

关节十五

由函数图象衍生出的问题

图象本是函数关系的一种表达方式，现以它为主背景，可以衍生出如下的两类问题：

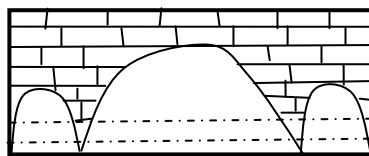
- I、由图象反过来研究对应的实际问题，这类问题解决的基本过程是：“图象→对应的函数关系→实际问题”；
II、图象和坐标系里的几何图形相结合，这类问题解决的基本方向是：将图象上点的特征和几何图形的相关计算恰当地结合起来。

一、由图象研究对应的实际问题

例1 如图(1)，三孔桥横截面的三个孔都呈抛物线形，两小孔形状、大小都相同。正常水位时，大孔水面宽度 $AB = 20$ 米，顶点 M 距水面 6 米（即 $MO = 6$ 米），小孔顶点 N 距水面 4.5 米（即 $NC = 4.5$ 米）。当水位上涨刚好淹没小孔时，借助图中的直角坐标系，求此时大孔的水面宽度 EF 。

【观察与思考】读图，并和实际背景对照，可知：

- ①应先求出大孔对应的抛物线的解析式；
- ②求出 F 点的横坐标；



解：设大孔对应的抛物线解析式为 $y = ax^2 + h$ ，

因为点 $B(10,0)$, $M(0,6)$ 在该抛物线上，即

$$\begin{cases} 0 = 100a + h \\ 6 = h \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} 6 = h \\ a = -\frac{3}{50} \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{50}x^2 + 6$$

$$\text{令 } -\frac{3}{50}x^2 + 6 = 4.5, \text{ 解得 } x_1 = 5, x_2 = -5. \therefore EF = 10 \text{ 米.}$$

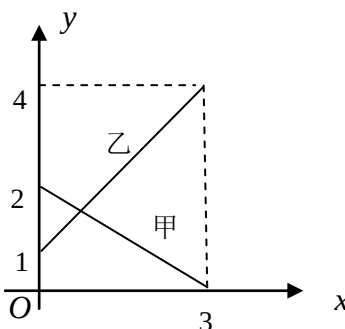
答：当水位不涨刚好淹没小孔时，大孔的水面宽为 10 米。

例2 某企业有甲、乙两个长方体形的蓄水池，将甲池中的水以每小时 6 立方米的速率注入乙水池，甲、乙两个蓄水池中的水的深度 y （米）与注水时间 x （小时）之间的函数图象如图(2)的所示，结合图象回答下列问题：

- (1) 求注水多长时间甲、乙两个蓄水池水深度相同；
- (2) 求注水多长时间甲、乙两个蓄水量相同；

【观察与思考】由两段图象可求出对应的两函数关系式，再借两函数关系式去解决(1)，(2)两个问题。

解：设 $y_{\text{甲}} = k_1x + b_1$ 。把 $(0, 2)$ 和 $(3, 0)$ 代入，解得



$$k_1 = -\frac{2}{3}, b_1 = 2 \therefore y_{\text{甲}} = -\frac{2}{3}x + 2。$$

$$\text{设 } y_{\text{乙}} = k_2x + b_2。 \text{ 把 } (0, 1) \text{ 和 } (3, 4) \text{ 代入, } \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } k_2 = 1, b_2 = 1, \therefore y_{\text{乙}} = x + 1 \text{ (1) 根据题意, 解得 } x = \frac{3}{5}。$$

所以注水 $\frac{3}{5}$ 小时, 甲, 乙两蓄水池中水的深度相同。

(2) 设甲蓄水池的底面积为 S_1 , 乙蓄水池的底面积为 S_2 , 注水 t 小时甲, 乙两个蓄水池的蓄水量相同。

先由两池水量的变化情况求出两池的底面积;

$$2S_1 = 3 \times 6, \text{ 即 } S_1 = 9。 (4-1)S_2 = 3 \times 6, \text{ 即 } S_2 = 6。$$

再根据题意, 得

$$S_1(-\frac{2}{3}t + 2) = S_2(t + 1), \text{ 即 } 9 \times (-\frac{2}{3}t + 2) = 6 \times (t + 1)。$$

解得 $t = 1$ 。 $\therefore$ 注水 1 小时甲, 乙两个蓄水池的蓄水量相同。

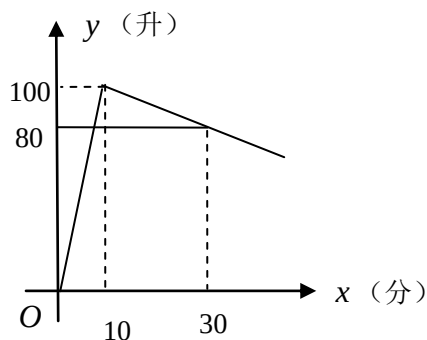
例 3 某工厂用一种自动控制加工机制作一批工件, 该机器运行过程分为加油过程和加工过程: 加工过程中, 当油箱中油量为 10 升时, 机器自动停止加工进入加油过程, 将油箱加满后继续加工, 如此往复, 已知机器需运行 185 分钟才能将这批工件加工完。图 (1) 是油箱中油量 y (升) 与机器运行时间 x (分) 之间的函数图象, 根据图象回答下列问题:

(1) 求在第一加工过程中, 油箱中油量 y (升) 与机器运行时间 x (分) 之间的函数关系式 (不必写出自变量 x 的取值范围);

(2) 机器运行多少分钟时, 第一个加工过程停止?

(3) 加工完这批工件, 机器油耗多少升?

【观察与思考】 先读图象: ①折线第一段表示: 前 10 分钟为加油过程, 匀速地由 10 升加到 100 升, ②折线第二段表示加工过程, 其间油量匀速减少, 加工 20 分钟油量由 100 升减小到 80 升。



问题 (1) 是求折线第二段对应的函数解析式, 可用待定系数法。

问题 (2) 相当于求 (1) 中的函数在函数值等于 10 时对应的 x 的值;

问题 (3) 由题意和 (2) 知, 机器运行 100 分钟后油箱中的油量为 10 升, 应再用 9 分钟将油加满, 然后再运行 $185 - (100 + 9) = 76$ (分钟), 这批工件加完毕, 即 185 分钟之内, 有 19 分钟是加油过程, 有 $185 - 19 = 166$ 分钟是加工过程, 而加工过程每分钟耗油 1 升。

解: (1) 设图象第二段对应的函数关系式为 $y = kx + b$, 由

$$\begin{cases} 100 = 10k + b \\ 80 = 30k + b \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -1 \\ b = 110 \end{cases}$$



即 $y = -x + 110$,

(2) 令 $-x + 110 = 10$, 解得 $x = 100$ 。

即机器运行 100 分钟后, 第一个加工过程停止。

(3) 第一个加工过程停止后, 由图象的折线第一段知每分钟加油 10 升, 加到 100 升需 9 分钟, 机器运行 185 分钟内有 19 分钟加油, 有 $185 - 19 = 166$ 分钟是加工过程, 而加工每 1 分钟耗油 1 升, 可知, 加工完毕这批零件, 耗油 166 升。

由以上几例可以看出, 解这类图象和实际背景相结合的题目思考要点有三:

第一, 图象和实际背景意义的结合与统一;

第二, 图象和对应的解析式的结合与统一;

第三, 要解决的实际问题是如何反映在图象和解析式上的。

二、函数图象和几何图形相结合的问题

例 1 如图所示, 直线 $y = -2x + 8$ 与坐标轴分别交于点 P 和点 Q, 在直线 PQ 上有一个点 A (不与 P, Q 重合)。

过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B, 作 $AC \perp y$ 轴于点 C。设点 A 的横坐标为 t , 矩形 ABOC 的面积为 S 。

(1) 求 S 关于 t 的函数关系式;

(2) 点 A 在线段 PQ 的什么位置时, 矩形 ABOC 的面积有最大值? 并求出最大值。

【观察与思考】 把“点 A 在线段 PQ 上”, 用代数方法 (即数量关系) 表示出来, 进而建立 S 关于 t 的函数关系式。

解: (1) P, Q 分别为直线 $y = -2x + 8$ 与 x 轴、 y 轴的交点。

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4, 0)$, 点 Q 的坐标为 $(0, 8)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(t, -2t + 8)$, 且 $0 < t < 4$,

(注: “这是点 A 在线段 PQ 上, 且不与 P, Q 重合”的代数方法的表示)

$\therefore S = OB \cdot AB = t \cdot (-2t + 8)$,

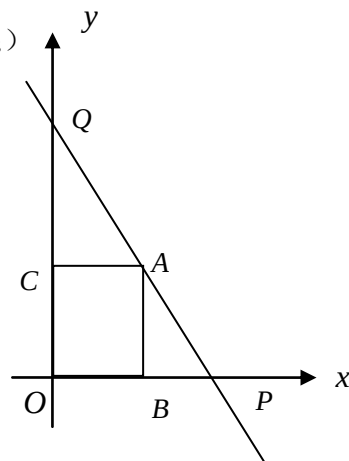
$$S = -2t^2 + 8t, \quad 0 < t < 4.$$

(2) $S = -2(t - 2)^2 + 8$,

$\therefore t = 2$ 时, S 有最大值 8。 $t = 2$ 时, 点 A 的坐标为 $(2, 4)$, 恰为 PQ 的中点。

$\therefore$ 当点 A 为线段 PQ 的中点时, 矩形 ABOC 的面积最大, 最大值为 8。

【说明】 在解答本题的过程中, 相关结论的“代数表示法”和“几何表示法”的相互转换, 起着极为重要的作用。





例2 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与 y 轴的交于点 A_1 , 以 A_1 为边向右作正方形 $OA_1B_1C_1$, 延长 C_1B_1 交直线于点 A_2 , 以 C_1A_2 为边继续作正方形 $C_1A_2B_2C_2$, ... 重复以上过程, 得到点列 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$

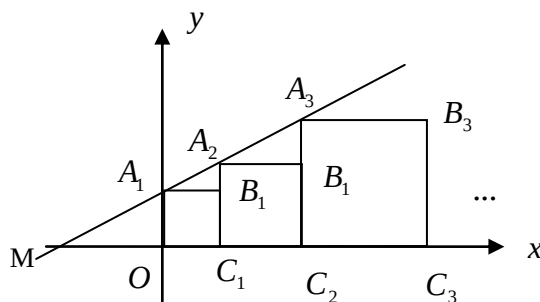
(1) 求出点 A_2, A_3 的坐标;

(2) 写出 A_n 的坐标。

【观察与思考】关键是找到 A_2 的坐标和 A_1 坐标的关系,

A_3 的坐标与 A_2 坐标的关系.....从中获得规律, 而这就要充分

利用 A_1, A_2, A_3 在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上和正方形四边相等这些条件。



解: (1) A_1 坐标为 $(0, 1)$, 而 $OC_1 = OA_1 = 1$, $C_1A_2 = C_1B_1 + B_1A_2$,

$$\because Rt\triangle A_1A_2B_1 \sim Rt\triangle MA_1O, \therefore \frac{A_2B_1}{A_1B_1} = \frac{A_1O}{MO} = \frac{1}{2}, \therefore C_1B_1 + \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{3}{2}OA_1.$$

$$\therefore A_2 \text{ 的坐标为 } (1, \frac{3}{2}).$$

从上可知: $\frac{A_2C_2}{A_1O} = \frac{3}{2}$, 类似地有: $\frac{A_3C_2}{A_2C_1} = \frac{3}{2}$, 即 $A_3C_2 = \frac{3}{2} \cdot A_2C_1 = (\frac{3}{2})^2$,

在 $Rt\triangle MA_3C_2$ 中, $MC_2 = 2 \cdot A_3C_2 = 2 \cdot (\frac{3}{2})^2$,

$$\therefore OC_2 = MC_2 - MO = 2 \cdot (\frac{3}{2})^2 - 2. \therefore A_3 \text{ 的坐标为 } (2 \cdot (\frac{3}{2})^2 - 2, (\frac{3}{2})^2).$$

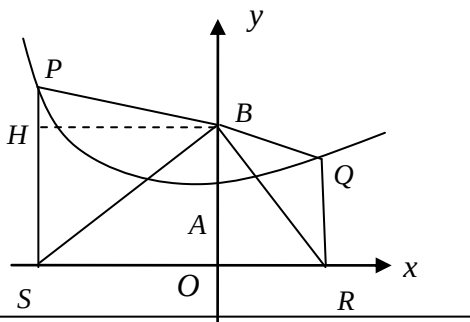
$$(2) \text{ 归纳可知: } A_n \text{ 的坐标为 } (2 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1} - 2, (\frac{3}{2})^{n-1}).$$

例3 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 与 y 轴交于点 A , y 轴上的点 B 的坐标为 $(0, 2)$ 。过点 B 的一条直线与抛物线交于点 P 和点 Q , 过 P 和 Q 分别作 x 轴的垂线, 垂足为 S, R 。

(1) 求证: $PB = PS$, $QB = QR$;

(2) 判断 $\triangle SBR$ 的形状。

【观察与思考】对于 (1), 应特别注意点 P, Q 在抛物线上的表示方法, 并用恰当的方法求出 PB, PS 的长。





对于(2)，应借助(1)的结果和图形的特殊。

解：(1) 设点P的坐标为 $(m, \frac{1}{4}m^2 + 1)$ ，则 $PS = \frac{1}{4}m^2 + 1$ 。

作 $BH \perp PS$ 于点H，则

$$BH = OS = -m, PH = PS - HS = PS - BO = (\frac{1}{4}m^2 + 1) - 2 = \frac{1}{4}m^2 - 1。$$

$$\therefore PB^2 = PH^2 + BH^2 = (\frac{1}{4}m^2 - 1)^2 + m^2 = \frac{1}{16}m^4 + \frac{1}{2}m^2 + 1 = (\frac{1}{4}m^2 + 1)^2 = PS^2$$

$\therefore PB = PS$ 。同理可得 $QB = QR$ 。

$$(2) \because PB = PS, QB = QR, \therefore \angle PBS = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle P), \angle QBR = \frac{1}{2}180^\circ - \angle Q。$$

$$\therefore \angle PBS + \angle QBR = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle P + \angle Q)。$$

$$\because \angle P + \angle Q = 180^\circ, \therefore \angle PBS + \angle QBR = 90^\circ, \therefore \angle SBR = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle SBR$ 是直角三角形。

例4 如图，在直角坐标平面内，函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0, m \text{是常数})$ 的图象经过 $A(1, 4), B(a, b)$ ，其中 $a > 1$ 。过

点A作x轴垂线，垂足为C，过点B作y轴垂线，垂足为D，连结 AD, DC, CB 。

- (1) 若 $\triangle ABD$ 的面积为4，求出点B的坐标；
- (2) 求证： $DC \parallel AB$ ；
- (3) 当 $AD = BC$ 时，求直线AB的函数解析式。

【观察与思考】由点 $A(1, 4)$ 在双曲线上，故可求得双曲线的解析式。

对于(1)，B点的坐标为 $(a, \frac{m}{a})$ ，用 $\triangle ABD$ 的面积去构造关于a的方程求解。

对于(2)，设 AC, BD 相交于点E，可通过去证 $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$ 来推得 $DC \parallel AB$ ；

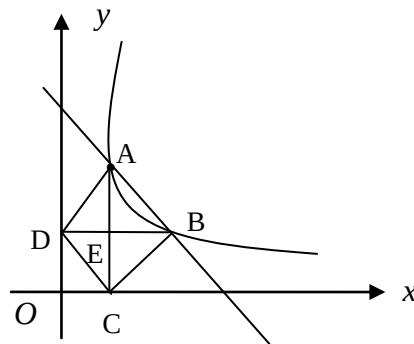
对于(3)，实际上由 $AD = BC$ 去构造关于B点坐标的方程，求得了B点的坐标。AB的解析式就易得。

解：(1) $\because$ 函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0, m \text{是常数})$ ，图象经过 $A(1, 4)$ ， $\therefore m = 4$ 。据题意，可得B点的坐标为 $(a, \frac{4}{a})$ ，

D点的坐标为 $(0, \frac{4}{a})$ ，设 BD, AC 交于点E，E点的坐标为 $(1, \frac{4}{a})$ ，

$$\because a > 1, DB = a, AE = 4 - \frac{4}{a}。$$

$$\triangle ABD \text{的面积为} 4, \text{即} \frac{1}{2}a(4 - \frac{4}{a}) = 4, \text{解得} a = 3, \therefore \text{点B的坐标为}(3, \frac{4}{3})。$$





(2) 证明: 据题意, 点 C 的坐标为 (1, 0), $DE = 1$,

$$\because a > 1, \text{ 易得 } EC = \frac{4}{a}, BE = a - 1, \therefore \frac{BE}{DE} = \frac{a-1}{1} = a-1, \frac{AE}{CE} = \frac{4 - \frac{4}{a}}{\frac{4}{a}} = a-1.$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}, \therefore \triangle AEB \sim \triangle CED, \therefore \angle BAE = \angle DCE, \therefore DC \parallel AB.$$

(3) 解: $\because DC \parallel AB$, $\therefore$ 当 $AD = BC$ 时, 有两种情况:

① 当 $AD \parallel BC$ 时, 四边形 $ADCB$ 是平行四边形。

由 (2) 得, $\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE} = a-1$, $\therefore a-1=1$, 得 $a=2$ 。 $\therefore$ 点 B 的坐标为 (2, 2)。

设直线 AB 的函数解析式为 $y = kx + b$, 把点 A, B 的坐标代入, 得

$$\begin{cases} 4 = k + b \\ 2 = 2k + b \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases} \quad \therefore \text{直线 AB 的函数解析式是 } y = -2x + 6.$$

② 当 AD 与 BC 所在直线不平行时, 四边形 $ADCB$ 是等腰梯形,

则 $BD = AC$, $\therefore a = 4$, $\therefore$ 点 B 的坐标为 (4, 1)。

设直线 AB 的函数解析式为 $y = kx + b$, 把点 A, B 的坐标代入, 得

$$\begin{cases} 4 = k + b \\ 1 = 4k + b \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的函数解析式是 $y = -x + 5$ 。

综上所述, 所求直线 AB 的函数解析式是 $y = -2x + 6$ 或 $y = -x + 5$ 。

【说明】 在本题的解法中, 充分体现了恰当运用双曲线的性质, 点 B 在该双曲线上的表示方法, 以及相关几何图形的性质和有关数量。

例 5 如图 (1), 已知平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(m, 6)$, $B(n, 1)$ 为两动点, 其中 $0 < m < 3$, 连结 OA, OB , $OA \perp OB$ 。

(1) 求证: $mn = -6$;



- (2) 当 $S_{\triangle AOB} = 10$ 时, 抛物线经过 A, B 两点且以 y 轴为对称轴, 求抛物线对应的二次函数的关系式;
- (3) 在 (2) 的条件下, 设直线 AB 交 y 轴于点 F, 过点 F 作直线 l 交抛物线于 P, Q 两点, 问是否存在直线 l, 使 $S_{\triangle POF} : S_{\triangle QOF} = 1:3$? 若存在, 求出直线 l 对应的函数关系式; 若不存在, 请说明理由。

【观察与思考】 对于 (1), 应从 $OA \perp OB$ 出发, 去构造分别以 OA, OB

为边的相似三角形;

对于 (2), 由 $S_{\triangle AOB} = 10$ 这一附加条件求出 m, n 的值, 易得所求抛物线的解析式;

对于 (3), 由 $S_{\triangle POF} : S_{\triangle QOF} = 1:3$ 去构造 P 点坐标的方程。

解: (1) 作 $BC \perp x$ 轴于 C 点, $AD \perp x$ 于 D 点, 如图 (1')

$\therefore A, B$ 点坐标分别为 $(m, 6), (n, 1)$,

$\therefore BC = 1, OC = -n, AD = 6$,

又 $OA \perp OB$, $\therefore \triangle CBO \sim \triangle DOA$,

$$\therefore \frac{CB}{DO} = \frac{CO}{DA} = \frac{BO}{OA}, \therefore \frac{1}{m} = \frac{-n}{6}, \therefore mn = -6$$

(2) 由 (1) 得, $OA = mBO$, 又 $S_{\triangle AOB} = 10$,

$$\therefore \frac{1}{2} OB \cdot OA = 10.$$

即 $OB \cdot OA = 20, \therefore mBO^2 = 20$,

$$\text{又 } OB^2 = BC^2 + OC^2 = m^2 + 1, \therefore m(n^2 + 1) = 20,$$

$$\therefore mn = -6, \therefore m = 2, n = -3,$$

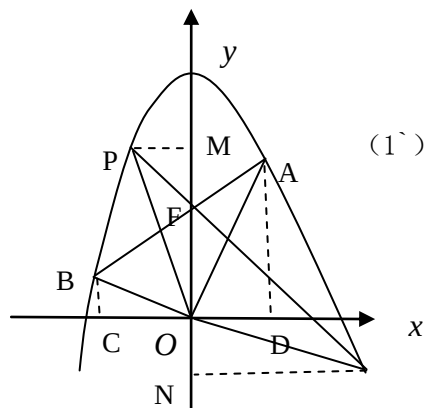
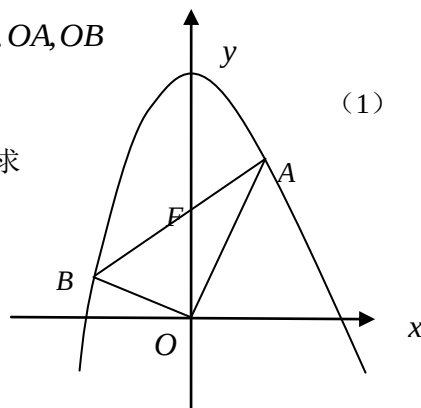
$\therefore A$ 点坐标为 $(2, 6)$, B 点的坐标为 $(-3, 1)$, 易得抛物线解析式为 $y = -x^2 + 10$ 。

(3) 直线 AB 为 $y = x + 4$, 且与 y 轴交于 F $(0, 4)$ 点,

$$\therefore OF = 4.$$

假设存在直线 l 交抛物线于 P, Q 两点, 且使 $S_{\triangle POF} : S_{\triangle QOF} = 1:3$, 如图 (1'') 的所示,

则有 $PF : FQ = 1:3$, 作 $PM \perp y$ 轴于点 M, $QN \perp y$ 轴于点 N,





$\because P$ 在抛物线 $y = -x^2 + 10$ 上, $\therefore$ 设 P 坐标为 $(t, -t^2 + 10)$,

则 $FM = -x^2 + 10 - 4 = -x^2 + 6$,

$\because \triangle PMF \sim \triangle QNF$, $\therefore \frac{PM}{QN} = \frac{MF}{FN} = \frac{PF}{QF} = \frac{1}{3}$,

$\therefore QN = 3PM = -3t$, $NF = 3MF = -3t^2 + 18$, $\therefore ON = -3t^2 + 14$,

$\therefore Q$ 点坐标为 $(-3t, 3t^2 - 14)$,

$\because Q$ 点在抛物线 $y = -x^2 + 10$ 上, $\therefore 3t^2 - 14 = -9t^2 + 10$, 解得 $t = -\sqrt{2}$,

$\therefore P$ 坐标为 $(-\sqrt{2}, 8)$, Q 坐标为 $(3\sqrt{2}, 8)$,

$\therefore$ 易得直线 PQ 为 $y = -2\sqrt{2}x + 4$ 。

根据抛物线的对称性可得 PQ 另解为 $y = 2\sqrt{2}x + 4$ 。

【说明】 I、在本题 (3) 中, 用 $(t, -t^2 + 10)$ 表示 P 点在抛物线 $y = -x^2 + 10$ 上, 而当推得 Q 点的坐标为 $(-3t, 3t^2 - 14)$, 则由 Q 点在该抛物线上, 得 $3t^2 - 14 = -(-3t)^2 + 10$, 就体现着函数图象“形数结合”的本质含义, 准确地运用这一点, 是这类题目获解的关键。

II、由本题的解可以看出, 方程的作用何其大、何其广。问题 (1) (2), (3) 的解, 不都是借助于方程吗?

III、在本题中, 特别是 (1) 和 (3), 方程的构造都是通过直角三角形和三角形的相似, 因此, 这两项几何计算的法宝堪称几何向代数转化的中介与桥梁。