



关节十六

应用性问题（含“方案”确定）解法研究

1、应用性问题思考与解答的过程，最主要的特点就是：①由现实情意（非数学），抽象概括出数学问题，②进而解决数学问题，使原问题获解。其中的“由非数学到数学”是最为关键的一步。

2、“由非数学到数学”，就是将实际问题归属到对应的数学模型，是化归思想的典型表现，绝大多数情况下，或化归到函数模型，或化归到方程（不等式）模型，或化归到基本图形（特别是直角三角形）模型，或者以上的综合，因此，可以这样说：解应用性问题的能力实质就是“化归到数学模型”的能力。

一、化归到方程（不等式）模型或函数模型

凡涉及到数量关系的实际问题，绝大多数都要化归为方程或函数来解决。

1、关键是要有深刻的“方程思想”和“函数思想”

例 1 某高速公路收费站，有 $m(m > 0)$ 辆汽车等候收费通过，假设通过收费站的车流量（每分钟通过的汽车量数）保持不变，每个收费窗口的收费速度也是不变的。若开放一个收费窗口，则需要 20 分钟才能将原来排队等候汽车及后来接上来的汽车全部收费通过；若同时开放两个收费窗口，则需 8 分钟也可将原来排队等候的汽车已及后来接上来的汽车全部收费通过，若要求三分钟内将排队等候收费的汽车全部通过，并使后来到站的汽车也随到随时收费通过，请问：至少同时开放几个收费窗口？

【观察与思考】第一，关键是要求出每分钟新来的汽车为多少辆，以及每个窗口每分钟可收费通过多少辆汽车，就是要求这些“未知数量的值”，当然考虑去构造方程。

第二，题目中开放一个收费窗口和开放两个收费窗口情况的斜述就是两个构造方程可依据的等量关系。

解：设每分钟新来的汽车 x 辆，每个窗口每分钟收费通过 y 辆汽车，则

$$\begin{cases} 20x + m = 20y \\ 8x + m = 16y \end{cases} \quad \text{解和} \quad \begin{cases} x = \frac{m}{40} \\ y = \frac{3m}{40} \end{cases}$$

设需开放 z 个窗口，使在 3 分钟内将排队等候收费的汽车全部通过，并使后来到站的汽车也随到随时收费通过，则

$$z \cdot \frac{3m}{40} \times 3 = \frac{m}{40} \times 3 + m, \quad \text{解得 } z = \frac{43}{9}.$$

因为窗口个数为正整数，所以需开窗口 5 个。

用方程解决实际问题，从思考与实施来看，分为这样的三个衔接的步骤：

步骤 I、从定向上确认这是一个化归到方程的模型问题，即知道是用方程；

步骤 II、根据已给出条件或隐含关系布列出相应的方程；

步骤 III、通过解方程解决原来的实际问题。



例2 小杰到学校食堂买饭，看到 A, B 两个窗口前排队的人一样多（设为 a 人， $a > 8$ ），就站到 A 窗口队伍的后面，过了 2 分钟，他发现 A 窗口每分钟有 4 人买了饭离开队伍，B 窗口每分钟有 6 人买了饭离开队伍，且 B 窗口队伍后面每分钟增加 5 人。

(1) 此时，若小杰继续在 A 窗口排队，则他到达窗口所需的时间是多少（用含 a 的代数式表示）？

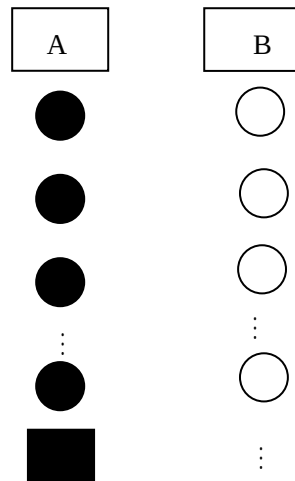
(2) 此时，若小杰迅速从 A 窗口队伍转移到 B 窗口队伍后面重新排队，且到达 B 窗口的所花的时间比继续在 A 窗口排队到达 A 窗口所花的时间少，求 a 的取值范围（不考虑其它因素）。

【观察与思考】首先认识到：小杰无论是在 A 窗口还是在 B 窗口排队，他到达窗口所需的时间都决定于已排队的人数 a ，因此，本题实际上是个“函数”问题；

其次，这两个函数都好求出，即表示成 a 的代数式；

最后，借助于两个函数（即两个代数式）的关系，求出自变量 a 的取值范围。

解：(1) $(a - 4 \times 2) \div 4 = \frac{a}{4} - 2$ ；



(2) 若此时转到 B 窗口，则到窗口时共用时间： $[(a + 5 \times 2) - 6 \times 2] \div 6 = \frac{a}{6} - \frac{1}{3}$ ；

令 $\frac{a}{6} - \frac{1}{3} < \frac{a}{4} - 2$ ，解得 $a > 20$ 。 a 的取值范围为 $a > 20$ 。

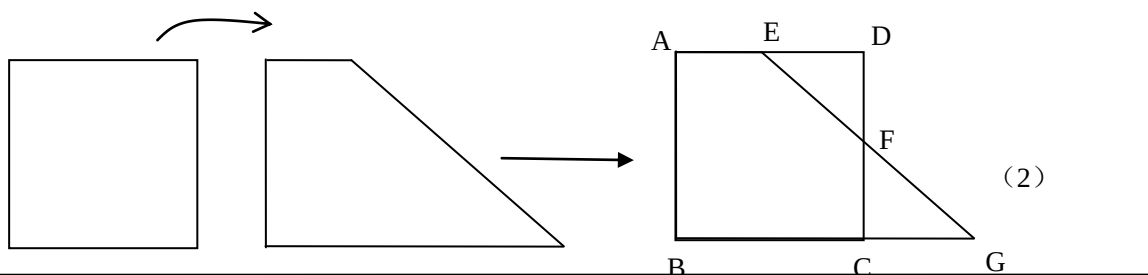
当 $a > 20$ 时，小杰到 B 窗口比在 A 窗口用的时间少。

【说明】本题中两个代数式的建立，是“函数思想”的一种体现。

例3 王师傅有两块板材边角料，其中一块是边长为 60cm 的正方形板子，另一块是上底为 30cm ，下底为 120cm 高为 60cm 的直角梯形板子（如图（1）），王师傅想将这两块板子裁成两块全等的矩形板材，他将两块板子叠放在一起，使梯形的两个直角顶点分别与正方形的两个顶点重合，两块板子的重叠部分为五边形 $ABCFE$ 所围成的区域（如图（2）），由于受材料纹理的限制，要求裁处的矩形要以点 B 为一个顶点。

(1) 利用图（2）求出矩形顶点 B 所对的顶点到 BC 边的距离 $x(\text{cm})$ 为多少时，矩形的面积 $y(\text{cm}^2)$ 最大？最大面积是多少？

(2) 若想裁出的矩形为正方形，试求出面积最大的正方形的边长。





【观察与思考】在搞清背景图形各有关数量的情况下，对于问题（1），需对三类矩形的面积做比较（如图 2'），而其中的矩形 $BPQR$ 的面积显然是 x 的函数，因此，本题的核心是建立出这个函数并求其最大值。

对于（2），从变动的矩形 $BPQR$ 中确定出正方形，自然也要借助上述函数。

解：（1）在图（2）中，易知 $Rt\triangle EFD \sim Rt\triangle GFC$ ，且 $ED = 30, GC = 60, DC = 60$ ，

$$\therefore DF = \frac{1}{3}DC = 20, FC = \frac{2}{3}DC = 40。$$

①当点 B 所对的顶点到 BC 的距离为 60 时（即该顶点在线段 AE 上），这些矩形中面积最大的就是矩形 $BMEA$ ，其面积等于 $S_{\text{矩形}BMEA} = 30 \times 60 = 1800 \text{ (cm}^2\text{)}$

②当点 B 所对的顶点到 BC 的距离等于或小于 40 时，且该顶点在 FC 上，显然，在这些矩形中，面积最大的就是矩形 $BCFN$ ，

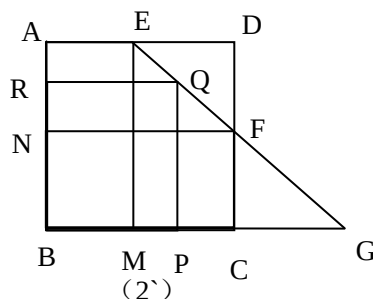
$$S_{\text{矩形}BCFN} = 40 \times 60 = 2400(\text{cm}^2)$$

③当点 B 所对的顶点 Q 在线段 EF 上时，矩形为 $BPQR$ ， $QP = x(\text{cm})$ 。

$$\therefore Rt\triangle QGP \sim Rt\triangle FGC，$$

$$\therefore \frac{PG}{QP} = \frac{GC}{FC}，\text{即 } \frac{PG}{x} = \frac{60}{40}, PG = \frac{3}{2}x(40 \leq x \leq 60), \therefore BP = 120 - \frac{3}{2}x。$$

$$\therefore S_{\text{矩形}BPQR} = x(120 - \frac{3}{2}x) = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = -\frac{3}{2}(x-40)^2 + 2400。$$



可知当 $x = 40$ 时， $S_{\text{矩形}BPQR}$ 的面积最大为 $2400(\text{cm}^2)$ 。此时的点 Q 即为点 F 。

综上所述：当 $x = 40$ 时，也即矩形为 $BCFN$ 时，面积最大为 $2400(\text{cm}^2)$ 。

（2）面积最大的正方形应当在（1）中③的矩形中，这时应有

$$x^2 = -\frac{3}{2}x^2 + 120x，\text{解得 } x_1 = 0 \text{（舍去）}, x_2 = 48(\text{cm})。$$

面积最大的正方形的边长为 48cm 。

【说明】在本题，及时地认识到并正确地建立出矩形 $BPQR$ 的面积关于 x 的函数，是获解的关键。

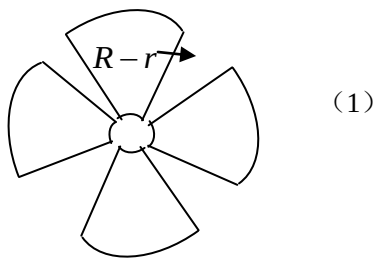
例 4 一园林设计师要使用长度为 $4L$ 的材料建造如图（1）所示的花圃。该花圃是由四个形状、大小完全一样的扇环面组成，每个扇环面如图（2）所示。它是以点 O 为圆心的两个同心圆弧和延长后通过 O 点的两条直线段围成，为使得绿化效果最佳，还须使得扇环面积最大。

（1）求使图（1）花圃面积为最大时 $R-r$ 的值及此时花圃面积，其中 R, r 分别为大圆和小圆的半径。

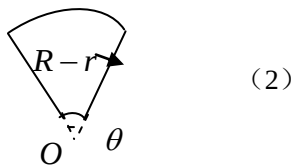
（2）若 $L = 160\text{m}, r = 10\text{m}$ ，求使图（2）面积为最大时 θ 值。



【观察与思考】在图(2)中,扇环图形的周长是确定的,所以其圆心角 θ 和扇形的面积 S 都随 $R-r$ 值的确定而确定,因此,他们都是 $R-r$ 的函数!认清楚了这一点,剩下的问题都可依几何计算和函数的性质来解决。



(1)



(2)

解: (1) 若使形如图(1)花圃面积为最大,则必定要求图(2)扇环面积最大。

设图(2)扇环的圆心角为 θ , 面积为 S , 根据题意得:

$$L = \frac{\theta\pi R}{180} + \frac{\theta\pi r}{180} + 2(R-r) = \theta \cdot \frac{\pi(R-r)}{180} + 2(R+r). \quad \therefore \theta = \frac{180[L-2(R-r)]}{\pi(R+r)}.$$

$$\therefore S = \frac{\theta\pi R^2}{360} - \frac{\theta\pi r^2}{360} = \frac{\pi}{360} \cdot \theta \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{360} \cdot \frac{180[L-2(R-r)]}{\pi(R+r)} \cdot (R^2 - r^2)$$

$$= \frac{1}{2} [L - 2(R-r)] \cdot (R-r) = -(R-r)^2 + \frac{1}{2} L(R-r)$$

$$= -\left[(R-r) - \frac{L}{4}\right]^2 + \frac{L^2}{16}.$$

$$\therefore \text{式中 } 0 < R-r < \frac{L}{2}, \therefore S \text{ 在 } R-r = \frac{L}{4} \text{ 时为最大, 最大值为 } \frac{L^2}{16}.$$

$$\therefore \text{花圃面积最大时 } R-r \text{ 的值为 } \frac{L}{4}, \text{ 最大面积为 } \frac{L^2}{16} \times 4 = \frac{L^2}{4}.$$

$$(2) \therefore \text{当 } R-r = \frac{L}{4} \text{ 时, } S \text{ 取值最大.}$$

$$\therefore R-r = \frac{L}{4} = \frac{160}{4} = 40(m), R = 40 + r = 40 + 10 = 50(m).$$

$$\therefore \theta = \frac{180[L-2(R-r)]}{\pi(R+r)} = \frac{180 \times (160 - 2 \times 40)}{\pi \times 60} = \frac{240}{\pi} \text{ (度)}.$$

【说明】在本题, 能否认识到 S 是 $R-r$ 的函数, 是解法能否启动的关键! 我们年, 用函数解决实际问题, 从思考与实施来看, 也可分为三大步骤:

步骤 I、从解法定向上认定这是一个函数问题, 即要化归到函数模型。

步骤 II、列出函数关系的表达式。

步骤 III、利用列出的函数的性质解决实际问题。

2、关于数量关系的方案问题

数量关系的方案问题, 更多的是函数与不等式的结合运用。

“方案问题”其核心是在若干种可供选择的处理方法中, 找出最优的方案来。“最优”反映在数学中, 大多就是“最大”或“最小”。



解决方案问题，根据问题的类型之特点，基本上可分为四种方法：列举法：“函数——不等式的整数解”“不等式组的整数解”；“两个函数比较”法。

(1) 列举法

所谓“列举法”，就是把可选择的方案悉数列出，然后根据要求从中确定出“最优者”，在可选择的方案数量有限、且容易全部确定的情况下，易采用这种方法。

例 5 为了提高土地的利用率，将小麦、玉米、黄豆三种农作物套种在一起，俗称“三种三收”，这样种植的方法可将土地每亩的总产量提高 40%。

右表是三种农作物的总产量、销售单位及种植成本的对应表：

现将面积为 10 亩的一块农田进行“三种三收”套种，为保证主要农作物的种植比例，要求小麦的种植面积占整个种植面积的一半。

(1) 在保证小麦种植面积不变的情况下，玉米、黄豆的种植面积均不得低于一亩，且两种农作物均以整亩数种植，三种农作物套种的种植亩数，有哪几种种植方案？

(2) 在 (1) 中的种植方案中，采用哪种套种方案，才能使总销售价最高？最高价是多少？

(3) 在 (2) 中的种植方案中，采用哪种套种方案，才能使总利润最大？最大利润是多少？

(总利润 = 总销售价 - 总成本)

【观察与思考】对于问题 (1)、(2)、(3) 均用列举法，把相应的方案列出来，然后根据要求，选定“最优者”。

解：(1) 将种植方案可以列举出来，如下：

方案	一	二	三	四
小麦亩数	5	5	5	5
玉米亩数	1	2	3	4
黄豆亩数	4	3	2	1

(2) 先列举出每种方案对应的销售总价：

方案	相应的总销售价
方案一	$2 \times 400 \times 5 + 1 \times 680 \times 1 + 2.6 \times 250 \times 4 = 7280$
方案二	$2 \times 400 \times 5 + 1 \times 680 \times 2 + 2.6 \times 250 \times 3 = 7310$
方案三	$2 \times 400 \times 5 + 1 \times 680 \times 3 + 2.6 \times 250 \times 2 = 7340$
方案四	$2 \times 400 \times 5 + 1 \times 680 \times 4 + 2.6 \times 250 \times 1 = 7370$

采用方案四，即小麦 5 亩，玉米 4 亩，黄豆 1 亩，可使总销售价最高，为 7370 元。

(3) 列举出各方案对应的总利润：



方案	相应的总利润
方案一	$7280 - (200 \times 5 + 130 \times 1 + 50 \times 4) = 5950$
方案二	$7310 - (200 \times 5 + 130 \times 2 + 50 \times 3) = 5900$
方案三	$7340 - (200 \times 5 + 130 \times 3 + 50 \times 2) = 5850$
方案四	$7370 - (200 \times 5 + 130 \times 4 + 50 \times 1) = 5800$

采用方案一，即小麦 5 亩，玉米 1 亩，黄豆 4 亩，可使总利润最高，最高利润为 5950 元。

【说明】由本题可以看出：方案的列举，以遵循某个顺序为好，如（1）中“按玉米亩数递增”为序；相应地，（2）中“总销售价”也递增；（3）中的“总利润”递减，这就这最佳方案的选择提供了更大的方便。

（2）化归为“函数——不等式的整数解”

例 6 某班到毕业时共结余经费 1800 元，班委会决定拿出不少于 270 元但不超过 300 元的资金为老师购买纪念品，其余资金用于在毕业晚会上给 50 位同学每人购买一件文化衫或一本相册作为纪念品。已知每件文化衫比每本相册贵 9 元，用 200 元恰好可以买到 2 件文化衫和 5 本相册。

（1）求每件文化衫和每本相册的价格分别为多少元？

（2）有几种购买文化衫和相册的方案？哪种方案用于购买老师纪念品的资金更充足？

【观察与思考】对于问题（1），可借构造方程组来解决；

对于问题（2），可先列出购买文化衫和相册所用的总钱数关于购买文化衫的数量的函数的关系式，再由对总钱数（函数值）的范围限制，得出相应不等式的整数解（购买文化衫的件数），从而把可行的方案找出来，再从中确定出要求的方案。

解：（1）设文化衫和相册的价格分别为 x 元和 y 元，别

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x + 5y = 200 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x = 35 \\ y = 26 \end{cases}$$

答：文化衫和相册的价格分别为 35 元和 26 元。

（2）购买文化衫 t 件，则购买相册 $(50 - t)$ 本，则共需用钱（元）为 $35t + 26(50 - t)$ ，根据题意有：

$$1500 \leq 35t + 26(50 - t) \leq 1530。解得 \frac{200}{9} \leq t \leq \frac{230}{9}。$$



$\because t$ 为正整数, $\therefore t = 23, 24, 25$, 即有三种方案。

第一种方案: 购文化衫 23 件, 相册 27 本, 此时余下资金 293 元。

第二种方案: 购文化衫 24 件, 相册 26 本, 此时余下资金 284 元。

第三种方案: 购文化衫 25 件, 相册 25 本, 此时余下资金 275 元。

所以第一种方案用于购买教师纪念品资金更充足。

【说明】对于本题的问题(2), 虽然没有明确要求写出购买文化衫和相册总钱数关于购买文化衫数量间的函数关系式, 但它却是本问题解决的核心基础, 由此可以看出, 许多“不等式问题”实际是建立在“函数”的基础上的, 问题(2)的解决方案可称为“函数——不等式的整数解”的确定方案的方法。

例 7 某公司经营甲、乙两种商品, 每件甲种商品进价 12 万元, 售价 14.5 万元; 每件乙种商品进价 8 万元, 售价 10 万元, 且它们的进价和售价始终不变, 现准备购进甲、乙两种商品共 20 件, 所用资金不低于 190 万元, 不高于 200 万元。

(1) 该公司有几种进货方案?

(2) 该公司采用哪种进货方案可获得最大利润? 最大利润是多少?

(3) 若用(2)中所求得的利润再次进货, 请直接写出获得最大利润的进货方案。

【观察与思考】对于问题(1), 可用“函数——不等式的整数解”, 来确定出方案。

对于问题(2), 可用函数的增减性来确定, 也可以用列举法来确定。

对于问题(3), 可用列举的方法。

解: (1) 设购进甲种商品 x (件), 所用资金为 y (万元), 则

$$\begin{aligned} y &= 12x + 8(20 - x) \\ &= 4x + 160. \end{aligned}$$

由 $190 \leq 4x + 160 \leq 200$, 得 $7.5 \leq x \leq 10$ 。

因为 x 是正整数, 所以 $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = 10$, 得三种进货方案:

①方案一, 购进甲种商品 8 件, 乙种商品 12 件;

②方案二, 购进甲种商品 9 件, 乙种商品 11 件;

③方案三, 购进甲种商品 10 件, 乙种商品 10 件;

(2) 方法一, 设购进甲种商品 x (件), 销售后总获利为 z (万元), 则

$$\begin{aligned} z &= (14.5 - 12)x + (10 - 8) \cdot (20 - x) \\ &= 0.5x + 40. \end{aligned}$$

因为 $0.5 > 0$, 所以函数 z 随 x 的增大而增大, 结合(1)的结果可知:

当 $x = 10$ 时, z 有最大值为 45。

方法二, 当购进甲种商品 8 件, 乙种商品 12 件, 总利润为



$$(14.5-12) \times 8 + (10-8) \times (20-8) = 44;$$

当购进甲种商品 9 件, 乙种商品 11 件时, 总利润为

$$(14.5-12) \times 9 + (10-8) \times (20-9) = 44.5$$

当购进甲种商品 10 件, 乙种商品 10 件时, 总利润为

$$(14.5-12) \times 10 + (10-8) \times (20-10) = 45;$$

可知购进甲种商品 10 件, 乙种商品 10 件, 可得最大利润 45 万元。

(3) 用不超过 45 万元, 可进货的方案和相应的利润为:

方案一: 甲种商品 3 件, 乙种商品 1 件, 可获利 $(14.5-12) \times 3 + (10-8) \times 1 = 9.5$;

方案二: 甲种商品 2 件, 乙种商品 2 件, 可获利 $(14.5-12) \times 2 + (10-8) \times 2 = 9$;

方案三: 甲种商品 1 件, 乙种商品 4 件, 可获利 $(14.5-12) \times 1 + (10-8) \times 4 = 10.5$

方案四: 乙种商品 5 件, 可获利 $(10-8) \times 5 = 10$

可知购进甲种商品 1 件, 乙种商品 4 件可获最大利润 10.5 (万元)

【说明】对于 (3), 仍可用“函数——不等式的整数解”的方法, 但在能用列举法且方案种类不多的情况, 我们宁愿采用列举法, 因为它们的特点是直观、明确。

(3) 化归为不等式组的整数解

例 8 某班级为准备元旦联欢会, 欲购买价格分别为 2 元、4 元、10 元的三种奖品, 每种奖品至少购买一件, 共买 16 件, 恰好用 50 元, 若 2 元的奖品购买 a 件。

(1) 用含 a 的代数式表示另外两种奖品的件数;

(2) 请你设计购买方案, 并说明理由。

【观察与思考】对于问题 (1), 由三种奖品共 16 件和共用 50 元这两个条件, 可构造“另外两种奖品件数”的方程组 (含 a), 解出即可;

对于问题 (2) 由“每件奖品至少购买一件”构造关于 a 的不等式组, 由不等式组的整数解确定出方案。

解: (1) 设 4 元钱的奖品买 x 件, 10 元钱的奖品买 y 件。

由题意, 得

$$\begin{cases} a+x+y=16 \\ 2a+4x+10y=50 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{55-4a}{3} \\ y=\frac{a-7}{3} \end{cases}$$



$\therefore$ 4 元钱的奖品为 $\frac{55-4a}{3}$ 件, 10 元钱的奖品为 $\frac{a-7}{3}$ 件。

$$(2) \text{ 由题意, 得 } \begin{cases} \frac{55-4a}{3} \geq 1 \\ \frac{a-7}{3} \geq 1 \\ a \geq 1 \end{cases} \quad \text{解得 } 10 \leq a \leq 13。$$

$\because a$ 为正整数, $\therefore a = 10, 11, 12, 13$ 。

当 $a = 10$ 时, $x = 5, y = 1$;

当 $a = 11$ 时, $x = \frac{11}{3}, y = \frac{4}{3}$ (不合题意, 舍去);

当 $a = 12$ 时, $x = \frac{7}{3}, y = \frac{5}{3}$ (不合题意, 舍去);

当 $a = 13$ 时, $x = 1, y = 2$ 。

$\therefore$ 购买奖品方案一: 2 元的奖品买 10 件, 4 元的奖品买 5 件, 10 元的奖品买 1 件。

方案二: 2 元的奖品买 13 件, 4 元的奖品买 1 件, 10 元的奖品买 2 件。

【说明】 在本题, 通过对 a 的三个角度的限定 (转化为三个不等式) 来确定出符合要求的方案来。

(4) 化归为两个函数的比较

例 9 甲、乙两家商场以同样的价格出售同样的电器, 但是各自推出的优惠方案不同, 甲商场规定: 凡购买超过 1000 元电器的, 超出的金额按 90% 实收; 乙商场规定: 凡购买超过 500 元电器的, 超出的金额按 95% 实收, 顾客怎样选择商场购买电器能获得最大的优惠?

【观察与思考】 容易知道, 甲、乙两个商场的“优惠额”都是购买商品所花“钱数”的函数, 那么, 建立出这两个函数, 进行比较即可解决本问题。

解: 甲商场: 设购买 x 元的电器, 优惠金额为 y_1 元, 则有

当 $0 < x \leq 1000$ 元时, $y_1 = 0$; 当 $x > 1000$ 时, $y_1 = (x - 1000)(1 - 90\%) = 0.1x - 100$ 。

乙商场: 设购买 x 元的电器, 优惠金额为 y_2 元, 则有

当 $0 < x \leq 500$ 元时, $y_2 = 0$; 当 $x > 500$ 时, $y_2 = (x - 500)(1 - 95\%) = 0.05x - 25$ 。

当 $x > 1000$ 时, 比较 y_1 和 y_2 的大小:



$$y_1 - y_2 = (0.1x - 100) - (0.05x - 25) = 0.05x - 75。$$

可知：当 $x = 1500$ 时， $y_1 = y_2$ ；当 $1000 < x < 1500$ 时， $y_1 < y_2$ ；当 $x > 1500$ 时， $y_1 > y_2$ 。

综上可知：

- i、当购买金额为不超过 500 元和恰为 1500 元时，在两商场得到优惠金额是相等的。
- ii、当购买金额大于 500 而小于 1500 元时，在乙商场得到的优惠更大；
- iii、当购买金额大于 1500 元时，在甲商场得到的优惠更大。

【说明】当两类方式各自独立（如从甲商场或乙商场购买电器）时，分别建立各自对应的函数，通过函数的比较得出哪个阶段中何种方式为优。

例 10 某果品公司急需将一批不易存放的水果从 A 市运到 B 市销售，现有甲、乙两家运输公司提供各自的服务及收费的数据如下：

公司	运输速度 (km/h)	运速收费标准 (元/ km)	包装与卸装时间 (h)	包装与卸装费用 (元)
甲公司	60	6	4	1500
乙公司	100	10	3	700

并且，这批水果在包装与卸装以及运输过程中的损耗为 300 元/ h ，如果 A，B 两地距离 $s(km)$ ，欲使果品公司支付的总费用（包装与卸装费、运输费、以及损耗费三项之和）最小，应如何选择运输公司？

【观察与思考】应先分别求出甲、乙两公司总费用关于 s 的函数，进而进行比较即可。

解：分别求出甲、乙两公司的总费用 y_1 ， y_2 和 s 之间的关系：

$$y_1 = 1500 + 6s + 300 \times \left(\frac{s}{60} + 4\right) = 11s + 2700；$$

$$y_2 = 700 + 10s + 300 \times \left(\frac{s}{100} + 3\right) = 13s + 1600。$$

比较 y_1 和 y_2 的大小： $y_1 - y_2 = -2s + 1100$ ，

当 $s = 550$ 时， $y_1 = y_2$ ；当 $s < 550$ 时， $y_1 > y_2$ ；当 $s > 550$ 时， $y_1 < y_2$ 。

由此得到结论：

- (1) 当 $s < 550$ (km) 时，应选乙公司；
- (2) 当 $s = 550$ (km) 时，可选甲、乙任一公司；
- (3) 当 $s > 550$ (km) 时，应选甲公司。

【说明】如本题这样的方案问题，“函数”的约束条件较多，切应做到“全面考虑”。

纵观上述的各类“方案”问题，不难看出：

以数量关系为核心的“方案问题”，绝大多数在本质上是函数问题，或是一个函数的取值限定，或是同一个自变量的两个（或更多个）函数取值限定，或是同一个自变量的两个函数比较，从这一视角出发，我们就能用更为统一的思想和方法认识与解决更为普遍的“方案”问题。



二、化归到“几何计算”模型

有关图形的实际应用性问题，最重要也是最常用的是化归到“几何计算”模型。“几何计算”即我们一再强调的“解直角三角形”与“相似三角形”。

1、化归到“几何计算”的应用性问题

例 1 某大型超市为方便顾客购物，准备在一至二层楼房之间安装电梯（如图（1）），楼顶与地面平行，要使身高 2 米以下的人能笔直站立于坡形电梯上，在 B 处不碰到头部，请你帮该超市设计电梯与一楼地面的夹角 α 应为多少度？

【观察与思考】将实景图抽象为几何图形，并进一步将相关数量向“可解的直角三角形”转移与集中，如图（1'），通过几何计算，使原问题获解。

解：据题意，图（1'）中有：

在 $Rt\triangle ACD$ 中（ $\angle D = 90^\circ$ ）， $CD = 4$ ，F 为 AD 边上一点，

$FE \perp AD$ 交 AC 于点 E，

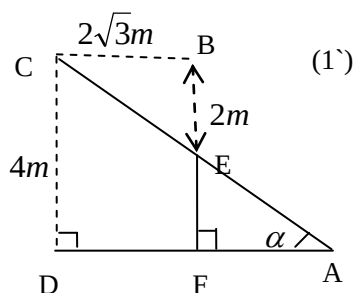
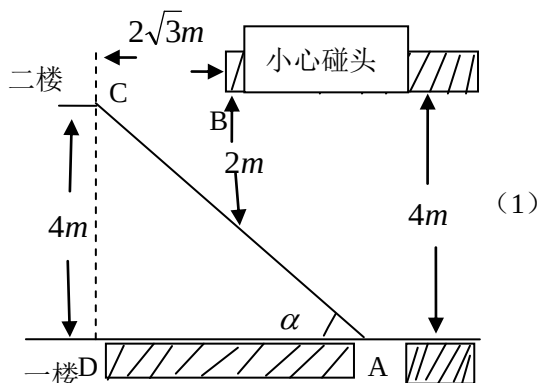
$DF = 2\sqrt{3}$ ， $EF = 2$ 。那么

$$\because \tan \alpha = \frac{EF}{AF} = \frac{CD}{AD}, \therefore \frac{2}{AF} = \frac{4}{2\sqrt{3} + AF},$$

得关于 AF 的方程 $2AF = 4\sqrt{3}$ ，解得 $AF = 2\sqrt{3}$

$$\text{在 } Rt\triangle AEF \text{ 中, } \because \tan \alpha = \frac{EF}{AF} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \alpha = 30^\circ$$

答：电梯与一楼地面的夹角 α 应为 30° 。



【说明】实际问题化归到基本图形，关键在于把有关数量恰当地集中。

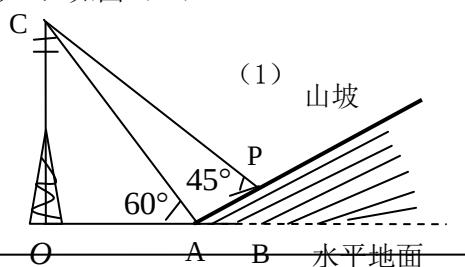
例 2 如图（1），某人在山坡坡脚 A 处测得电视塔尖点 C 的仰角为 60° ，沿山坡向上走到 P 处再测得点 C 的仰角为 45° ，已知 $OA = 100$ 米，山坡坡度为 $i = 1:2$ ，且点 O，点 A, B 在同一条直线上，求电视塔 OC 的高度以及此人所在位置点 P 的铅直高度。（测倾器的高度忽略不计，结果保留根号形式）。

【观察与思考】将问题化归到“可解的直角三角形”与“相似三角形”，如图（1'）

解：作 $PE \perp CO$ 于 E，作 $PF \perp AB$ 于 F。

在 $Rt\triangle CAO$ 中， $CO = OA \cdot \tan A$ ，即

$$CO = 100 \times \sqrt{3} = 100\sqrt{3}.$$





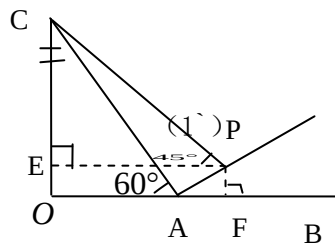
在 $Rt\triangle PAF$ 中, $AF = 2PF$ 。而在 $Rt\triangle PCE$ 中,

由 $\angle CPE = 45^\circ$, 得 $PE = CE$ 。

$\therefore CO = CE + EC = PE + PF = OF + PF = OA + AF + PF$,

$\therefore 100\sqrt{3} = 100 + 2PF + PF$, 解得 $PF = \frac{1}{3}(100\sqrt{3} - 100) = \frac{100}{3}(\sqrt{3} - 1)$ 。

$\therefore$ 电视塔 OC 的高为 $100\sqrt{3}$ 米, 点 P 的铅直高度为 $\frac{100}{3}(\sqrt{3} - 1)$ 米。



【说明】 在本题, 构造出可解的 $Rt\triangle PAF$ 和 $Rt\triangle PCE$, 再与 $Rt\triangle CAO$ 结合, 使“几何计算”得以实施。

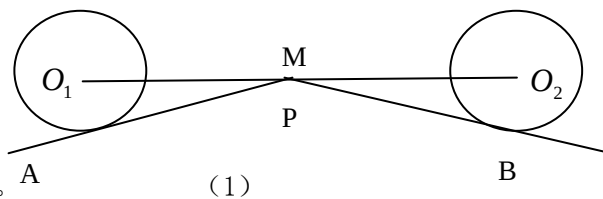
例 3 如图(1), 是一个路障的纵截面和汽车越过路障时的底盘示意图, 点 O_1, O_2 分别是车轮的轴心, M 是线段 O_1, O_2 的中点(轴心距的中点), 两车轮的半径相等。经验告诉人们, 只要中点 M 不被 P 点托住(俗称托底盘, 对汽车很有危害), 线段 O_1, O_2 上的其它点就不会被 P 点托住, 汽车就可顺利通过, 否则, 就要通过其他方式通过。

(1) 若某种汽车的车轮半径为 50 cm , 轴心距 O_1, O_2 为 400 cm 。通过计算说明, 当 $\angle APB$ 等于多少度时, 汽车恰好能通过斜坡?(精确到 0.1 , 参考数据 $\sin 14.48^\circ \approx 0.25, \cos 14.48^\circ \approx 0.97$)。

(2) 当 $\angle APB = 120^\circ$ 时, 通过计算说明要使汽车安全通过, 车轮半径与轴心距 O_1, O_2 的比应符合什么条件?

【观察与思考】 首先搞清楚, 汽车可顺利通过, 数学表示应是 $\angle APB + 2\angle O_1MA \geq 180^\circ$ 。对于问题(1), 关键

要求出 $\angle O_1MA$ 的度数, 这要归入一个恰当的直角三角形。



对于问题(2), 实际上转化为求 $\angle O_1MA$ 的三角函数值。

解: (1) 设两车轮与坡面的接触点分别为 C, D 。如图(1'), 连结 O_1C, O_2D ,

由题意知, CP, DP 分别是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的切线, $\therefore \angle O_1CM = \angle O_2DM = 90^\circ$ 。

在 $Rt\triangle O_1CM$ 中, $O_1M = \frac{1}{2}O_1O_2 = 200, O_1C = 50$,

$\therefore \sin \angle O_1MC = \frac{O_1C}{O_1M} = 0.25$, $\therefore \angle O_1MC = 14.48^\circ$ 。同理可求得 $\angle O_2MD = 14.48^\circ$ 。

$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle O_1MC - \angle O_2MD = 180^\circ - 2\angle O_1MC = 180^\circ - 2 \times 14.48^\circ \approx 151.0^\circ$ 。



∴ 当 $\angle APB = 151.0^\circ$ 时，汽车恰好能过能斜坡。

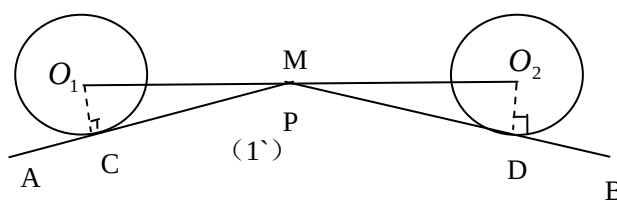
(2) 由 (1) 可知，当 $\angle APB = 120^\circ$ 时，

$$\angle O_1MC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ,$$

$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{O_1C}{O_1M} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{O_1C}{O_1O_2} = \frac{1}{4},$$

因为要使汽车安全通过，就须使 $\angle O_1MC \geq 30^\circ$ ，即须使 $\frac{O_1C}{O_1O_2} \geq \frac{1}{4}$ 。

即车轮半径与轴心距的比不小于 $\frac{1}{4}$ 。



【说明】由本题可以看出，解实际性问题重在完成两个转化：一是将原题的基本意义转化为明确的“数学表述”，如“汽车顺利通过”，“车轮半径与轴心距 O_1O_2 的比”是通过什么样的数学概念和数量来反映的；二是这些概念和数量又应在一个什么样的基本图形中被反映并计算出来，这两个方面的转化能力就是用几何模型解实际应用问题的能力。

2、关于测量方案

例 4 如图 (1)，为了测量小河的宽度，先在河岸边任意取点 A，再在河的另一岸取两点 B, C，测得 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$ ，量得 BC 的长为 20 米。

(1) 求小河的宽；

(2) 请再设计一种测量河宽的方案，画了设计草图，并作简要说明。

【观察与思考】1、对于问题 (1)，就是通过直角三角形构造关于河宽的方程；

2、对于问题 (2)，可以沿着“构造可解的直角三角形”或“借助于相似三角形”两条渠道去落实。

解：(1) 设河宽为 x，则由图 (1') 可知

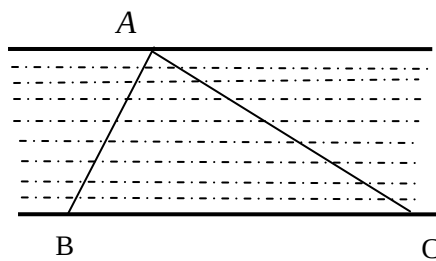
$$x + \sqrt{3}x = 20, \text{ (下略)}$$

(2) ①借助于解直角三角形的设计可有：

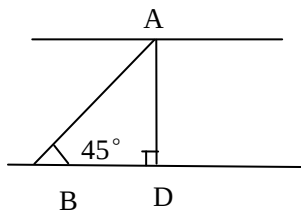
方案 I：

方案 II：

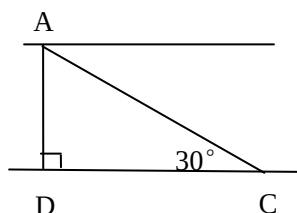
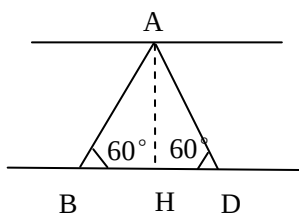
方案 III：



(1)



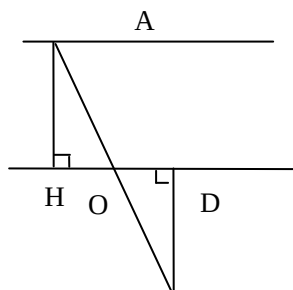
河宽 $AD=BD$



河宽 $AD = \frac{\sqrt{3}}{3} CD$

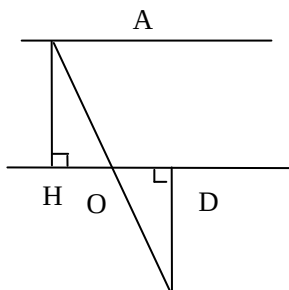
②借助于相似三角形的设计方案可有：

方案Ⅳ：



河宽 $AH = \frac{BD \cdot HO}{DO}$

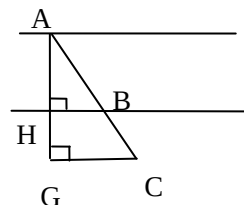
方案Ⅴ：



其中： $DO = HO$

河宽： $AH = BD$

方案Ⅵ：



河宽 $AH = \frac{HB \cdot HG}{GC - HB}$

（全等三角形是相似三角形的特殊情况）

类似的方案还可以有许多。

【说明】测量方案就是能实现几何计算的方案，因此，必以可解的直角三角形和相似三角形为基础。

练习题

1、2001 年以来，我国曾五次实施药品降价，累计降价的总金额为 269 亿元，五次药品降价的年份与相应降价金额如下表所示，表中缺失了 2003 年、2007 年相关数据，已知 2007 年药品降价金额是 2003 年药品降价金额的 6 倍，结合表中信息，求 2003 年和 2007 年的药品降价金额。

年份	2001	2003	2004	2005	2007
降价金额（亿元）	54		35	40	

2、某蔬菜基地加工厂有工人 100 人，现对 100 人进行工作分工，或采摘蔬菜，或对当日采摘的蔬菜进行精加工，



每人每天只能做一项工作。若采摘蔬菜，每人每天平均采摘 48kg ；若对采摘后蔬菜进行精加工，每人每天可加工 32kg （每天精加工的蔬菜和没来得及精加工的蔬菜全部售出）。已知每千克蔬菜直接售出可获利润 1 元，精加工后再出售，每千克可获利润 3 元，设每天安排 x 名工人进行蔬菜精加工。

- (1) 求每天蔬菜精加工后再售出所得的利润 y （元）与 x （人）的函数关系式；
- (2) 如果每天精加工的蔬菜和没来得及精加工的蔬菜全部售出的利润为 w 元，求 w 与 x 的函数关系式，并说明如何安排精加工人数才能使一天所获得利润最大？最大利润是多少？

3、工艺商场按标价销售某种工艺品时，每件可获利 45 元，按标价八五折销售该工艺品 8 件与将标价降低 35 元销售该工艺品 12 件所获利润相等。

- (1) 该工艺品每件的进价、标价分别是多少元？
- (2) 若每件工艺品按 (1) 中求得的进价进货，标价售出，工艺商场每天可售出该工艺品 100 件，若每件工艺品降价 1 元，则每天可多售出工艺品 4 件，问每件工艺品降价多少元出售，每天获得利润最大？获得的最大利润是多少元？

4、小刚为书房买灯，现有两种灯可供选购，其中一种是 9 瓦（即 0.009 千瓦）的节能灯，售价 49 元/盏。另一种 40 瓦（即 0.04 千瓦）的白炽灯，售价为 18 元/盏。假设两种灯的照明亮度一样，使用寿命都可以达到 2800 小时，已知小刚家所在的地电价是每千瓦 0.5 元。

- (1) 设照明时间 x 小时，请用含 x 的代数式表示用一盏节能灯的费用和一盏白炽灯的费用（注：费用 = 灯的售价 + 电费）
- (2) 小刚想在这两种灯中选购一盏

- ① 当照明时间是多少小时，使用两盏灯的费用一样多；
- ② 照明时间在什么范围内，选用白炽灯费用低？照明时间在什么范围内，选用节能灯费用低？



5、某校准备组织 290 名学生进行野外考察活动，行李共有 100 件，学校计划租用甲、乙两种型号的汽车共 8 辆，经了解，甲种汽车每辆最大能载 40 人和 10 件行李，乙种汽车每辆最多能载 30 人和 20 件行李。

- (1) 设租用甲种汽车 x 辆，请你帮助学校设计所有可能的租车方案；
- (2) 如果甲、乙两种汽车每辆的租车费用分别为 2000 元、1800 元，请你选择最省钱的一种租车方案。

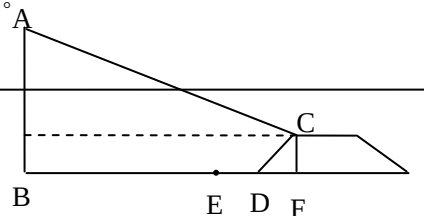
6、青青商场经销甲、乙两种商品，甲种商品每件进价 15 元，售价 20 元；乙种商品每件进价 35 元，售价 45 元。

- (1) 若该商场同时购进甲、乙两种商品共 100 件恰好用去 2700 元，求能购进甲、乙两种商品各多少件？
- (2) 该商场为使甲、乙两种商品共 100 件的总利润（利润=售价—进价）不少于 750 元，且不超过 760 元，请你帮助该商场设计相应的进货方案。
- (3) 在“五·一”黄金周期间，该商场对甲、乙两种商品进行如下优惠促销活动：

打折前一次性购物总金额	优惠措施
不超过 300 元	不优惠
超过 300 元且不超过 400 元	售价打九折
超过 400 元	售价打八折

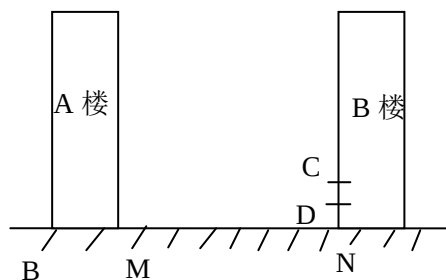
按上述优惠条件，若小王第一天只购买甲种商品一次性付款 200 元，第二天只购买乙商品打折后一次性付款 324 元，那么这两天他在该商场购买甲、乙两种商品一共多少件？（通过计算求出所有符合要求的结果）

7、某市城市规划期间，欲拆除河岸边的一根电线杆 AB （如图），已知距电线杆 AB 水平距离 14 米处是河岸，即 $BD=14$ 米，该河岸的坡面 CD 的坡面 $\angle CDF$ 的正切值为 2，岸高 CF 为 2 米，在坡顶 C 处测得顶 A 的仰角为 30° ， D, E 之间是宽 2 的人行道，请你通过计算说明在拆除电线杆 AB 时，为确保安全，是否将此人行道封上？（地面上以点 B 为圆心，以 AB 长为半径的圆形区域为危险区域）。





8、如图，某居民小区内 A、B 两楼之间的距离 $MN = 30$ 米，两楼的高都是 20 米，A 楼在 B 楼正南，B 楼窗户朝南，B 楼内一楼住户的窗台离小区地面的距离 $DN = 2$ 米，窗户高 $CD = 1.8$ 米。当正午时刻太阳光线与地面成 30° 角时，A 楼的影子是否影响 B 楼的一楼住户采光？若影响，挡住该住户窗户多高？若不影响，请说明理由。



9、如图，小山上有一棵树，现有测角仪和皮尺两种测量工具，请你设计一种测量方案，在山脚水平地面上测出小树顶端 A 到水平地面的距离 AB。

要求：

- (1) 画出测量示意图；
- (2) 写出测量步骤（测量数据用字母表示）；
- (3) 根据 (2) 中的数据计算 AB。

