ 的顶点 O 为坐标原点, 点 A 在 x 轴的正半轴上, 点 C 在 y 轴的正半轴上。

动点 D 在线段 BC 上移动(不与 B, C 重合), 连结 OD , 过点 D 作 $DE \perp OD$, 交边 AB 于点 E , 连结 OE 。记 CD 的长为 t 。

(1) 当 $t = \frac{1}{3}$ 时, 求直线 DE 的函数表达式。

(2) 如果记梯形 $COEB$ 的面积为 S , 那么是否存在 S 的最大值? 若存在, 请求出这个最大值及此时 t 的值; 若不存在, 请说明理由。

(3) 当 $OD^2 + DE^2$ 的算术平方根取最小值时, 求点 E 的坐标。



【观察与思考】对于(1), 只需求出 D 点的和 E 点的坐标, 这可以

通过解 $Rt\triangle ODC$ 和 $Rt\triangle DEB$ 来实现。

对于(2), 首先要求出 S 关于 t 的函数关系式, 然后再由函数的性质和取值范围看是否有最大值, 而面积计算又归结为有关线段的计算。

对于(3), $OD^2 + DE^2$ 最小, 实际上是 OE 的长最小, 而 OE 又是 $Rt\triangle OEA$ 的斜边, 且在这个三角形中, 一直角边 OA 为定值, 因此, 斜边 OE 最小, 就会使另一直角边 AE 最小, 进而使 $S_{\triangle OEA}$ (面积) 最小, 也即梯形 $COEB$ 面积最大, 这便和(2)的结论联系起来, 解法也就找到了。

解: (1) 易知 $\triangle CDO \sim \triangle BED$ 。

$$\therefore \frac{CD}{BE} = \frac{CO}{BD}, \text{ 即 } \frac{\frac{1}{3}}{BE} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}, \text{ 得 } BE = \frac{2}{9}, \text{ 即 } E \text{ 点的坐标为 } (1, \frac{7}{9})。$$

设直线 DE 的函数表达式为 $y = kx + b$, 直线经过两点 $D(\frac{1}{3}, 1)$ 和 $E(1, \frac{7}{9})$, 得 $k = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{10}{9}$ 。

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{9}。$$



(2) 存在 S 的最大值。∵ $\triangle COD \sim \triangle BDE$, ∴ $\frac{CD}{BE} = \frac{CO}{BD}$, 即 $\frac{t}{BE} = \frac{1}{1-t}$, $BE = t - t^2$ 。

∴ $S = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 + t - t^2) = -\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{8}$ 。故 $t = \frac{1}{2}$ 时, S 有最大值 $\frac{5}{8}$ 。

(3) 在 $Rt\triangle OED$ 中, $OD^2 + DE^2 = OE^2$, $OD^2 + DE^2$ 的算术平方根取最小值, 也就是斜边 OE 取最小值。 OE 也为 $Rt\triangle OEA$ 的斜边, 在这个三角形中, 当斜边 OE 取最小值且一直角边 OA 为定值时, 另一直角边 AE 达到最小值, 于是 $\triangle OEA$ 的面积达到最小值, 此时, 梯形 $COEB$ 的面积达到最大值。

由 (2) 知, 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 梯形 $COEB$ 的面积达到最大值, 此时 $OD^2 + DE^2$ 取最小值, 故所求 E 点的坐标是 $(1, \frac{3}{4})$ 。

【说明】1、我们反复强调, 相似三角形和解直角三角形是“几何计算”的两大法宝, 本题的 (1) 和 (2), 都恰当地借助了三角形的相似关系。

11、“转化”是数学方法的灵魂, 在本题 (3) 的解法中, 一系列的美妙转化使看似复杂的问题获得极为简炼的解法, 让人称奇。

坐标系里的图形引入动点, 与非坐标系里的图形引入动点研究的问题和解决的方法实质上是一样的, 只是动点的刻画、问题的提出 和结果表达, 大都是以“坐标”相关的形式出发并落实的。因此可以这样说: 坐标系里图形引入动点, 就是在非坐标系里图形引入动点的基础上再融合“坐标法”的表示。

三、坐标系里的图形变换

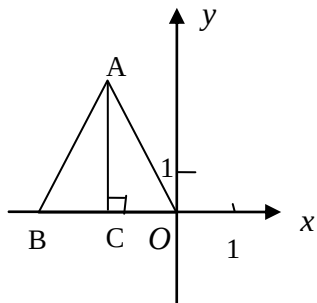
例 1 如图 (1), 在平面直角坐标系中, 两个全等的直角三角形的直角顶点及一条直角边重合, 点 A 在第二象限内, 点 B , 点 C 在 x 的负半轴上, $\angle CAO = 30^\circ$, $OA = 4$ 。

(1) 求 C 点的坐标;

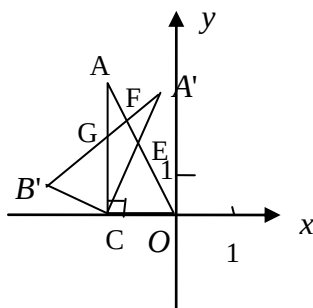
(2) 如图 (2), 将 $\triangle ACB$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 30° 到 $\triangle A'CB'$ 的位置, 其中 $A'C$ 交直线 OA 于点 E , $A'B'$ 分别交直线 OA , CA 于点 F, G , 则除 $\triangle A'B'C \cong \triangle AOC$ 外, 还有哪几对全等的三角形, 请直接写出答案; (不再另外添加辅助线)。

(3) 在 (2) 的基础上, 将 $\triangle A'CB'$ 绕点 C 按顺时针方向继续旋转, 当 $\triangle COE$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 时, 求直线 CE 的函数表达式。

数表达式。



(1)



(2)

【观察与思考】对于问题 (1), 只需解 $Rt\triangle AOC$ 。

对于问题 (2), 如果看出整个图形是以 CF 所在直线为轴为称, 则结论立得。

对于问题 (3), 先借助方程求出点 E 的坐标, 进而可求得 CE 的函数关系式, 但要注意“ $A'C$ 交直线 OA 于点 E ”这样的交点应有两个。



解：(1) $\because$ 在 $Rt\triangle ACO$ 中， $\angle CAO = 30^\circ$, $OA = 4$, $\therefore OC = 2$ 。

$\therefore C$ 点的坐标为 $(-2, 0)$ 。

(2) 有 $\triangle ACF \cong \triangle A'EF$; $\triangle ACE \cong \triangle A'CG$; $\triangle B'CG \cong \triangle OCE$ 。

(3) 当 AC' 与直线 OA 交于第二象限的点 E_1 时，并将 $\triangle A'CB'$ 记为 $\triangle A_1CB_1$ ，如图 (3)。

过点 E_1 作 $E_1M \perp OC$ 于点 M 。

$$\because S_{\triangle COE_1} = \frac{1}{2} CO \cdot E_1M = \frac{\sqrt{3}}{4}, \therefore E_1M = \frac{\sqrt{3}}{4}。$$

$\because$ 在 $Rt\triangle E_1OM$ 中， $\angle E_1OM = 60^\circ$,

$$\tan 60^\circ = \frac{E_1M}{OM}, \therefore OM = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}。$$

$\therefore$ 点 E_1 的坐标为 $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ 。

设直线 CE_1 的函数表达式为 $y = k_1x + b_1$ ，则 E_2

$$\begin{cases} -2k_1 + b_1 = 0, \\ -\frac{1}{4}k_1 + b_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k_1 = \frac{\sqrt{3}}{7} \\ b_1 = \frac{2\sqrt{3}}{7} \end{cases} \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{2\sqrt{3}}{7}。$$

完全相仿地， AC' 与直线 OA 交于第四象限的点 E_2 时，如图 (4)，点 E_2 的坐标为 $(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ 。

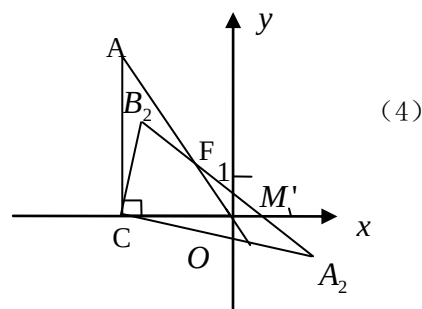
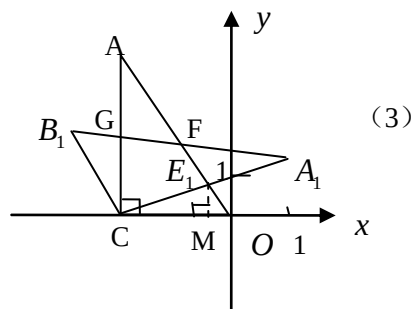
$\therefore$ 直线 CE_2 的函数表达式为： $y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{2\sqrt{3}}{9}。$

【说明】 本题中的 (3) 是坐标系里图形转换的问题，解决的关键是将“变换”的特征与相应的点的坐标恰当地结合起来。

例 2 一张矩形纸片 $OABC$ 平放在平面直角坐标系内， O 为原点，点 A 在 x 的正半轴上，点 C 在 y 轴的正半轴上，

$OA = 5, OC = 4$ 。

(1) 如图 (1)，将纸片沿 CE 对折，点 B 落在 x 轴上点 D 处，求点 D 的坐标；





(2) 在(1)中, 设 BD 与 CE 的交点为 P , 若点 P 和点 B 都在抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上, 求 b, c 的值;

(3) 若将纸片沿直线 l 对折, 点 B 落在 y 轴上的点 F 处, l 与 BF 的交点为 Q ,

若点 Q 在(2)的抛物线上, 求 l 的解析式。

【观察与思考】对于(1), 通过解 $Rt\triangle CDO$, 即可求得 D 点的坐标;

对于(2), 应先求出 P 点的坐标, 再由特定系数法求得 b 和 c 的值。

对于(3), 本题实质是由对 Q 点(它为 BF 之中点)的特殊约束——它在(2)中求出的抛物线上——逆过来求“折痕线” l 的, 因此, 除了确定出 Q 点的坐标外, 还必须确定出应在 l 上的另外一点, 当然, 它的坐标应易求出。

解: (1) $\because$ 沿 CE 折叠后, B 点重合于 D 点, $\therefore CD = CB = 5$,

在 $Rt\triangle CDO$ 中, $OD = \sqrt{CD^2 - CO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore D$ 点的坐标为 $(3, 0)$ 。

(2) 过 P 作 $PG \perp x$ 轴于 G (如图 $(1')$), 根据题知, $PG \parallel AB, PD = PB$ 。

$\therefore PG = \frac{1}{2} AB = 2, DG = \frac{1}{2} AD = 1, OG = OA - GA = 5 - 1 = 4$ 。

$\therefore P$ 点的坐标为 $(4, 2)$ 。

由点 $P(4, 2)$, $B(4, 5)$ 在抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上, 可得

$b = -7, c = 14$ 。

(3) 点 F 在 y 轴上, 作 $QN \perp y$ 轴于 N , 如图 $(1'')$ 。

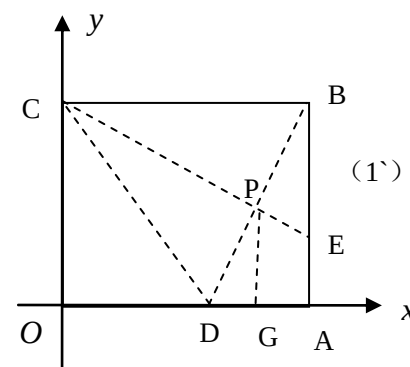
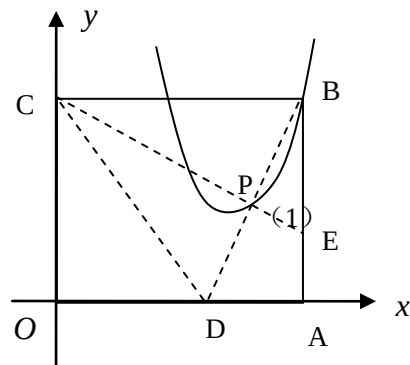
$\because QN = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2}, \therefore$ 点 Q 的坐标为 $(\frac{5}{2}, y_0)$,

$\therefore Q$ 在抛物线 $y = x^2 - 7x + 14$ 上, 即 $y_0 = (\frac{5}{2})^2 - 7 \times \frac{5}{2} + 14 = \frac{11}{4}$,

$\therefore Q$ 的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{11}{4})$, 则 $CN = NF = 4 - \frac{11}{4} = \frac{5}{4}$ 。

在 $Rt\triangle QFN$ 中, $QF^2 = NF^2 + QN^2 = (\frac{5}{4})^2 + (\frac{5}{2})^2 = \frac{125}{16}$ 。

设 l 和 y 轴的交点为 R , 则有 $Rt\triangle QFN \sim Rt\triangle RFQ$, 得 $\frac{QF}{RF} = \frac{FN}{QF}$, 即 $QF^2 = RF \cdot FN$,





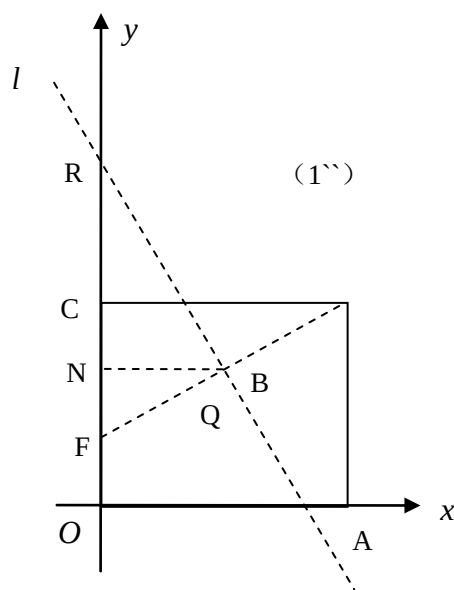
$$\therefore RF = \frac{QF^2}{FN} = \frac{\frac{125}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{25}{4},$$

$$\therefore OR = OF + FR = (4 - 2 \times \frac{5}{4}) + \frac{25}{4} = \frac{31}{4}.$$

即 R 点的坐标为 $(0, \frac{31}{4})$ 。

设 l 的解析式为 $y = bx + b$ ，由 Q 和 R 在 l 上，得

$$\begin{cases} \frac{11}{4} = \frac{5}{2}k + b \\ \frac{31}{4} = b \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -2 \\ b = \frac{31}{4} \end{cases}$$



$$\therefore l \text{ 的解析式为 } y = -2x + \frac{31}{4}.$$

由以上两例可以看出：

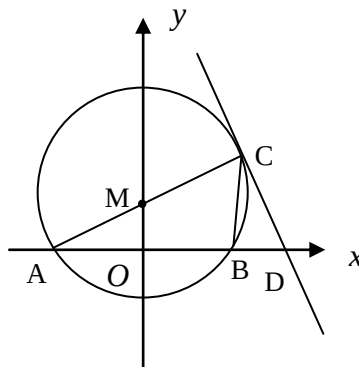
坐标系里的图形变换与非坐标系里的图形变换问题相比，相同之处是它们的解决都要紧紧围绕背景及的所作变换的性质来进行，不相同的地方突出表现在坐标系里的图形变换问题结果的体现以及解决过程，大都是通过“坐标计算”来实现的。

练习题

1、如图，在平面直角坐标系中， $\odot M$ 与 x 轴交于 A, B 两点， AC 是 $\odot M$ 的直径，过点 C 的直线交 x 轴于点 D ，

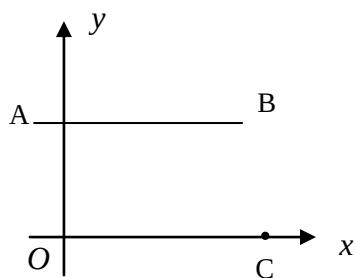
连结 BC ，已知点 M 的坐标为 $(0, \sqrt{3})$ ，直线 CD 的函数解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$ 。

- (1) 求点 D 的坐标和 BC 的长；
- (2) 求点 C 的坐标和 $\odot M$ 的半径；
- (3) CD 是 $\odot M$ 的切线吗？请说明理由。

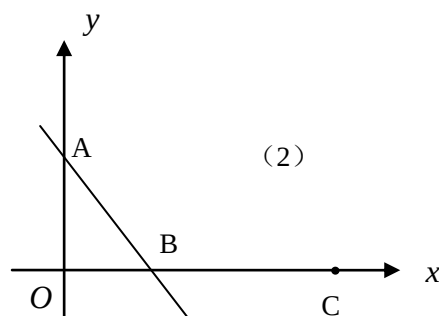


2、在平面直角坐标系中，A 点坐标为 $(0, 4)$ ，C 点坐标为 $(10, 0)$ 。

- (1) 如图 (1)，若直线 $AB \parallel OC$ ，AB 上有一动点 P，当 P 点的坐标为_____ 时，有 $PO = PC$ ；



(1)



(2)

(2) 如图(2)若直线 AB 与 OC 不平行, 在过点 A 的直线 $y = -x + 4$ 上是否存在点 P , 使 $\angle OPC = 90^\circ$, 若有这样的点 P , 求出它的坐标; 若没有, 请简要说明理由;

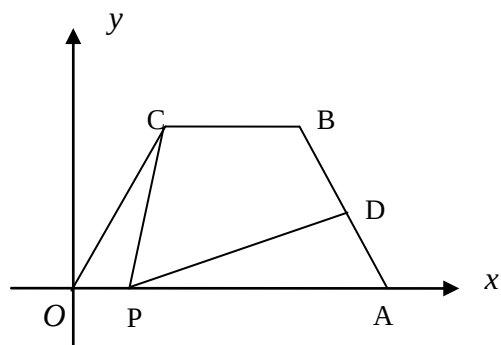
(3) 若点 P 在直线 $y = kx + 4$ 上移动时, 只存在一个点 P 使 $\angle OPC = 90^\circ$, 求出此时 $y = kx + 4$ 中的 k 的值是多少?

3、如图所示, 在平面直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 是等腰梯形, $BC \parallel OA$, $OA = 7$, $AB = 4$, $\angle COA = 60^\circ$, 点 P 为 x 轴上的一个动点, 点 P 不与点 O , 点 A 重合, 连结 CP , 过点 P 作 PD 交 AB 于点 D .

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 当点 P 运动到什么位置时, $\triangle OCP$ 为等腰三角形, 求这时点 P 的坐标;

(3) 当点 P 运动到什么位置时, 使得 $\angle CPD = \angle OAB$, 且 $\frac{BD}{AB} = \frac{5}{8}$ 时, 求这时点 P 的坐标;

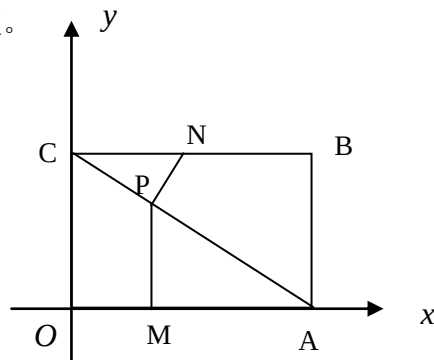


4、如图, 平面直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 为矩形, 点 A , B 的坐标分别为 $(4, 0)$, $(4, 3)$, 动点 M, N 分别从 O, B 同时出发, 以每秒 1 个单位的速度运动。其中, 点 M 沿 OA 向终点 A 运动, 点 N 沿 BC 向终点 C 运动, 过点 M 作 $MP \perp OA$, 交 AC 于 P , 连结 NP , 已知动点运动了 x 秒。

(1) P 点的坐标为 (_____, _____) (用含 x 的代数式表示);

(2) 试求 $\triangle NPC$ 面积 S 的表达式, 并求出面积 S 的最大值及相应的 x 值。

(3) 当 x 为何值时, $\triangle NPC$ 是一个等腰三角形? 简要说明理由。





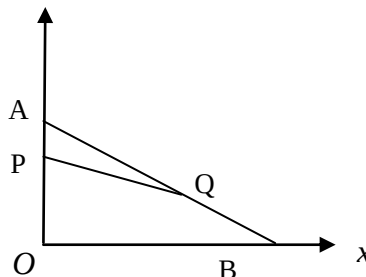
5、如图，在平面直角坐标系内，已知点 $A(0, 6)$ ，点 $B(8, 0)$ ，动点 P 从点 A 开始在线段 AO 上以每秒 1 个单位长度的速度向点 O 移动，同时动点 Q 从点 B 开始在线段 BA 上以每秒 2 个单位长度的速度向点 A 移动，设点 P, Q 移动的时间为 t 秒。

(1) 求直线 AB 的解析式；

(2) 当 t 为何值时， $\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似？并求出此时

点 P 与点 Q 的坐标；

(3) 当 t 为何值时， $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{24}{5}$ 个平方单位？

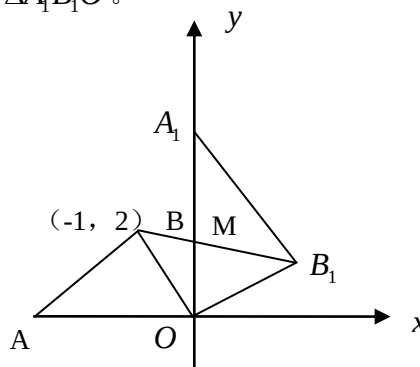


6、如图，在平面直角坐标系中，点 A 在 x 轴的负半轴上， $\triangle ABO$ 是直角三角形， $\angle ABO = 90^\circ$ ，点 B 的坐标为 $(-1, 2)$ ，将 $\triangle ABO$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1B_1O$ 。

(1) 在旋转过程中，点 B 的所经过的路径长是多少？

(2) 分别求出点 A_1, B_1 的坐标；

(3) 连结 BB_1 交 A_1O 于点 M ，求 $\frac{A_1M}{MO}$ 的值。

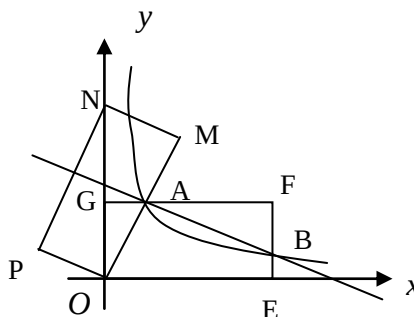


7、如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OEFG$ 的顶点 E 的坐标为 $(4, 0)$ ，顶点 G 的坐标为 $(0, 2)$ ，将矩形 $OEFG$ 绕点 O 逆时针旋转，使点 F 落在 y 轴的点 N 处，得到矩形 $OMNP$ ， OM 与 GF 交于点 A 。

(1) 判断 $\triangle OGA$ 和 $\triangle OMN$ 是否相似，并说明理由；

(2) 求过点 A 的反比例函数解析式；

(3) 设 (2) 中的反比例函数图象交 EF 于点 B ，求直线 AB 的解析式。

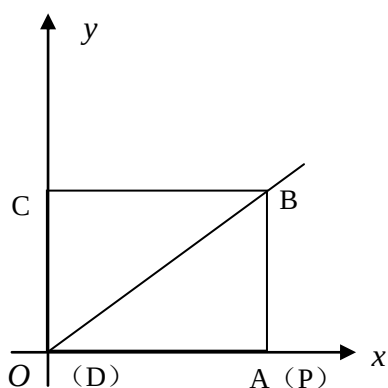


8、如图 (1)，矩形 $ABCD$ 的两条边在坐标轴上，点 D 与原点重合，对角线 BD 所在的直线的函数关系式为

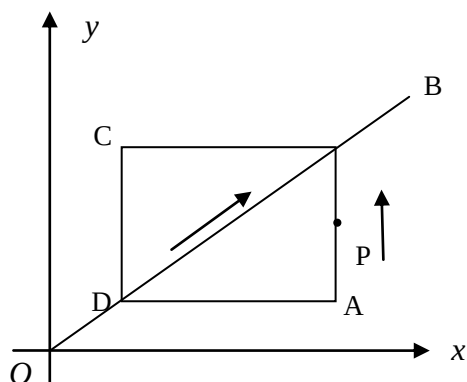


$y = \frac{3}{4}x$, $AD = 8$ 。矩形 $ABCD$ 沿 DB 方向以每秒 1 个单位长度运动，同时点 P 从点 A 出发作匀速运动，沿矩形 $ABCD$ 的边经过点 B 到达点 C ，用了 14 秒。

- (1) 求矩形 $ABCD$ 的周长；
- (2) 如图 (2)，图形运动到第 5 秒时，求点 P 的坐标。
- (3) 设矩形运动的时间为 t ，当 $0 \leq t \leq 6$ 时，点 P 经过的路线是一条线段，请求线段所在直线的函数解析式。
- (4) 当点 P 在线段 AB 或 BC 上运动时，过点 P 作 x 轴， y 轴的垂线，垂足分别为 E ， F ，则矩形 $PEOF$ 是否能与矩形 $ABCD$ 相似（或位似）？若能，求出 t 的值；若不能，说明理由。



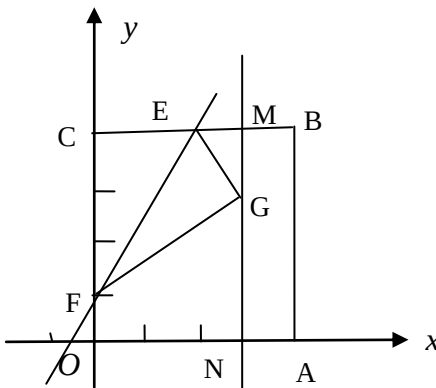
(1)



(2)

9、如图，四边形 $OABC$ 是一张放在平面直角坐标系中的正方形纸片，点 O 与坐标原点重合，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上， $OC = 4$ ，点 E 为 BC 的中点，点 N 的坐标为 $(3, 0)$ ，过点 N 且平行于 y 轴的直线 MN 与 EB 交于点 M 。现将纸片折叠，使顶点 C 落在 MN 上，并与 MN 上的点 G 重合，折痕为 EF ，点 F 为折痕与 y 轴的交点。

- (1) 求点 G 的坐标；
- (2) 求折痕 EF 所在直线的解析式；
- (3) 设点 P 为直线 EF 上的点，是否存在这样的点 P ，使得以 P ， F ， G 为顶点的三角形为等腰三角形，若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

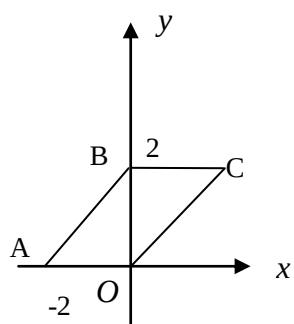




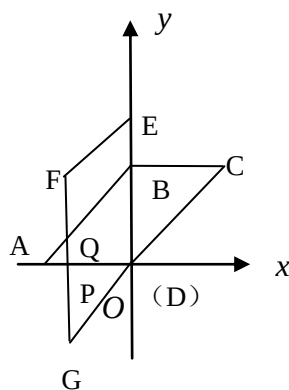
10、如图（1），在平面直角坐标系中，平行四边形 $ABCO$ 的顶点 O 在原点，点 A 的坐标为 $(-2,0)$ ，点 B 的坐标为 $(0,2)$ ，点 C 在第一象限。

（1）直接写出点 C 的坐标；

（2）将平行四边形 $ABCO$ 绕点 O 逆时针旋转，使 OC 落在 y 轴的正半轴上，如图（2），得平行四边形 $DEFG$ （点 D 与点 O 重合）。 FG 与边 AB ， x 轴分别交于点 Q ，点 P 。设此时旋转前后两个平行四边形重叠部分的面积为 S_0 ，求 S_0 的值；



(1)



(2)