

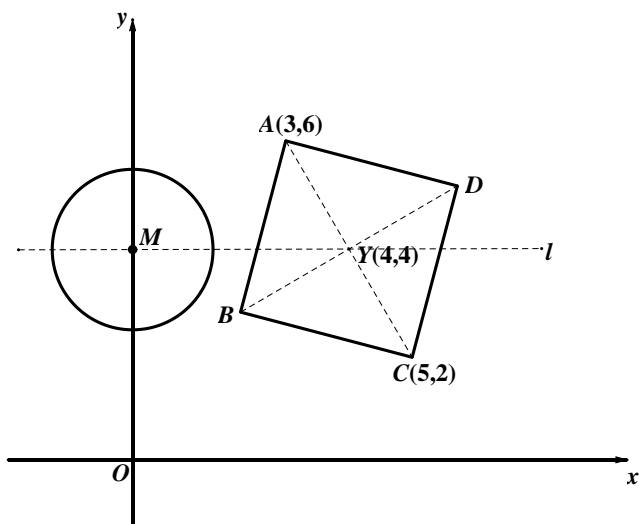
## 第十三届“中环杯”中小学生思维能力训练活动

## 八年级决赛答案

## 一、填空题：

1. 答:  $y = 4$ 

利用中点公式，我们很容易写出正方形  $ABCD$  的中心  $Y(4,4)$ 。一条直线只要同时经过点  $M$  和点  $Y$ ，一定满足我们的要求。由于点  $M$  和点  $Y$  的纵坐标都是 4，所以这条直线的解析式为  $y = 4$



2. 答: 0

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}} - \sqrt[4]{8+4\sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}} - \sqrt[4]{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}} - \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

令  $m = \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ，则

$$\begin{aligned} m^2 &= (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{6}-4 \end{aligned}$$

由于  $m < 0$ ，所以  $m = -\sqrt{2\sqrt{6}-4}$ ，从而知道

$$\sqrt{\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}} + \sqrt[4]{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{2\sqrt{6}-4} = -\sqrt{2\sqrt{6}-4} + \sqrt{2\sqrt{6}-4} = 0$$

3. 答：3

由轮换对称多项式的因式分解我们知道

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a), \text{ 所以}$$

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 0. \text{ 而题目告诉我们 } a^2 + b^2 = 2ab + 3 \Rightarrow (a-b)^2 = 3, \text{ 所以}$$

$a \neq b$ 。根据  $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$  我们知道  $a = c$  或  $b = c$ 。

①当  $a = c$  时，则

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = (a-b)^2 = 3$$

②当  $b = c$  时，则

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = (a-b)^2 = 3$$

4. 答：  $\frac{11}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

作  $MN \perp BC$  交  $BC$  于  $N$ ，根据勾股定理，我们只要求出  $MN, NC$  的长度，问题就能解决了。将右上角的图形进行放大，得到如图 2。容易知道

$$\begin{cases} MN = MR + RN = MR + 2 \\ NC = FC - FN = 1 - FN = 1 - HR \end{cases}, \text{ 所以只要求出 } MR \text{ 与 } HR \text{ 即可。考虑到}$$

$$\angle IGO = 30^\circ, \text{ 所以 } IG = \frac{2GO}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \text{ 所以 } IM = \frac{1}{2}IG = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \text{ 其次容易知道}$$

$$IO = \frac{GO}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow HI = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IP = \frac{2HI}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}, \text{ 所以}$$

$$PM = IM - IP = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} MR = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \\ PR = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \text{。所以我们得}$$

$$MN = MR + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2},$$

$$NC = 1 - HR = 1 - (HP + PR) = 1 - \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 所以}$$

$$MC^2 = MN^2 + NC^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{11}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

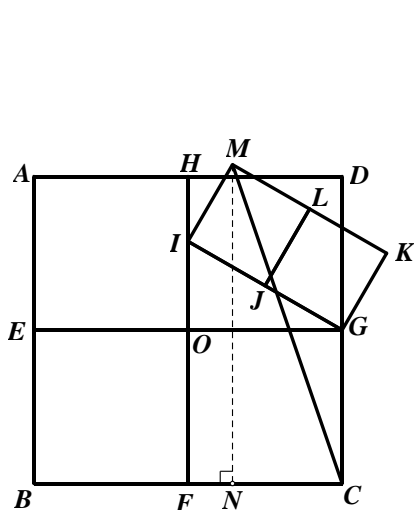


图 1

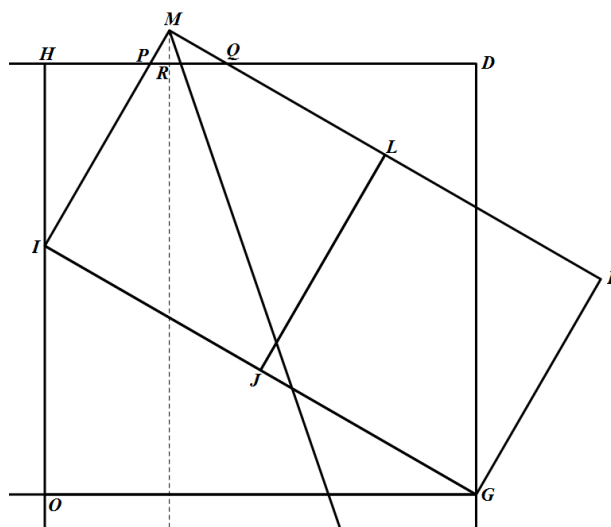


图 2

5. 答：2 或 -3

$$m^4 - m^2 - 2m - 1 = m^4 - (m+1)^2 = (m^2 + m + 1)(m^2 - m - 1) \text{。由于 } m^2 + m + 1 = 0 \text{ 无实}$$

$$\text{数解, 所以 } m^2 - m - 1 = 0 \text{。由于 } n - \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow n^2 - n - 1 = 0 \text{。}$$

$$(1) \text{ 当 } m = n \text{ 时, 此时 } \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 2$$

(2) 当  $m \neq n$  时, 此时  $m, n$  是方程  $x^2 - x - 1 = 0$  的两个根, 所以  $\begin{cases} m+n=1 \\ mn=-1 \end{cases}$ , 所以

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{(m+n)^2 - 2mn}{mn} = -3$$

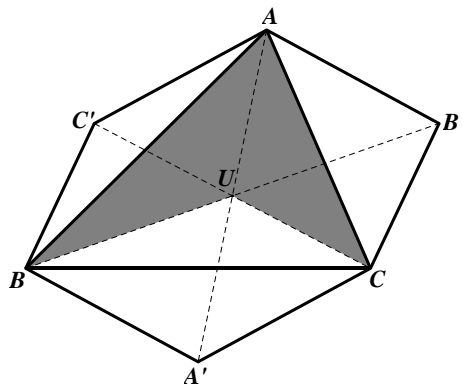
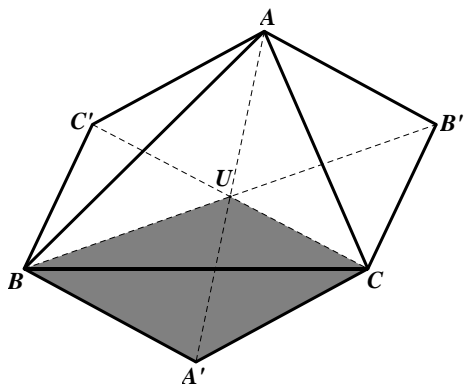
6. 答:  $a+b+c=50$

7. 答: 10

如下图, 由于  $AU = A'U$ , 所以  $\begin{cases} S_{\triangle BUA} = S_{\triangle BUA'} \\ S_{\triangle CUA} = S_{\triangle CUA'} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle BUA'} = S_{\triangle BUA} + S_{\triangle CUA}$ , 同理

$S_{\triangle AUBC'} = S_{\triangle AUCB} + S_{\triangle AUCB'}$ ,  $S_{\triangle CUA'B'} = S_{\triangle CUBA} + S_{\triangle CUBA'}$ 。三个式子通加得

$$S_{\triangle AC'BA'CB'} = 2(S_{\triangle BUA} + S_{\triangle CUA} + S_{\triangle BUC}) = 2S_{\triangle ABC} = 10$$



8. 答: 20112013

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{100x^2 + 39x + \sqrt{3}}}}} \\ & > \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{64x^2 + 16x + 1}}}} = x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{100x^2 + 39x + \sqrt{3}}}}} \\
& < \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + \sqrt{100x^2 + 40x + 4}}}} \\
& = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 10x + 2}}} \\
& < \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{16x^2 + 16x + 4}}} \\
& = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}} \\
& < \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 8x + 4}} \\
& = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \\
& < \sqrt{x^2 + 4x + 4} \\
& = x + 2
\end{aligned}$$

所以不超过 A 的最大整数就是  $x+1=20112013$

9. 答: 3

若  $n \geq 4$  时,

(1) 当  $n=3k (k \geq 2)$  时, 则  $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = (2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1)$ , 显然不是素数, 所

以  $n$  不能是  $3k (k \geq 2)$  的形式;

(2) 当  $n=3k+1 (k \geq 1)$  时, 则

$2^{n+2} - 1 = 2^{3k+3} - 1 = (2^{k+1})^3 - 1 = (2^{k+1} - 1)(2^{2k+2} + 2^{k+1} + 1)$ , 显然不是素数, 所以  $n$  不能

是  $3k+1 (k \geq 1)$  的形式;

(3) 当  $n=3k+2 (k \geq 1)$  时, 则  $2^{n+1} - 1 = 2^{3k+3} - 1 = (2^3)^{k+1} - 1 = (2^3 - 1)(\cdots)$ , 所以

$7 \mid 2^{n+1} - 1$ , 也不符合题意。

综上所述,  $1 \leq n \leq 3$ 。尝试一下发现只有  $n=3$  满足要求

10. 答:  $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ y_1 = \frac{3}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{5} \\ y_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$

首先, 我们容易知道定义域为  $-1 < x < 1, -1 < y < 1$ ,

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{35}{12} \Rightarrow \frac{35}{12} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{7}{12} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}, \text{ 所以}$$

$$\left( \frac{35}{12} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right)^2 - \left( \frac{7}{12} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right)^2 = \frac{1}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^2} = 1, \text{ 利用平方差公式我们得}$$

$$\left( \frac{7}{2} - \frac{1-y}{\sqrt{1-y^2}} \right) \left( \frac{7}{3} - \frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}} \right) = 1, \text{ 由于 } -1 < x < 1, -1 < y < 1, \text{ 所以 } \frac{1-y}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}},$$

$$\frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}, \text{ 令 } z = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}, \text{ 所以}$$

$$\left( \frac{7}{2} - \frac{1}{z} \right) \left( \frac{7}{3} - z \right) = 1 \Rightarrow 21z^2 - 49z + 14 = 0 \Rightarrow z_1 = 2, z_2 = \frac{1}{3}, \text{ 代入 } z = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \text{ 得 } y_1 = \frac{3}{5},$$

$$y_2 = -\frac{4}{5}, \text{ 从而得到最后的解}$$

## 二、动手动脑题

1. 【证明】设  $A = \overline{a_0 a_1 \cdots a_n} = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \times 10 + a_n$ ,

则  $B = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$ , 所以

$$\begin{cases} A+B = a_0 \times (10^n + 10^0) + a_1 \times (10^{n-1} + 10) + a_2 \times (10^{n-2} + 10^2) + \cdots + a_n \times (10^0 + 10^n) \\ A-B = a_0 \times (10^n - 10^0) + a_1 \times (10^{n-1} - 10) + a_2 \times (10^{n-2} + 10^2) + \cdots + a_n \times (10^0 - 10^n) \end{cases}.$$

(1) 当  $n$  为奇数时,  $10^{n-i} + 10^i \equiv (-1)^{n-i} + (-1)^i \pmod{11}$ 。由于  $n$  为奇数, 而  $(n-i) + i = n$ , 所以  $n-i, i$  这两个数肯定一奇一偶, 这样都导致了

$$10^{n-i} + 10^i \equiv (-1)^{n-i} + (-1)^i \equiv 0 \pmod{11}, \text{ 所以此时 } 11 \mid A+B;$$

(2) 当  $n$  为偶数时,  $10^{n-i} - 10^i \equiv (-1)^{n-i} - (-1)^i \pmod{11}$ 。由于  $n$  为偶数, 而  $(n-i) + i = n$ , 所以  $n-i, i$  这两个数肯定同奇偶, 这样都导致了

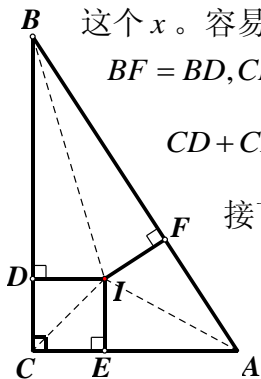
$$10^{n-i} - 10^i \equiv (-1)^{n-i} - (-1)^i \equiv 0 \pmod{11}, \text{ 所以此时 } 11 \mid A-B;$$

综上所述, 无论  $n$  是奇数还是偶数,  $A+B, A-B$  这两个数中至少有一个数是 11 的倍数。

2. 【证明】首先由角平分线性质的我们有  $ID = IE = IF$ , 设其为  $x$ , 然后我们要求出这个  $x$ 。容易证明  $\triangle BDI \cong \triangle BFI$ ,  $\triangle CDI \cong \triangle CEI$ ,  $\triangle AEI \cong \triangle AFI$ , 所以  $BF = BD, CD = CE, AE = AF$ , 从而我们有

$$CD + CE = BC + CA - AB \Rightarrow 2x = a + b - c, \text{ 所以 } x = \frac{a+b-c}{2}.$$

接下来我们要证明:



$$3x = \frac{3(a+b-c)}{2} < \frac{9}{10}a \Leftrightarrow \frac{a+b-c}{2} < \frac{3}{10}a \Leftrightarrow a+b-c < \frac{3}{5}a \Leftrightarrow \frac{2}{5}a+b < c. \text{ 然后用反证}$$

$$\text{法, 假设 } \frac{2}{5}a+b \geq c \Rightarrow \frac{4}{25}a^2 + \frac{4}{5}ab + b^2 \geq c^2 = a^2 + b^2, \text{ 所以 } \frac{4}{5}ab \geq \frac{21}{25}a^2 \Rightarrow a \leq \frac{20}{21}a.$$

而已知告诉我们  $a > b$ , 所以矛盾找到了。命题得证

3. 【证明】由于  $\frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2}$  为整数, 且  $x$  为整数, 所以  $\sqrt{8x+1}$  为整数。令

$$\sqrt{8x+1} = t (t \text{ 为整数}), \text{ 则 } x = \frac{t^2-1}{8} \text{ 代入 } \frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} \text{ 得}$$

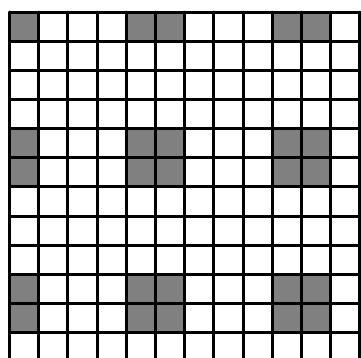
$$\frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} = \frac{4 \cdot \frac{t^2-1}{8} + 1 - t}{2} = \frac{\frac{t^2-1}{2} + 1 - t}{2} = \frac{t^2 - 2t + 1}{4} = \left(\frac{t-1}{2}\right)^2。由于$$

$$\frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} \text{ 为整数, 所以 } \frac{t-1}{2} \text{ 必须为整数, 所以 } \frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} = \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 \text{ 是一个}$$

完全平方数

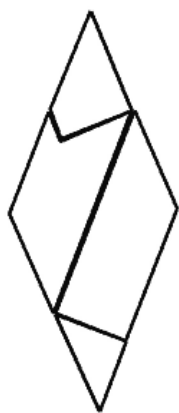
【补充说明】本题也可以在一开始的时候这样描述：由于  $8x+1$  为奇数，所以可以令  $\sqrt{8x+1} = 2m+1$  ( $m$  为整数)，这样后面就不用再描述  $\frac{t-1}{2}$  必须为整数了

4.



【证明】首先，若  $m|n$ ，可以满足我们的要求。若  $m$  不能整除  $n$ ，将  $1 \sim n$  这  $n$  个数字对  $m$  取余数，如果一个小方格它所在的行除以  $m$  的余数是 0 或者 1，并且它所在的列除以  $m$  的余数也是 0 或者 1，那么就将其染成黑色，别的方格染成白色。我们给出一个例子，下图中  $n=12, m=5$ 。对于题目中给出的操作，每次可以覆盖的黑色格子要么是 2 个，要么是 0 个。而开始的时候，由于  $m$  不能整除  $n$ ，那么除以  $m$  的余数是 1 的个数比除以  $m$  的余数是 0 的个数要多 1 个。所以每行中有奇数个黑色格子，而且一共有奇数行拥有黑色格子，导致总的黑色格子数是一个奇数。设灯关着的状态为数字 0，开着的状态为数字 1，那么开始的时候黑色格子的状态和为 0，结束的时候黑色格子的状态和为  $2k+1$ 。而每次操作黑色格子的状态改变是 0 或  $-2$  或  $2$ ，所以开始的时候为偶数，结束的时候也只能是偶数。所以若  $m$  不能整除  $n$ ，则要求不能满足





5. (1)

【答案】(2) 当  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  且  $\alpha \neq 18^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$  时, 有三个等腰三角形

(3) 当  $\alpha = 18^\circ$  时, 有四个等腰三角形

(4) 当  $\alpha = 22.5^\circ$  或  $45^\circ$  时, 有五个等腰三角形

【解答】首先很容易证明  $\triangle C'AB$  为等腰三角形, 其次由于

$C'M = CM = BM \Rightarrow \triangle MC'B$  为等腰三角形。  $\begin{cases} CC' \perp NM \\ CC' \perp BC' \end{cases} \Rightarrow BC' \parallel NM$ 。由于

$\triangle MC'B$  为等腰三角形, 很容易证明  $\triangle C'FM$  也是等腰三角形。所以这个图形中

至少有三个等腰三角形。接下来开始导角, 设  $\angle BAC' = \alpha$ , 则

$$\angle AC'P = \angle BC'P = \angle C'AE = \angle MBC' = \angle MC'B = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle C'MB = \angle FC'M = 2\alpha, \angle AEC' = \angle EC'F = \angle D'EN = 90^\circ - 2\alpha。最后就是讨$$

论: ①当  $\triangle PAC', \triangle PBC'$  为等腰直角三角形时, 此时  $\alpha = 45^\circ$ ; ②当  $\triangle D'EN$  为等

腰直角三角形时, 此时  $\alpha = 22.5^\circ$ ; ③当  $\triangle AEC'$  为等腰三角形时, 由于

$$\begin{cases} \angle EAC' = 90^\circ - \alpha \\ \angle AEC' = 90^\circ - 2\alpha, \text{ 所以此时有两种可能: 若 } \angle EAC' = \angle AC'E \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ; \\ \angle AC'E = 3\alpha \end{cases}$$

若  $\angle AEC' = \angle AC'E \Rightarrow \alpha = 18^\circ$ 。综上所述，得到上面的结论。