



关节十七

图形的分割与剪拼

纵观近年来全国各地的中考试卷，图形操作型的问题渐多，而这些题又可分为两大类：一类是围绕“图形变换”展开的（我们已有专题论及），另一类是围绕图形的分割与剪拼展开的。我们现在要研究的，就是这后边的一类，分割与剪拼的形式与依据主要有：

I、原图形基础上进行分割，而分割的要求又分为：

- (1) 借助于“边、角”计算的分割；
- (2) 依“面积等分”为要求的分割；

II、将原图形等面积地变化成新图形的“剪与拼”。

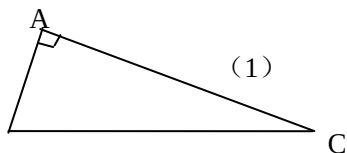
一、图形的分割

1、借助于“边、角”计算的分割

例1 (1) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 67.5^\circ$ ，请画一条直线，把这个三角形分割成两个等腰三角形。

(2) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 是其最小的内角，过顶点 B 的一条直线把这个三角形分割成了两个等腰三角形，请探求 $\angle ABC$ 与 $\angle C$ 之间的关系。

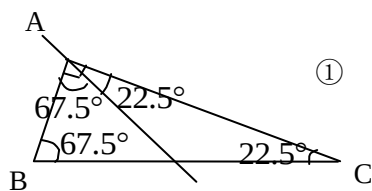
【观察与思考】对于 (1) 只需“构造等角”；对于 (2)，可从“等边”推演角之间的关系。



解：(1) 如图①，图②，有两种不同的分割法。

(2) 设 $\angle ABC = y$ ， $\angle C = x$ ，过顶点 B 的直线

交边 AC 于 D。在等腰三角形 DBC 中，



①若 $\angle C$ 是顶角，如图③，则 $\angle ADB > 90^\circ$ ，

$$\angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2}(180^\circ - x) = 90^\circ - \frac{1}{2}x,$$

$$\angle A = 180^\circ - x - y.$$

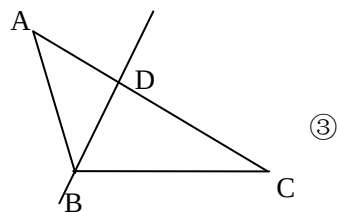
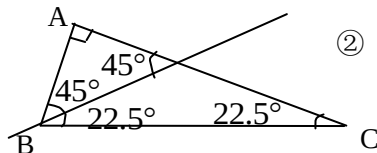
此时只能有 $\angle A = \angle ABD$ ，即 $180^\circ - x - y = y - (90^\circ - \frac{1}{2}x)$ ，

$\therefore 3x + 4y = 540^\circ$ ，即 $\angle ABC$ 与 $\angle C$ 的关系是：

$$\angle ABC = 135^\circ - \frac{3}{4}\angle C.$$

②若 $\angle C$ 是底角，则有两种情况。

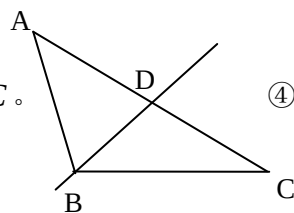
第一种情况：如图④，当 $DB = DC$ 时，则 $\angle DBC = x$ ，



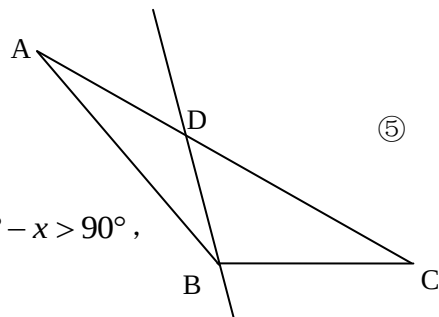
$\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 2x, \angle ABD = y - x$ 。

I、由 $AB = AD$, 得 $2x = y - x$, 此时有 $y = 3x$, 即有关系 $\angle ABC = 3\angle C$ 。

II、由 $AB = BD$, 得 $180^\circ - x - y = 2x$, 此时 $3x + y = 180^\circ$,
即 $\angle ABC = 180^\circ - 3\angle C$ 。



III、由 $AD = BD$, 得 $180^\circ - x - y = y - x$, 此时 $y = 90^\circ$,
即 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle C$ 为小于 45° 的任意锐角。



第二种情况, 如图⑤, 当 $BD = BC$ 时, $\angle BDC = x, \angle ADB = 180^\circ - x > 90^\circ$,

此时只能有 $AD = BD$,

从而 $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle C < \angle C$, 这与题设 $\angle C$ 是最小角矛盾。

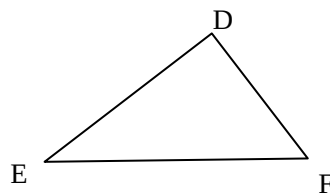
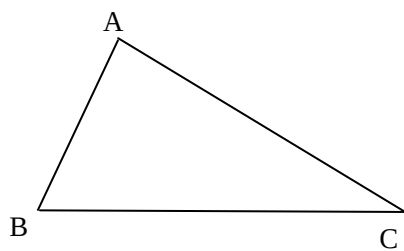
$\therefore$ 当 $\angle C$ 是底角时, $BD = BC$ 不成立。

【说明】 本题是通过特定的分割推导角之间的特殊关系。

例 2 如图 (1), 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = DE = 3, AC = 2DF = 4$ 。

(1) 判断这两个三角形是否相似? 并说明为什么?

(2) 能否分别过 A, D 在这两个三角形中各作一条辅助线, 使 $\triangle ABC$ 分割成的两个三角形与 $\triangle DEF$ 分割成的两个三角形分别对应相似? 证明你的结论。



(1)

【观察与思考】 对于 (1), 只需算出 $\frac{AB}{DE} \neq \frac{AC}{DF}$ 即可。

对于 (2), 可沿着“若有两个角对应相等, 则两三角形相似”去作适当的辅助线。

解: (1) 不相似。 $\because$ 在 $Rt\triangle BAC$ 中 $\angle A = 90^\circ, AB = 3, AC = 4$;

在 $Rt\triangle EDF$ 中, $\angle D = 90^\circ, DE = 3, DF = 2$,

$\frac{AB}{DE} = 1, \frac{AC}{DF} = 2$ 。 $\therefore \frac{AB}{DE} \neq \frac{AC}{DF}$, $\therefore Rt\triangle BAC$ 与 $Rt\triangle EDF$ 不相似。



(2) 能分割成两个分别相似的三角形，作如图(1')所示的辅助线进行分割。

具体操作：作 $\angle BAM = \angle E$ ，交 BC 于 M ；作 $\angle NDE = \angle B$ ，交 EF 于 N 。

由作法和已知条件可知 $\triangle BAM \cong \triangle DEN$ 。

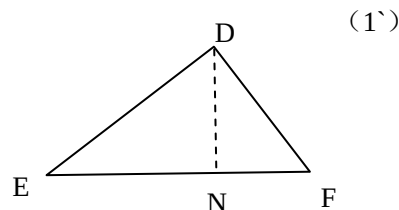
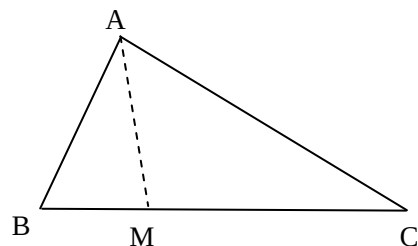
$$\because \angle BAM = \angle E, \angle NDE = \angle B, \angle AMC = \angle BAM + \angle B,$$

$$\angle FND = \angle E + \angle NDE,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle FND.$$

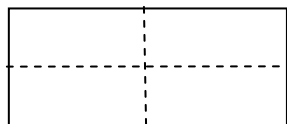
$$\because \angle FDN = 90^\circ - \angle NDE, \angle C = 90^\circ - \angle B, \therefore \angle FDN = \angle C.$$

$$\therefore \triangle AMC \sim \triangle FND.$$

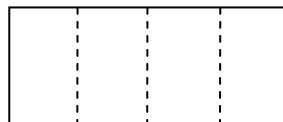


【说明】 本题是从构造等角出发构造相似三角形，这一方法被普遍采用。

例 3 现有一张长和宽之比为 2:1 的长方形纸片，将它折两次（第一次折后也可打开铺平再折第二次），使得折痕将纸片分为面积相等且不重叠的四个部分（称为一个操作）。如图甲（虚线表示折痕）。除图甲外，请你再给出三个不同的操作（规定：一个操作得到的四个图形，和另一个操作得到的四个图形，如果能够“配对”得到四组全等的图形，那么就认为是相同的操作。如图乙和图甲是相同的操作）。

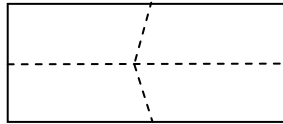
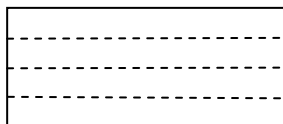
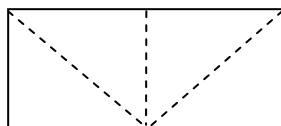
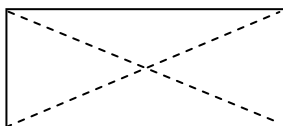
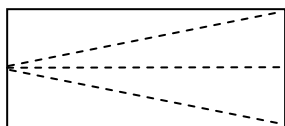


(甲)



(乙)

解：答案列举如下：

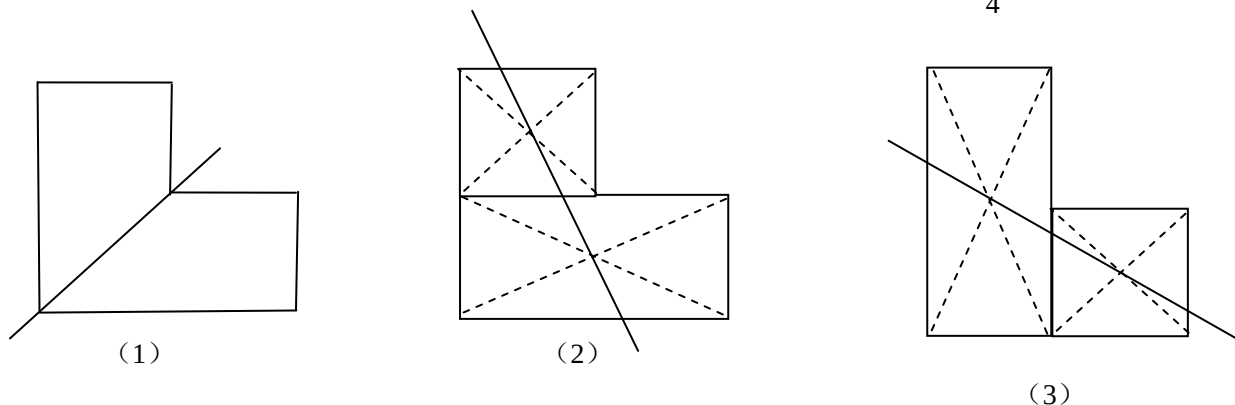


【说明】 由本题的解法可以看出：要得到面积相等的图形，一可以构造“全等图形”，二可以由面积公式出发。

例 4 如图(1)所示的 L 形铁皮，工人师傅想用一条直线将其分成面积相等的两部分。请你帮工人师傅设计三种不同的分割方案（画出示意图）。

【观察与思考】L形铁皮可以看成由两个正方形相割而成，又可以看成由一个矩形和一个正方形拼合而成，应充分利用正方形的轴对称性和矩形与正方形的中心对称性，因为“轴对称”和“中心对称”的两个图形面积都是相等的。

解：如图（1），（2），（3）。

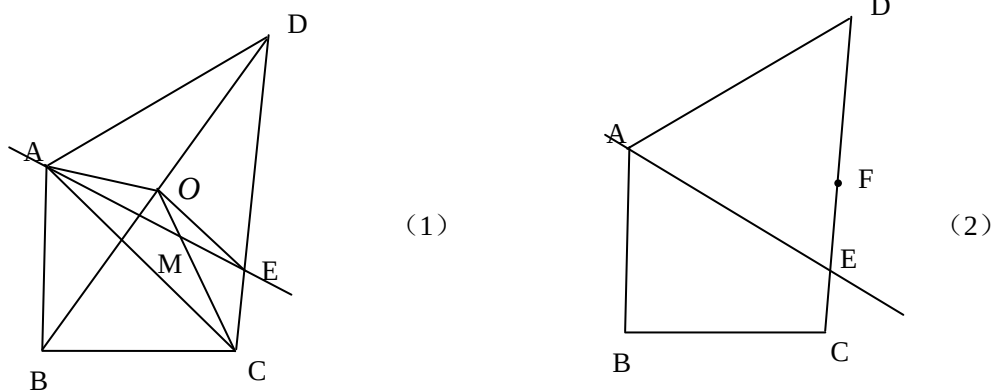


【说明】在本题，恰当地运用了基本图形的轴对称性质和中心对称性质。

例5 我们能把平分四边形面积的直线称为“好线”，利用下面的作图，可以得到四边形的“好线”：在四边形 $ABCD$ 中，取对角线 BD 的中点 O ，连结 OA, OC ，显然，折线 AOC 能把四边形 $ABCD$ 的面积平分，再过点 O 作 $OE \parallel AC$ ，交 CD 于 E ，则直线 AE 即为一条“好线”。（如图（1））

（1）试证明： AE 确为一条“好线”；

（2）如图（2），若 AE 为四边形 $ABCD$ 的一条“好线”， F 为 CD 上一点，请作出过 F 的一条“好线”，并说明理由。



【观察与思考】对于（1），只需证明 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AEC}$ 即可，而这由 $OE \parallel AC$ 很容易得到。

对于（2），其原理与 AE 的作法相同。

解：（1）证明： $\because O$ 是对角线 BD 的中点，

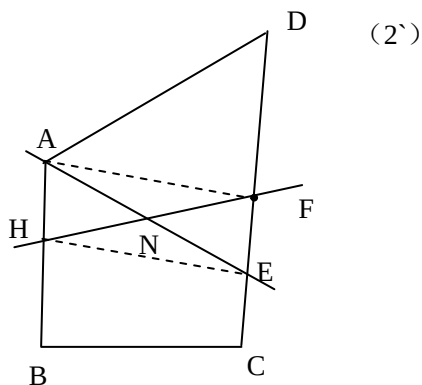
$$\therefore S_{\triangle ABO} = S_{\triangle AOD}, S_{\triangle COB} = S_{\triangle COD}.$$



$$\therefore S_{\text{四边形}ABCO} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}.$$

$$\because OE \parallel AC, \therefore S_{\triangle OAC} = S_{\triangle EAC}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCE} = S_{\text{四边形}ABCO} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}, \therefore AE \text{ 是“好线”}.$$



(2) 这样作：连结 AF ，作 $EH \parallel AF$ ，交 AB 于 H 。如图 (2')，则直线 FH 为“好线”。理由如下：

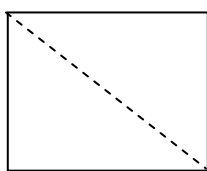
$$\because EH \parallel AF, \therefore S_{\triangle AHE} = S_{\triangle FHE}.$$

$$S_{\text{四边形}FHBC} = S_{\text{四边形}ABCE} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}.$$

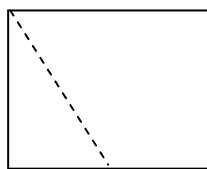
【说明】在本题，主要借助了“等底等高的三角形面积相等”，这是对图形进行“等面积变形”的重要而常用的手段。

二、将原图形剪拼成新图形

例 1 下列各图中，沿着虚线将正方形剪成两部分，那么由这两部分既能拼成平行四边形，又能拼成三角形和梯形的是（ ）

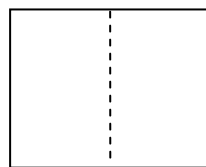


A



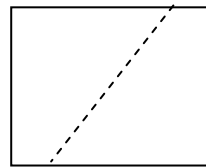
(中点)

B



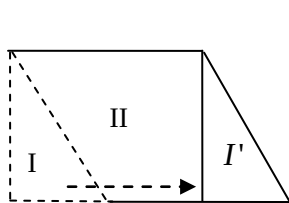
(中点)

C

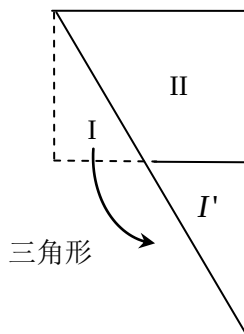


D

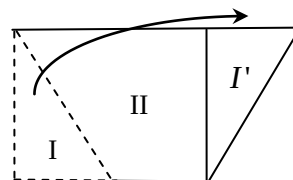
【观察与思考】图 B 中的两部分可拼成：



平行四边形



三角形



梯形

解：应选 B。

【说明】思考中可借助图形的“平移”、“旋转”，以及它们的结合。

例 2 如图 (1)，现有两个边长之比为 1: 2 的正方形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ ，已知点 B, C, B', C' 在同一直线上，且点 C 与 B' 重合，请你利用这两个正方形，通过裁割、平移、旋转的方法，拼出两个相似比为 1: 3 的三角形。

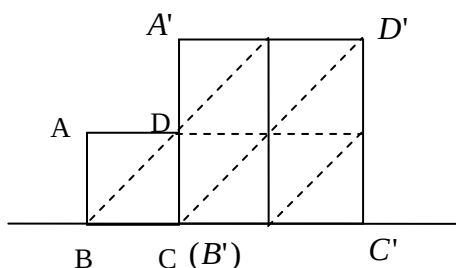
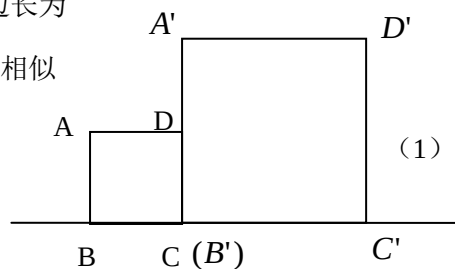


【观察与思考】 已知的两个正方形边长之比为 1:2，不妨设它们的边长为 a 和 $2a$ ，则其面积就分别为 a^2 和 $4a^2$ ，而若剪拼成的两个三角形的相似

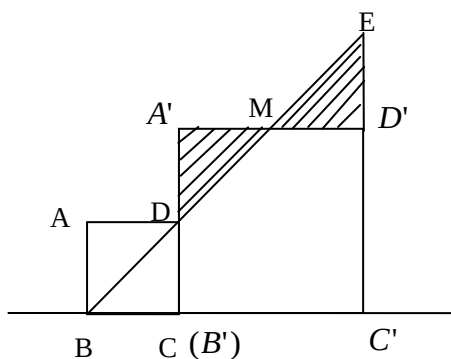
比为 1:3，则它们的面积比就是 1:9，即分别为 $\frac{1}{2}a^2$ 和 $\frac{9}{2}a^2$ 。

这样促使我们想到对原图形作如图 (1') 的裁割，其中每一个小三角形的面积都为 $\frac{1}{2}a^2$ ，这样就有以下的解：

解：设 $A'D'$ 的中点为 M ，沿 BDM 将原图裁割，并将 $\triangle A'DM$ 绕点 M 顺时针旋转 180° 至 $\triangle D'EM$ ，则得到等腰直角三角形 ABD 和等腰直角三角形 $C'BE$ ，如图 (1'')，显然， $Rt\triangle ABD \sim Rt\triangle C'BE$ ，且有 $AB:C'B=1:3$ 。



(1')

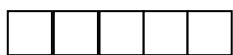


(1'')

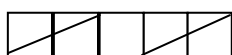
【说明】 因为剪拼前后保持面积不变，所以许多剪拼问题的思考解决都可如本题以面积作为过渡的桥梁。

例 3 请阅读下列材料：

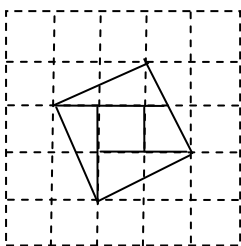
问题：现有 5 个边长为 1 的正方形，排列形式如图 (1)，请把它们分割后拼接成一个新的正方形。要求：画出分割线并在正方形网格图 (图中每个小正方形的边长均为 1) 中用实线画出拼接成的新正方形。



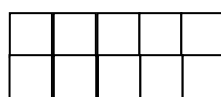
(1)



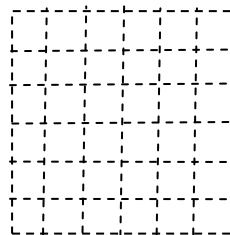
(2)



(3)



(4)



(5)

小东同学的做法是：设新正方形的边长为 $x(x > 0)$ 。依题意，割补前后图形的面积相等，有 $x^2 = 5$ ，解得 $x = \sqrt{5}$ 。

由此可知新正方形的边长等于两个正方形组成的矩形对角线的长。于是，画出如图 (3) 所示的新正方形。

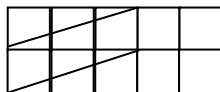
请你参考小东同学的做法，解决如下问题：

现有 10 个边长为 1 的正方形，排列形式如图 (4)，请把它们分割后拼接成一个新的正方形。要求：在图 (4) 中画出分割线，并在图 (5) 的正方形网格图 (图中每个小正方形的边均为 1) 中用实线画出拼接成的新正方形。

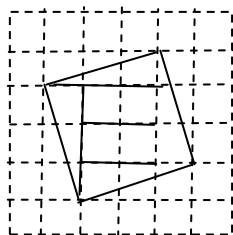
【观察与思考】 设新正方形的边长为 y ，则 $y^2 = 10$ ，可知 $y = \sqrt{10} = \sqrt{9^2 + 1^2}$ ，边长 y 应等于三个小正方形并

在一起的所成矩形的对角线。因此有以下的解：

解：所画图形如图（4'）和图（5'）所示。



(4')



(5')

【说明】本题进一步说明，剪拼型的图形操作问题，常以面积做为解法思考的依据。

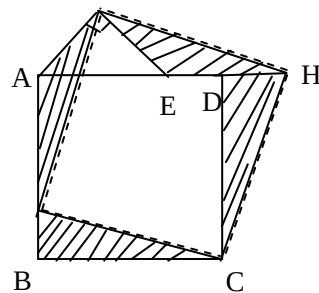
例4 在图（1）至（5）中，正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，等腰直角三角形 FAE 的斜边 $AE = 2b$ ，且边 AD 和 AE 在同一直线上。

操作示例

当 $2b < a$ 时，如图（1），在 BA 上选取点 G ，使 $BG = b$ ，连结 FG 和 CG ，裁掉 $\triangle FAG$ 和 $\triangle CGB$ 并分别拼接到 $\triangle FEH$ 和 $\triangle CHD$ 的位置构成四边形 $FGCH$ 。

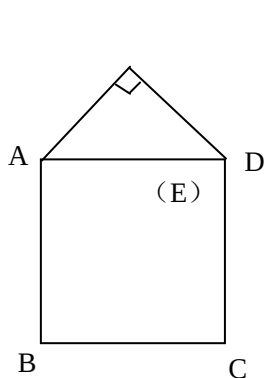
思考发现

小明在操作后发现：该剪拼方法就是先将 $\triangle FAG$ 绕点 F 逆时针旋转 90° 到 $\triangle FEH$ 的位置，易知 EH 与 AD 在同一直线上。连结 CH ，由剪拼方法可得 $DH = BG$ ，故 $\triangle CHD \cong \triangle CGB$ ，从而又可将 $\triangle CGB$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 到 $\triangle CHD$ 的位置。这样，对于剪拼得到的四边形 $FGCH$ （如图（1）），过点 F 作 $FM \perp AE$ 于点 M （图略），利用 SAS 公理可判断 $\triangle HFM \cong \triangle CHD$ ，易得 $FH = HC = GC = FG$ ，

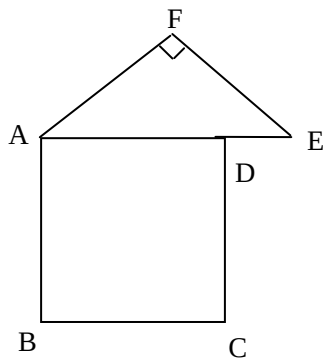


(2b < a) (1)

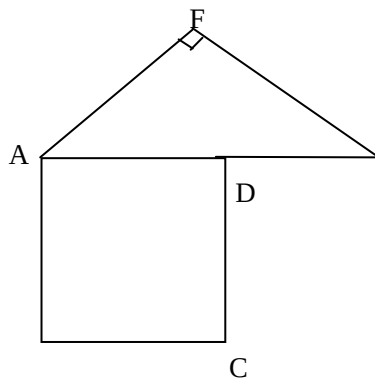
$\angle FHC = 90^\circ$ ，进而根据正方形的判定方法，可以判断出四边形 $FGCH$ 是正方形。



(2b = a) (2)



(a < 2b < 2a) (3)



(b = a) (4)

实践探究

(1) 正方形 $FGCH$ 的面积是_____；（用含 a, b 的式子表示）

(2) 类比图（1）的剪拼方法，请你就图（2）至（4）的三种情形分别画出剪拼成一个正方形的示意图。

联想拓展 小明通过探究后发现：当 $b \leq a$ 时，此类图形都能剪拼成正方形，且所选取的点 G 的位置在 BA 方向上随着 b 的增大而不断上移。

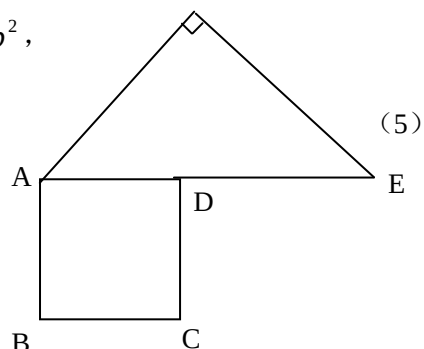
当 $b > a$ 时，如图（5）的图形能否剪成一个正方形？若能，请在图中画出剪拼的示意图；若不能，简要说明理

由。

【观察与思考】在所给的图形中（1），（2），（3），（4），（5），均有正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，等腰直角 $\triangle FAE$ 的斜边边区长为 $2b$ ，因此，二者

面积分别是 a^2 和 b^2 。由它们剪拼成的新正方形的面积应为 $a^2 + b^2$ ，

即其边长应为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，以此特征去设计剪拼即可。（ $b < a$ ）

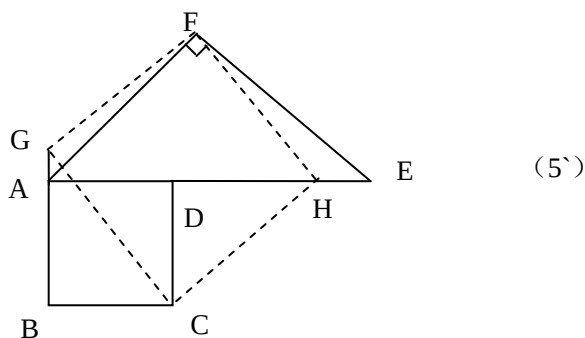
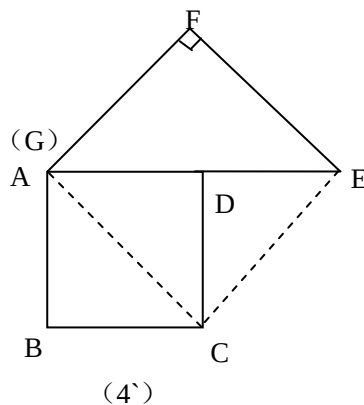
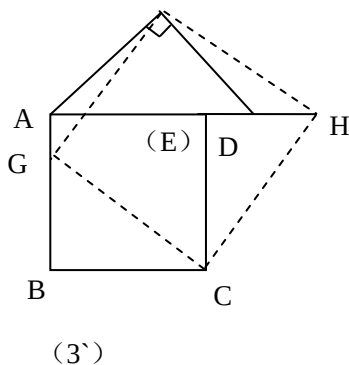
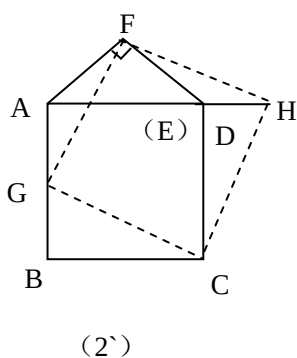


解：实践探究（1） $a^2 + b^2$ ；

（2）剪拼方法如图（2'）~ 图（4'）图（2'）~ 图（3'）中截 $BG = DH = b$ ，

就有 $CG^2 = CB^2 + BG^2 = a^2 + b^2$ 。

联想拓展出 能：剪拼方法如图（5'）（图中 $BG = DH = b$ ）。

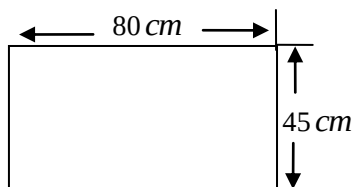


【说明】本题的核心都是面积为 b^2 的等腰直角三角形和面积为 a^2 的正方形剪拼成一个大正方形，大正方形边长易知，相应剪拼方法也随之可得。

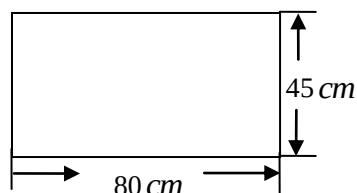
例 5 蓝天希望学校正准备建一个多媒体教室，计划做长 120cm ，宽 30cm 的长条形桌面，现只有长 80cm ，宽 45cm 的木板，请你为该校设计不同的拼接方案，使拼起来的桌面符合要求。（只要求画出裁剪，拼接图形，

并标上尺寸。)

【观察与思考】桌面面积为 $120 \times 30 = 3600 \text{ cm}^2$ ，而每块木板面积为 $80 \times 45 = 3600 \text{ cm}^2$ ，二者是相等的，另外，考虑截下两块 15×40 的两块木板的位置搭配，就有

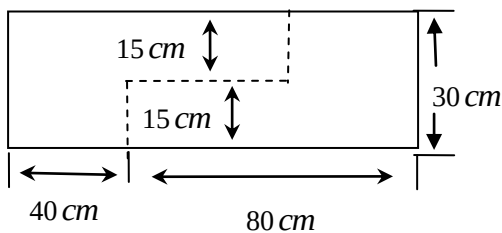
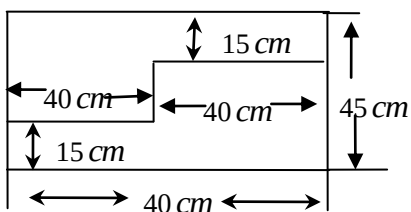
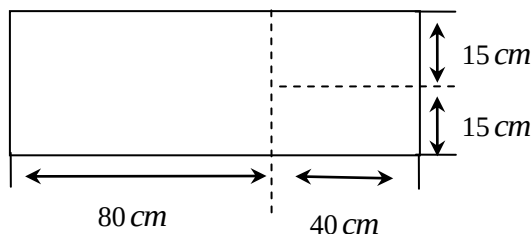
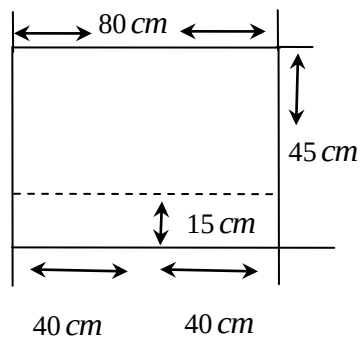


(1)



(2)

解：



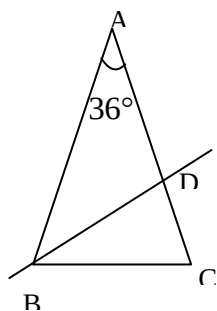
图形的剪拼问题，应注意以下几下方面的思考途径和解决方法：

- 1、考虑图形的变换性质和如何利用变换；
- 2、考虑相似三角形面积比与相似比的关系；
- 3、考虑“勾股定理”对应的图形面积关系；
- 4、考虑特定数量的构成形式。

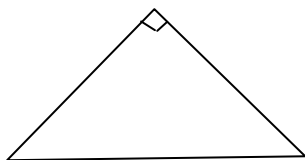
练习题

1、(1) 已知：如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$ ，直线 BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D 。

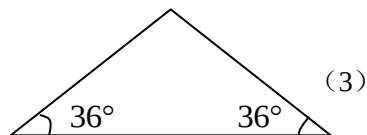
求证： $\triangle ABD$ 与 $\triangle DBC$ 都是等腰三角形。



(1)



(2)

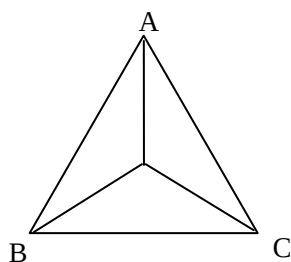


(3)

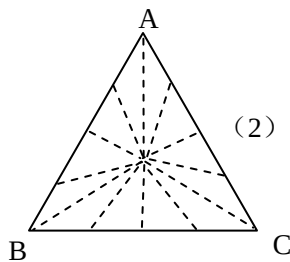
(2) 在证明了该命题后，小颖发现：下列两个等腰三角形如图(2)、(3)也具有这种特性。请你在图(2)、(3)中分别画出一条直线，把他们分成两个小等腰三角形并在图中标出所画等腰三角形两个底角的度数；

(3) 接着，小颖又发现：直角三角形和一些非等腰三角形也具有这样的特性，如：直角三角形斜边上的中线可把它分成两个小等腰三角形。请你画出两个具有这种特性的三角形的示意图，并在图中标出三角形各内角的度数。说明：要求画出的两个三角形不相似，而且既不是等腰三角形也不是直角三角形。

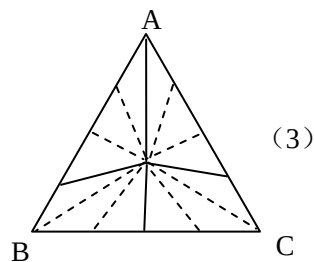
2、如果要把正三角形的面积四等分，我们可以先连结正三角形的中心和各顶点（如图(1)，这些线段将这个正三角形分成了三个全等的等腰三角形）；再把所得的每个等腰三角形的底边四等分，连结中心和各边等分点（如图(2)，这些线段把这个正三角形分成了12个面积相等的小三角形）；最后，依次把相邻的三个小三角形拼合在一起（如图(3)，这样就能把正三角形的面积四等分）。



(1)



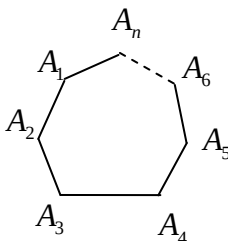
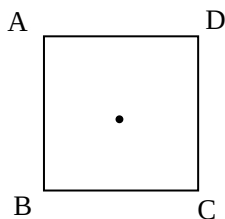
(2)



(3)

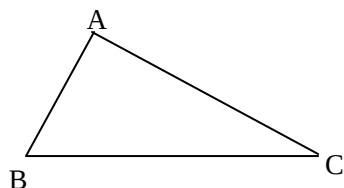
(1) 怎样从正方形中心引线段，才能将这个正方形的面积 m 等分？

(2) 怎样从正 n 边形的中心引线段，才能将这个正 n 边形的面积 m 等分？

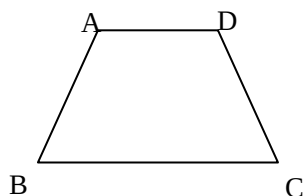




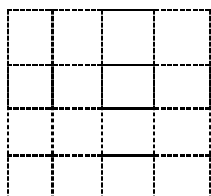
3、某农场有一块三角形的土地，准备分成面积相等的 4 块分别承包给农户，请你画出两种不同的设计方案。



4、设计两种不同方案，用一线段将梯形 $ABCD$ 的面积平分。



5、如图 4×4 的方格图，请以图格线为基础，画出四种不同的将其面积平分的分割线。



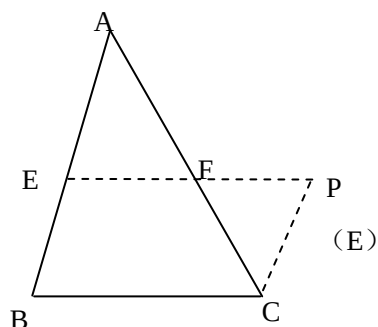
6、在 $\triangle ABC$ 中，沿着中位线 EF 一刀剪切后，用得到的 $\triangle AEF$ 和四边形 $EBCF$ 可以拼成平行四边形 $EBCP$ ，剪切线与拼图如图示，仿上述的方法，按要求完成下列操作设计，并画出图示。

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，增加条件_____，沿着_____一刀剪切后可以拼成矩形；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，增加条件_____，沿着_____一刀剪切后可以拼成菱形；

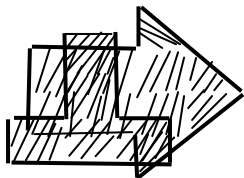
(3) 在 $\triangle ABC$ 中，增加条件_____，沿着_____一刀剪切后可以拼成正方形；

(4) 在 $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) 中，一刀剪切后也可以拼成等腰梯形，首先要确定剪切线，其操作过程（剪切线的作法）是：_____。



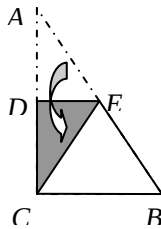
7、请将四个全等直角梯形，拼成一个平行四边形，并画出两种不同的拼法示意图（拼出的两个图形只要不全等就认为是不同的拼法）。

8、右图中的方格图均是由边长为 1 的小正方形组成，将图（1）和图（2）中的阴影部分拼成一个正方形，在图中画出割补方法，附以文字说明。

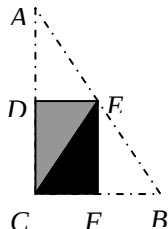


9、操作与探究：

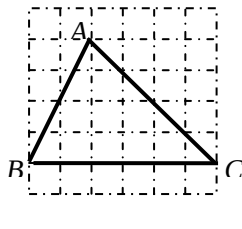
- 图①是一块直角三角形纸片．将该三角形纸片按如图方法折叠，使点 A 与点 C 重合， DE 为折痕．试证明 $\triangle CBE$ 等腰三角形；
- 再将图①中的 $\triangle CBE$ 沿对称轴 EF 折叠(如图②)．通过折叠，原三角形恰好折成两个重合的矩形，其中一个是内接矩形，另一个是拼合(指无缝无重叠)所成的矩形，我们称这样的两个矩形为“组合矩形”．你能将图③中的 $\triangle ABC$ 折叠成一个组合矩形吗？如果能折成，请在图③中画出折痕；
- 请你在图④的方格纸中画出一个斜三角形，同时满足下列条件：①折成的组合矩形为正方形；②顶点都在格点(各小正方形的顶点)上；
- 有一些特殊的四边形，如菱形，通过折叠也能折成组合矩形(其中的内接矩形的四个顶点分别在原四边形的四条边上)．请你进一步探究，一个非特殊的四边形(指除平行四边形、梯形外的四边形)满足何条件时，一定能折成组合矩形？



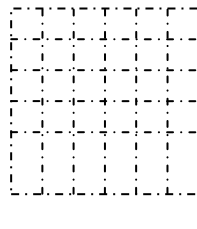
图①



图②



图③



图④

[解析] 这道题目从特殊到一般，从简单到复杂通过操作实践，探究中点四边形是矩形的条件．我们在平行四边形一章中学习过，中点四边形一定是平行四边形，原四边形对角线的位置关系和数量关系决定中点四边形的形状：原四边形对角线垂直，中点四边形为矩形；原四边形对角线相等，中点四边形为菱形；原四边形对角线垂直且相等，中点四边形为正方形．

在图③中，画 $\triangle ABC$ 的 BC 边的高 AD 和 BC 边的中位线 EF ，再画 AD 边的中位线 EM 、 FN ，则折痕为 EF 、 EM 、 FN ．在图④中画一个锐角 $\triangle ABC$ ，只要一边上的高等于该边上的长就可以了．

一个非特殊的四边形满足对角线垂直时，一定能折成组合矩形．

这道题目体现了中考题源于课本又高于课本的思想．