



关节十八

研究性问题的思考要点

研究性问题最根本的特点在于它具有“获取新知识”的意义或意味，也即它不单纯是已学的课本知识的应用，而是包含有理解和掌握一个“新概念”或“新规定”、发现和总结一个“新规律”或“新结论”的成份及过程，它可以突出地考查我们的“学习能力”和“发现与创新”能力。

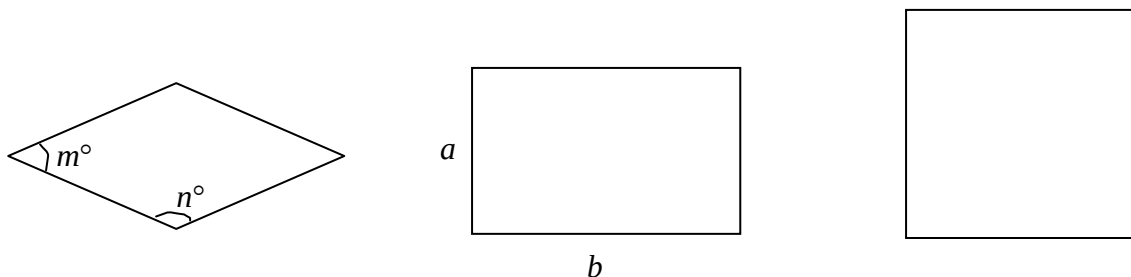
从所依循的思考方向和思维方法来看，研究性问题可大体分为三类：

- I、通过引入的“新概念”或“新规定”及其应用，重在体现和考查“抽象概括”的能力；
- II、通过设置由“特殊到一般”或“由一般到另一特殊”的活动情意，并从中归纳或类比总结出“新规律”，重在体现和考查“合情推理”的能力。
- III、通过对已知的普遍认识的基础上添加特殊条件或限制，以获得更特殊更深入的新认识，重在体现和考查由特殊化使认识走向更深入。

一、设置“新概念”或“新规定”情景的研究性问题

这类问题的思考要点在于把握准“新概念”和“新规定”的实质，或说根本特征，从而将其应用在所属的具体情景之中。

例1 如图(1)，菱形、矩形与正方形的形状有差异，我们将菱形、矩形与正方形的接近程度称为“接近度”。在研究“接近度”时，应保证相似图形的“接近度”相等。



(1) 设菱形相邻两个内角的度数分别为 m° 和 n° ，将菱形的“接近度”定义为 $|m-n|$ ，于是 $|m-n|$ 越小，菱形越接近于正方形。

- ①若菱形的一个内角为 70° ，则该菱形的“接近度”等于_____；
- ②当菱形的“接近度”等于_____时，菱形是正方形。

(2) 设矩形相邻两条边长分别是 a 和 b ($a \leq b$)，将矩形的“接近度”定义为 $|a-b|$ ，于是 $|a-b|$ 越小，矩形越接近于正方形。

你认为这种说法是否合理？若不合理，给出矩形的“接近度”一个合理定义。

【观察与思考】对于(1)，关键是准确地把握：菱形的“接近度”为 $|m-n|$ ，其中 m 和 n 是该菱形“相邻两内

角的度数”。

对于(2)，首先要弄清：应保证相似图形的“接近度”相等，此乃是“接近度”的本质特征，接下来的问题就好解决了。

解：(1) ① 40。 ② 0。

(2) 不合理，例如，对两个相似而不全等的矩形来说，它们接近正方形的程度是相同的，但 $|a-b|$ 却不相等，

合理定义方法不唯一，如定义为 $\frac{b}{a}$ 。 $\frac{b}{a}$ 越小，矩形越接近于正方形； $\frac{b}{a}$ 越大，矩形与正方形的形状差异越大；

当 $\frac{b}{a}=1$ 时，矩形就变成了正方形。

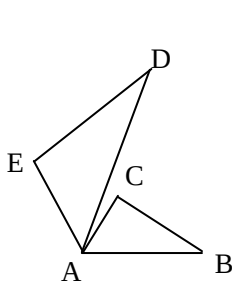
【说明】在本题，关键是要能把握“接近度”这一个新概念的本质特征。

例2 在平面内，先将一个多边形以点 O 为位似中心放大或缩小，使所得多边形与原多边形对应线段的比为 k ，并且原多边形上的任一点 P ，它的对应点 P' 在线段 OP 或其延长线上；接着将所得多边形以点 O 为旋转中心，逆时针旋转一个角度 θ ，这种经过位似和旋转的图形变换叫做旋转相似变换，记为 $O(k, \theta)$ ，其中点 O 叫做旋转相似中心， k 叫做相似比， θ 叫做旋转角。

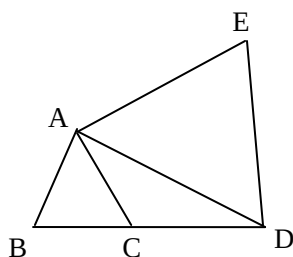
(1) 填空：

① 如图(1)，将 $\triangle ABC$ 以点 A 为旋转相似中心，放大为原来的2倍，再逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle ADE$ ，这个旋转相似变换记为 $A(\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}})$ ；

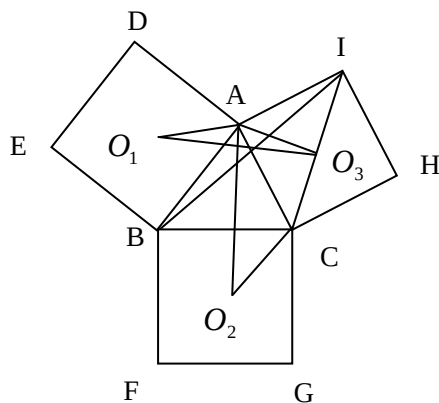
② 如图(2)， $\triangle ABC$ 是边长为 1cm 的等边三角形，将它作旋转相似变换 $A(\sqrt{3}, 90)$ ，得到 $\triangle ADE$ ，则线段 BD 长为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ ；



(1)



(2)



(3)

(2) 如图(3)，分别以锐角三角形 ABC 的三边 AB, BC, CA 为边向外作正方形 $ADEB, BFGC, CHIA$ ，点 O_1, O_2, O_3 分别是这三个正方形的对角线交点，试分别利用 $\triangle AO_1O_3$ 与 $\triangle ABI$ ， $\triangle CIB$ 与 $\triangle CAO_2$ 之间的关系，运用旋转相似变换的知识说明线段 O_1, O_3 与 O_2 之间的关系。

【观察与思考】关键就是要把握 $O(k, \theta)$ 的特征——即位似与旋转的规定——搞清搞准。以下问题都是这些特征的具体化和运用。

解：(1) ① 2, 60° ； ② 2；



(2) $\triangle AO_1O_3$ 经过旋转相似变换 $A(\sqrt{2}, 45^\circ)$, 得到 $\triangle ABI$, 此时, 线段 O_1, O_3 变为线段 BI 。

$\triangle CIB$ 经过旋转相似变换 $C(\frac{\sqrt{2}}{2}, 45^\circ)$, 得到 $\triangle CAO_2$, 此时, 线段 BI 变为线段 AO_2 。

$$\therefore \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore O_1O_2 = AO_2, O_1O_2 \perp AO_2。$$

【说明】从本题可以看出, 所谓掌握一个“新概念”或“新规定”, 是指能将它应用在具体的问题中和复合的问题中, 这也正是抽象概括能力的基本表现形式。

二、设置“发现新规律”的研究性问题

这类问题的思考要点在于把握准“由特殊到一般”或“由特殊到特殊”的共同点或共同属性, 借归纳或类比概括出带有一定“普遍性”的规律。

例1 **提出问题:** 如图(1), 在四边形 $ABCD$ 中, P 是 AD 边上任意一点, $\triangle PBC$ 与 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 的面积之间有什么关系?

探究发现: 为了解决这个问题, 我们可以先从一些简单的、特殊的情形入手。

(1) 当 $AP = \frac{1}{2}AD$ 时 (如图(2))

$\therefore AP = \frac{1}{2}AD$, $\triangle ABP$ 和 $\triangle ABD$ 的高相等。

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD}。$$

$PD = AD - AP = \frac{1}{2}AD$, $\triangle CDP$ 和 $\triangle CDA$ 的高相等。

$$\therefore S_{\triangle CDP} = \frac{1}{2}S_{\triangle CDA}。$$

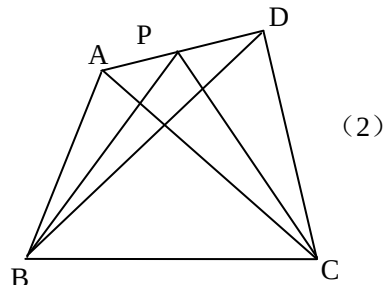
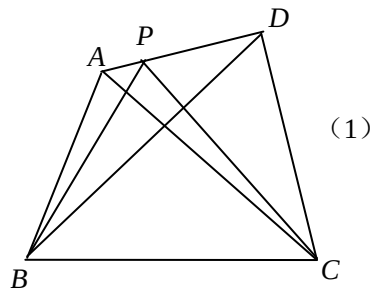
$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CDP} = S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} - \frac{1}{2}S_{\triangle CDA}。$$

$$= S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{2}(S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle DBC}) - \frac{1}{2}(S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABC})$$

$$= \frac{1}{2}S_{\triangle DBC} + \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}。$$

(2) 当 $AP = \frac{1}{3}AD$ 时, 探求 $S_{\triangle PBC}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle DBC}$ 之间的关系, 写出求解过程;

(3) 当 $AP = \frac{1}{6}AD$ 时, 探求 $S_{\triangle PBC}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle DBC}$ 之间的关系为: _____;





(4) 一般地, 当 $AP = \frac{1}{n}AD$ (n 表示正整数) 时, 探求 $S_{\triangle PBC}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle DBC}$ 之间的关系, 写出求解过程;

问题解决: 当 $AP = \frac{m}{n}AD$ ($0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$) 时, $S_{\triangle PBC}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle DBC}$ 之间的关系式为: _____。

【观察与思考】 对于 (2), 关键是将 (1) 的推理过程类比到 $AP = \frac{1}{3}AD$ 时的情景, 看其是否成立; 对于 (3) 是将 (1)、(2) 的结论再类比到 $AP = \frac{1}{6}AD$; 对于 (4) 则是将推理过程和结论进行更为一般化的推广和归纳。

解: (2) $\because AP = \frac{1}{3}AD$, $\triangle ABP$ 和 $\triangle ABD$ 的高相等, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD}$ 。

又 $\because PD = AD - AP = \frac{2}{3}AD$, $\triangle CDP$ 和 $\triangle CDA$ 的高相等, $\therefore S_{\triangle CDP} = \frac{2}{3}S_{\triangle CDA}$ 。

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle PBC} &= S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CDP} = S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} - \frac{2}{3}S_{\triangle CDA} \\ &= S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{3}(S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle DBC}) - \frac{2}{3}(S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABC}) = \frac{1}{3}S_{\triangle DBC} + \frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle DBC} + \frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

$$(3) \therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{6}S_{\triangle DBC} + \frac{5}{6}S_{\triangle ABC}.$$

$$(4) \therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{n}S_{\triangle DBC} + \frac{n-1}{n}S_{\triangle ABC}.$$

$\because AP = \frac{1}{n}AD$, $\triangle ABP$ 和 $\triangle ABD$ 的高相等。

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{n}S_{\triangle ABD}.$$

又 $\because PD = AD - AP = \frac{n-1}{n}AD$, $\triangle CDP$ 和 $\triangle CDA$ 的高相等。

$$\therefore S_{\triangle CDP} = \frac{n-1}{n}S_{\triangle CDA}.$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle PBC} &= S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CDP} = S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{n}S_{\triangle ABD} - \frac{n-1}{n}S_{\triangle CDA} \\ &= S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{n}(S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle DBC}) - \frac{n-1}{n}(S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABC}) \\ &= \frac{1}{n}S_{\triangle DBC} + \frac{n-1}{n}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$



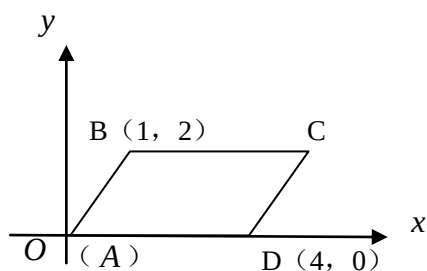
$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{n} S_{\triangle DBC} + \frac{n-1}{n} S_{\triangle ABC}.$$

问题解决: $\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{m}{n} S_{\triangle DBC} + \frac{n-m}{n} S_{\triangle ABC}.$

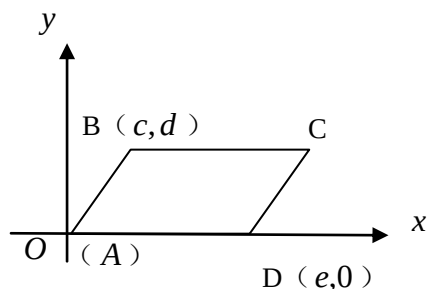
【说明】在本题，准确地使用“类比”和“归纳”是各小问题获解的关键。

例2 实验与探究: (1) 在图(1), (2), (3) 中, 给出平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A, B, D 的坐标 (如图所示),

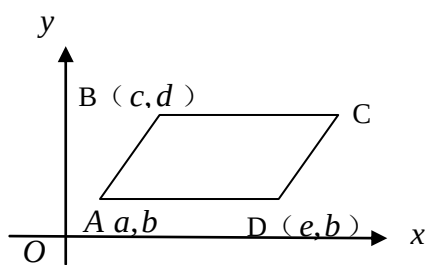
写出图(1), (2), (3) 中的顶点 C 的坐标, 它们分别是 $(5, 2)$, _____, _____;



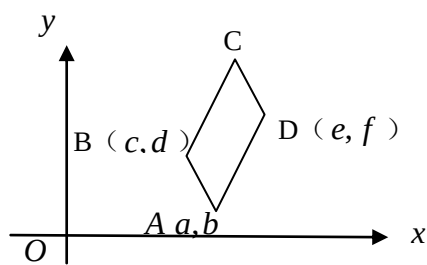
(1)



(2)



(3)



(4)

(2) 在图(4) 中, 给出平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A, B, D 的坐标 (如图所示), 求出顶点 C 的坐标; (C 点的坐标用含 a, b, c, d, e, f 的代数式表示);

归纳与发现: (3) 通过对图(1), (2), (3), (4) 的观察和顶点 C 的坐标的探究, 你会发现: 无论平行四边形 $ABCD$ 处于直角坐标系中哪个位置, 当其顶点坐标为 $A(a, b), B(c, d), C(m, n), D(e, f)$, 如图(4) 时, 则四个顶点的横坐标 a, c, m, e 之间的等量关系为 _____; 纵坐标 b, d, n, f 之间的等量关系为 _____ (不必证明)。



运用与推广：(4) 在同一直角坐标系中有抛物线 $y = x^2 - (5c-3)x - c$ 和三个点 $G\left(-\frac{1}{2}c, \frac{5}{2}c\right)$, $S\left(\frac{1}{2}c, \frac{9}{2}c\right)$,

$H(2c, 0)$ (其中 $c > 0$)。问当 c 为何值时, 该抛物线上存在点 P , 使得 G, S, H, P 为顶点的四边形是平行四边形? 并求出所有符合条件的 P 点的坐标。

【观察与思考】问题 (1), (2), (3) 逐步“由特殊到一般”, 发现点 C 的坐标和另外三点的坐标间的关系, 思考的核心是体察并归纳出各种情况下的坐标关系的共性, 从而上升成“一般规律”; 问题 (4) 则是这个“一般规律”的综合性应用。

解: (1) $(e+c, d)$, $(c+e-a, d)$ 。

(2) 分别过点 A, B, C, D 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1, C_1, D_1 。分别过 A, D 作 $AE \perp BB_1$ 于 E , $DF \perp CC_1$

于点 F 。如图 (4'), 在平行四边形 $ABCD$ 中, $CD = BA$, 又 $\because BB_1 \parallel CC_1$,

$\therefore \angle EBA + \angle ABC + \angle BCF = \angle ABC + \angle BCF + \angle FCD = 180^\circ$ 。

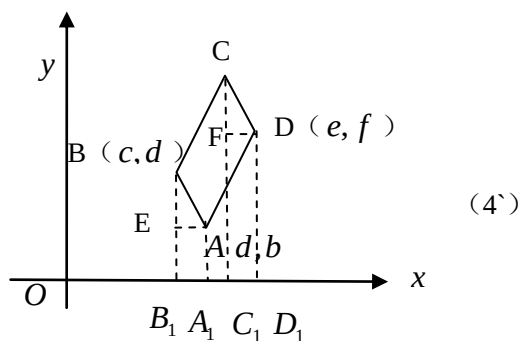
$\therefore \angle EBA = \angle FCD$, 又 $\because \angle BEA = \angle CFD = 90^\circ, \therefore \triangle BEA \cong \triangle CFD$ 。

$\therefore AE = DF = a - c, BE = CF = d - b$ 。

设 $C(x, y)$ 。由 $e - x = a - c$ 得 $x = e + c - a$ 。

由 $y - f = d - b$, 得 $y = f + d - b$ 。

$\therefore C(e+c-a, f+d-b)$ 。



(3) $m = c + e - a, n = d + f - b$ 。或 $m + a = c + e, n + b = d + f$ 。

(4) ①若 GS 为平行四边形的对角线, 由 (3) 可得 $P_1(-2c, 7c)$ 。要使 P_1 在抛物线上, 则有 $7c = 4c^2 - (5c-3)(-2c) - c$, 即 $c^2 - c = 0, \therefore c_1 = 0$ (舍去), $c_2 = 1$ 。此时 $P_1(-2, 7)$ 。

②若 SH 为平行四边形的对角线, 由 (3) 可得 $P_2(3c, 2c)$, 同理可得 $c = 1$, 此时 $P_2(3, 2)$ 。

③若 GH 为平行四边形的对角线, 由 (3) 可得 $(c, -2c)$, 同理可得 $c = 1$, 此时 $P_3(1, -2)$ 。

综上所述, 当 $c = 1$ 时, 抛物线上存在点 P , 使得以 G, S, H, P 为顶点的四边形是平行四边形。

符合条件的点有 $P_1(-2, 7)$; $P_2(3, 2)$; $P_3(1, -2)$ 。

【说明】在本题中, 由 (1) 的具体启发完成 (2) 中的求解是关键; 在问题 (4) 中, 全面而恰当的分类使解答简捷而有序。



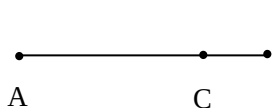
例3 如图(1), 点C将线段AB分成两部分, 如果 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, 那么称点C为线段AB的黄金分割点。

某研究小组在进行课题学习时, 由黄金分割点联想到“黄金分割线”, 类似地给出“黄金分割线”的定义: 直线l将一个面积为S的图形分成两部分, 这两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 如果 $\frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S_1}$, 那么称直线l为该图形的黄金分割线。

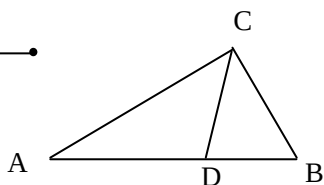
(1) 研究小组猜想: 在 $\triangle ABC$ 中, 若点D为AB边上黄金分割点(如图(2)), 则直线CD是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线, 你认为对吗? 为什么?

(2) 请你说明: 三角形的中线是否也是该三角形的黄金分割线?

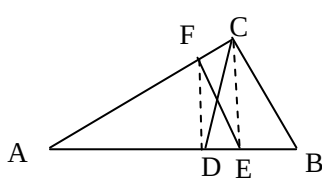
(3) 研究小组在进一步探究中发现: 过点C任作一条直线交AB于点E, 再过点D(D为AB的黄金分割点), 作直线 $DF \parallel CE$, 交AC于点F, 连结EF(如图(3)), 则直线EF也是 $\triangle ABC$ 黄金分割线, 请你说明理由。



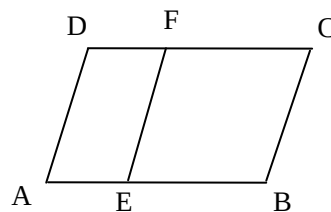
(1)



(2)



(3)



(4)

(4) 如图(4), 点E是平行四边形ABCD的边AB的黄金分割点, 过点E作 $EF \parallel AD$, 交DC于点F, 显然直线EF是平行四边形ABCD的黄金分割线, 请你画一条平行四边形ABCD的黄金分割线, 使它不经过平行四边形ABCD各边的黄金分割点。

【观察与思考】 对于(1)和(2)要通过“黄金分割线”的定义来检验, 要点是由“黄金分割点”类比到“黄金分割线”后对其意义的确切把握。

对于(3)和(4), 实际是做“等积变换”, 这在“几何图形的等积分割”部分已有介绍。

解: (1) 直线CD是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线。理由如下:

设 $\triangle ABC$ 的边AB上的高为 h 。

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot h, S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot h, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h。$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB}, \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{AB}。又 \because \text{点D为边AB的黄金分割点。}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{AD}。 \therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ADC}}。$$

$\therefore$ 直线CD是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线。



(2) $\because$ 三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分, 此时 $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}S$,

$$\therefore \frac{S_1}{S} \neq \frac{S_2}{S},$$

$\therefore$ 三角形的中线不可能是该三角形的黄金分割线。

(3) $\because DF \parallel CE, \therefore \triangle CDF$ 和 $\triangle EFD$ 的公共边 CE 上的高也相等,

$$\therefore S_{\triangle CDF} = S_{\triangle EFD}.$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EFD} = S_{\triangle AEF}.$$

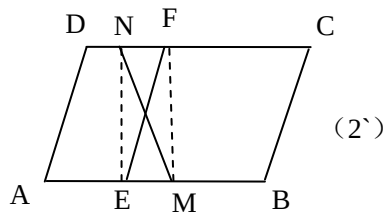
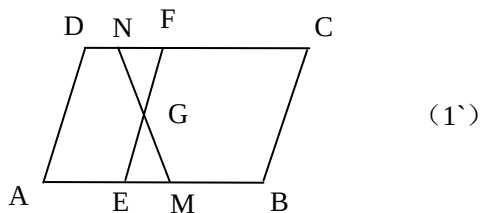
$$\text{又} \because \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}}, \therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\text{四边形}BEFC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

因此, 直线 EF 也是 $\triangle ABC$ 的黄金分割线。

(4) 画法不惟一, 现提供两种画法;

画法一: 如答图 (1'), 取 EF 的中点 G , 再过点 G 作一条直线分别交 AB, DC 于 M, N 点, 则直线 MN 就是平行四边形 $ABCD$ 的黄金分割线。

画法二: 如答图 (2'), 在 DF 上取一点 N , 连结 EN , 再过点 F 作 $FM \parallel NE$ 交 AB 于点 M , 连结 MN , 则直线 MN 就是平行四边形 $ABCD$ 的黄金分割线。



【说明】 本题体现的就是通过类比将“黄金分割”由线段扩充到三角形和平行四边形。

归纳和类比是知识扩充与增长的极为重要的思维途径, 也是研究性问题展开的有效方式。因此, 我们要深刻体会归纳与类比的思考要点, 并能熟练而灵活地运用。

三、设置“特殊化”情景的研究性问题

这类问题的思考要点在于充分利用附加的特殊条件或对结论的特殊要求, 把握特殊条件的特殊结论和相应的关系。



例1 抛物线 $y = x^2 + px + q$ ，其顶点 $M \left(-\frac{p}{2}, \frac{4q-p^2}{4} \right)$ 可以位于坐标系内任意一点，请研究以下问题：

(1) 若其顶点为 $(1, 1)$ ，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $q = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

若其顶点为 $(-2, 5)$ ，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $q = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(2) p, q 具有怎样的关系时，顶点 M 在直线 $y = 2x - 1$ 上？

(3) 抛物线 $y = x^2$ 上任意一点，都可以是抛物线 $y = x^2 + px + q$ 的顶点吗？若可以，请指明 p 与 q 应满足的关系，若不可以，请说明理由。

【观察与思考】根据各小题中对顶点 M 的特殊要求，去寻求 p, q 应满足的条件。

解：(1) (通过解方程可得) $p = -2, q = 2$; $p = 4, q = 9$ 。

(2) 若 $M \left(-\frac{p}{2}, \frac{4q-p^2}{4} \right)$ 在直线 $y = 2x - 1$ 上，则 $\frac{4q-p^2}{4} = 2 \times \left(-\frac{p}{2} \right) - 1$ 。

$\therefore q = \frac{1}{4}p^2 - p - 1$ (p 为任意实数)，即 p, q 满足关系 $q = \frac{1}{4}p^2 - p - 1$ 时，抛物线 $y = x^2 + px + q$ 的顶点总在直线 $y = 2x - 1$ 上。

(3) 可以。令 $\frac{4q-p^2}{4} = \left(-\frac{p}{2} \right)^2$ ，得 $q = \frac{1}{2}p^2$ (p 为任意实数)。

$\therefore$ 当 p 和 q 满足关系 $q = \frac{1}{2}p^2$ 时，抛物线 $y = x^2 + px + q$ 的顶点都在抛物线 $y = x^2$ 上。

【说明】由本题可以看出，特殊化方向的研究，可以使我们对原事物有更多方向和更深层次的认识。

例2 我们知道，两边及其中一边的对角分别对应相等的两个三角形不一定全等。那么在什么情况下，它们会全等？

(1) 阅读与证明：

当这两个三角形均为直角三角形，显然它们全等。

当这两个三角形均为钝角三角形，可证它们全等（证明略）。

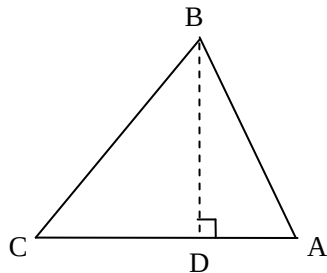
对于这两个三角形均为锐角三角形，它们也全等，可证明如下：

已知： $\triangle ABC$ ， $\triangle A_1B_1C_1$ 均为锐角三角形， $AB = A_1B_1$ ，

$BC = B_1C_1$ ， $\angle C = \angle C_1$ 。

求证： $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ 。

（请你将下列证明过程补充完整）。





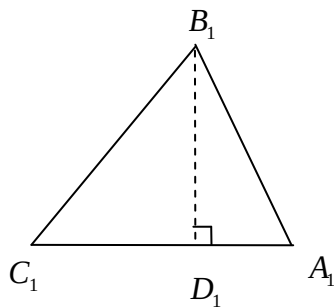
证明：分别过点 B, B_1 作 $BD \perp CA$ 于 D , $B_1D_1 \perp C_1A_1$ 于 D_1 ,

则 $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1 = 90^\circ$,

$\therefore BC = B_1C_1, \angle C = \angle C_1$,

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle B_1C_1D_1$,

$\therefore BD = B_1D_1$ 。



(2) **归纳与叙述**：由(1)可得到一个正确的结论，请你写出这个结论。

解：(1) 又 $\because AB = A_1B_1, \angle ADB = \angle A_1D_1B_1 = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle A_1D_1B_1, \angle A = \angle A_1$,

又 $\because \angle C = \angle C_1, BC = B_1C_1$ 。

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ 。

(2) 若 $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ 均为锐角三角形或均为直角三角形或均为钝角三角形，且 $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, \angle C = \angle C_1$ ，则 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ 。

【说明】 本题告诉我们，一个不真的命题加上若干限定条件之后，它就可能成为一个真命题，因此，“特殊化”方向的研究，可帮助我们获得更深入的知识。

练习题

1、设关于 x 的一次函数 $y = a_1x + b_1$ 与 $y = a_2x + b_2$ ，则称函数。

$y = m(a_1x + b_1) + n(a_2x + b_2)$ (其中 $m + n = 1$) 为此两个函数的生成函数。

(1) 当 $x = 1$ 时，求函数 $y = x + 1$ 与 $y = 2x$ 的生成函数的值；

(2) 若函数 $y = a_1x + b_1$ 与 $y = a_2x + b_2$ 的图象的交点为 P ，判断点 P 是否在此两个函数的生成函数的图象上，并说明理由。

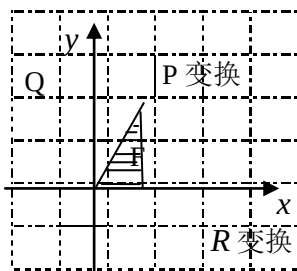


2、如图(1)，在 6×6 的方格中，给出下列三种变换： P 变换， Q 变换， R 变换。将图形 F 沿 x 轴向右平移1格的图形 F_1 ，称为作1次 P 变换；将图形 F 沿 y 轴翻折得图形 F_2 ，称为作1次 Q 变换；将图形 F 绕坐标原点顺时针旋转 90° 得图形 F_3 ，称为作1次 R 变换。

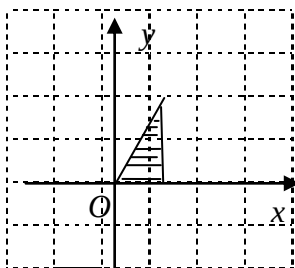
规定： PQ 变换表示先作1次 Q 变换，再作一次 P 变换； QP 变换表示先作一次 P 变换，再依一次 Q 变换；

R^n 变换表示作 n 次 R 变换。解答下列问题：

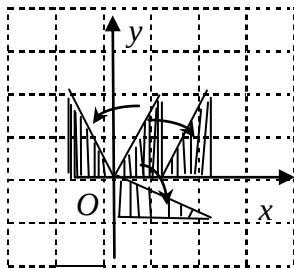
- (1) 作 R^4 变换相当于至少作_____次 Q 变换；
- (2) 请在图(2)中画出图形 F 作 R^{2008} 变换后得到的图形 F_4 ；
- (3) PQ 变换与 QP 变换是否是相同的变换？请在图(3)中画出 PQ 变换后得到的图形 F_5 ，在图(4)中画出 QP 变换后得到的图形 F_6 。



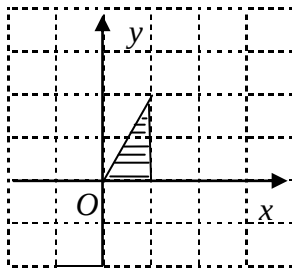
(1)



(2)



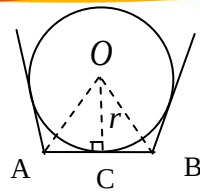
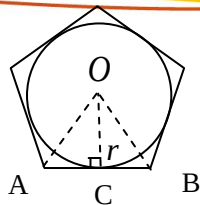
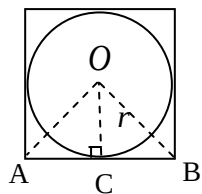
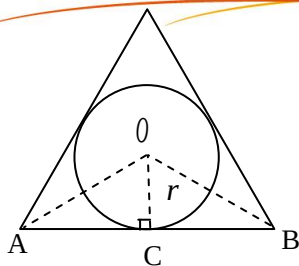
(3)



(4)

3、阅读材料并解决问题：

与正三角形各边都相切的圆叫做正三角形的内切圆，与正四边形各边都相切的圆叫做正四边形的内切圆，.....与正 n 边形各边都相切的圆叫做正 n 边形的内切圆，设正 n ($n \geq 3$) 边形的面积为 $S_{\text{正}n\text{边形}}$ ，其内切圆的半径为 r ，试探索正 n 边形的面积。



如图 (1), 当 $n=3$ 时,

设 AB 切 $\odot O$ 于点 C , 连结 OC, OA, OB ,

$\therefore OC \perp AB, \therefore OA = OB$ 。

$\therefore \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB, AB = 2BC$ 。

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\therefore \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{3} = 60^\circ, OC = r$,

$\therefore AC = r \cdot \tan 60^\circ, AB = 2r \cdot \tan 60^\circ$,

$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2r \tan 60^\circ = r^2 \tan 60^\circ$,

$\therefore S_{\text{正三角形}} = 3S_{\triangle OAB} = 3r^2 \cdot \tan 60^\circ$ 。

(1) 如图 (2), 当 $n=4$ 时, 仿照 (1) 中的方法和过程可求得: $S_{\text{正四边形}} = 4S_{\triangle OAB} =$ _____ ;

(2) 如图 (3), 当 $n=5$ 时, 仿照 (1) 中的方法和过程 $S_{\text{正五边形}}$;

(3) 如图 (4), 根据以上探索过程, 请直接写出 $S_{\text{正}n\text{边形}} =$ _____ 。

4、课外兴趣小组活动时, 许老师出示了如下问题:

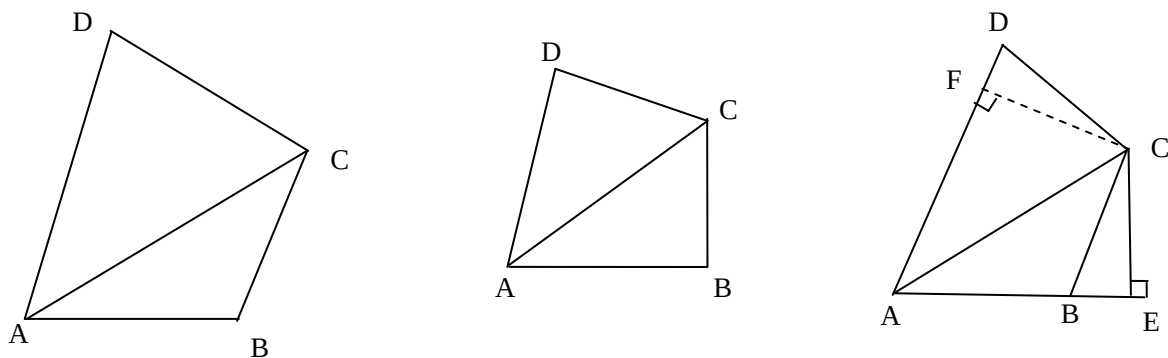
如图 (1), 已知四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle DAB, \angle DAB = 60^\circ$, $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补,

求证: $AB + AD = \sqrt{3}AC$ 。

小敏反复探索, 不得其解。她想, 若将四边形 $ABCD$ 特殊化, 看如何解决该问题。

(1) 特殊情况入手

添加条件: “ $\angle B = \angle D$ ”。如图 (2), 可证 $AB + AD = \sqrt{3}AC$ 。(请你完成此证明)



(2) 解决原来问题

受到(1)的启发,在原问题中,添加辅助线:如图(3),过点C分别作 AB, AD 的垂线,垂足分别为 E, F 。

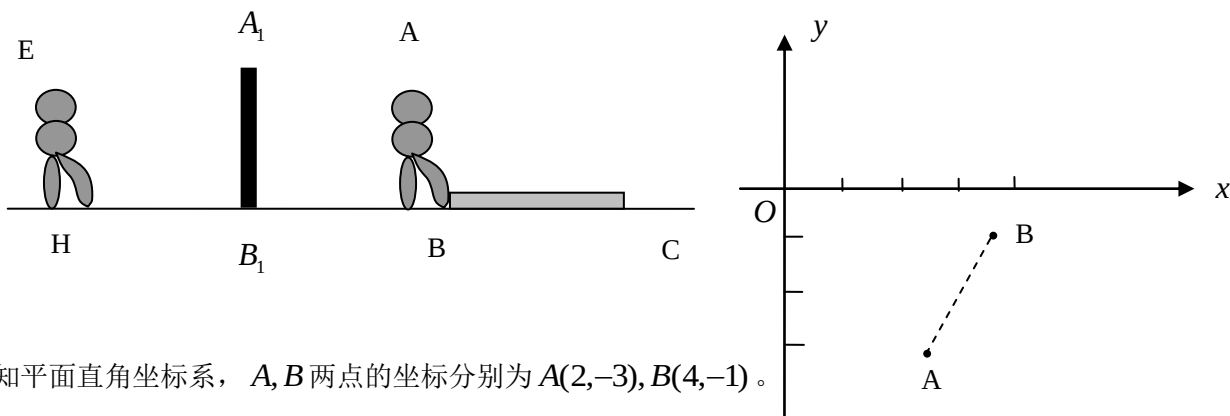
(请你补全证明)

5、学习投影后,小明、小颖利用灯光下自己的影子长度来测量一路灯的高度,并探究影子长度的变化规律。如图,在同一时间,身高为 $1.6m$ 的小明(AB)的影子 BC 长是 $3m$,而小颖(EH)刚好在路灯灯泡的正下方 H 点,并测得 $HB = 6cm$ 。

(1) 请在图中画出形成影子的光线,并确定路灯灯泡所在的位置 G ;

(2) 求路灯灯泡的垂直高度 GH 。

(3) 如果小明沿线段 BH 向小颖(点 H)走去,当小明走到 BH 中点 B_1 处时,求其影子 B_1C_1 的长;当小明继续走剩下路程的 $\frac{1}{3}$ 到 B_2 处时,求其影子 B_2C_2 的长;当小明继续走剩下路程的 $\frac{1}{4}$ 到 B_3 处, ...按此规律继续走下去,当小明走剩下路程的 $\frac{1}{n+1}$ 到 B_n 处时,其影子 B_nC_n 的长为_____ m (直接用 n 的代数式表示)。



6、如图,已知平面直角坐标系, A, B 两点的坐标分别为 $A(2, -3), B(4, -1)$ 。

(1) 若 $P(p, 0)$ 是 x 轴上一个动点,则当 $p =$ _____ 时, $\triangle PAB$ 的周长最短。

(2) 若 $C(a, 0), D(a+3, 0)$ 是 x 轴上两个动点,则当 $a =$ _____ 时, 四边形 $ABDC$ 的周长最短。

(3) 设 M, N 分别为 x 轴和 y 轴上的动点,请问:是否存在这样的点 $M(m, 0), N(0, n)$, 使四边形 $ABMN$ 的周长最短? 若存在, 请求出 $m =$ _____, $n =$ _____, 若不存在, 请说明理由。