

第十三届“中环杯”中小学生思维能力训练活动  
六年级选拔赛答案

1. 答: 0.1

【解答】令  $2.35+1.34+5.21=A, 1.98+6.91=B$ , 则

$$\begin{aligned}
 & (2.35+1.34+5.21) \times (1.98+6.91+10) - (2.35+1.34+5.21+10) \times (1.98+6.91) \\
 &= A \times (B+10) - (A+10) \times B \\
 &= AB+10A-AB-10B \\
 &= 10(A-B) \\
 &= 10 \times [(2.35+1.34+5.21)-(1.98+6.91)] \\
 &= 10 \times 0.01 = 0.1
 \end{aligned}$$

2. 答: 2

【解答】利用带余除法的性质, 我们可以设  $n=76q+21$ , 所以

$$n=19 \cdot 4q+21=19 \cdot 4q+19+2=19(4q+1)+2, \text{ 从而我们得 } n \text{ 除以 } 19 \text{ 的余数为 } 2$$

3. 答: 1789

【解答】设王先生买了  $x$  本书, 则  $x+\left[\frac{x}{8}\right]=2012$ 。而  $\frac{x}{8}-1 < \left[\frac{x}{8}\right] \leq \frac{x}{8}$ , 所以

$$x+\frac{x}{8}-1 < 2012 \leq x+\left[\frac{x}{8}\right] \leq x+\frac{x}{8} \Rightarrow 2012 \leq \frac{9}{8}x < 2013 \Rightarrow 1788.4 < x \leq 1788.8, \text{ 所以}$$

$$x=1789$$

4. 答: 28

【解答】由于只有3,4,5号小球才能出现7个号码相同的情况, 所以将3,4,5这三种号码看成三个抽屉。要保证有一个抽屉中至少有7件物品, 根据抽屉原理, 至少要有  $6 \times 3 + 1 = 19$  (件) 物品。然后再加上编号为1,2的小球数量, 一共需要  $19 + 3 + 6 = 28$

5. 答:  $1800^\circ$ 【解答】发现, 蚂蚁共走过了10个半圆, 即走过了  $10 \times 180^\circ = 1800^\circ$ 

6. 答: 60

【解答】简单的连比问题。写出比例关系: 一班二班三班之间的连比为4:5:6。所以可以设一班取走了  $4k$  本, 二班取走了  $5k$  本, 三班取走了  $6k$  本。所以  $4k+5k+6k=225 \Rightarrow k=15$ , 所以最后一班一共取走了  $4k=4 \times 15=60$  本

7.答: 0 或 3

【解答】容易知道  $4k+1, 4k+3$  型的正整数, 它们的平方除以 4 余 1。对于  $4k, 4k+2$  型的正整数, 其中是素数的只有 2。所以本题要分类讨论: (1) 当  $p_1, p_2, \dots, p_{2012}$  中包含 2, 则最后的余数为 3; (2) 当  $p_1, p_2, \dots, p_{2012}$  中不包含 2, 则最后的余数为 0

8.答: =

【解答】先看左边部分, 找通项公式,

$$\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \quad \text{所以}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right)} + \cdots + \frac{\frac{1}{2012}}{\left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{1}{2012}\right)} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2013}\right) \end{aligned}$$

然后看右边, 找通项公式,

$$\frac{1+2+\cdots+n}{1^3+2^3+\cdots+n^3} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \quad \text{所以}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+2}{1^3+2^3} + \frac{1+2+3}{1^3+2^3+3^3} + \cdots + \frac{1+2+\cdots+2012}{1^3+2^3+\cdots+2012^3} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2013}\right) \end{aligned}$$

所以最后两边相等

9.答: (1)  $\frac{120^{2n}}{14399^n}$  (也可以写成  $\frac{14400^n}{14399^n}$  或者  $\left(\frac{14400}{14399}\right)^n$ ); (2) 可能

【解答】

(1) 由于第 1 只手表比标准时间每小时快 30 秒, 所以标准时间过 1 小时, 第 1 只手表走了

$\frac{3600+30}{3600} = \frac{121}{120}$  (小时)。而第2只手表比第1只手表每小时慢30秒, 所以第1只手表走1

小时, 第2只手表走了  $\frac{3600-30}{3600} = \frac{199}{120}$  (小时)。从而推出标准时间过1小时, 第2只手表

走了  $\frac{199}{120} \times \frac{121}{120} = \frac{120}{120}$ ; 继续这样的推导, 标准时间过1小时, 第4只手表走了

$\left(\frac{120^2-1}{120^2}\right)^2$  小时; ……; 标准时间过1小时, 第 $2n$ 只手表走了  $\left(\frac{120^2-1}{120^2}\right)^n$  小时。所以当

第 $2n$ 只手表走了1小时, 标准时间过了  $\frac{120^{2n}}{14399^n}$  小时。

(2) 由于  $\left(\frac{14400}{14399}\right)^n$  中底数比1大, 所以可能出现前面描述的情况

10. 答: 189

【解答】由于  $\frac{q}{p}$  可以化为纯循环小数, 所以  $p$  没有2、5这两个素因数。而  $p$  有8个因数,

所以  $p$  的素因数分解的式子可以是: (1)  $a^7$  (最小为  $3^7$ ); (2)  $a^3b$  (最小为  $3^3 \times 7$ ); (3)

$abc$  (最小为  $3 \times 7 \times 11$ ); 综上所述,  $p$  最小为 189

11. 答: 21

【解答】第一步: 安排第二次接球者, 甲、乙、丙、丁均有可能, 共有4种方法。

第二步: 安排第一次和第三次接球者, 当第二次接球者选甲时, 第一、三次接球者的安排方法有  $3 + A_3^2 = 3 + 3 \times 2 = 9$  种, 当第二次接球者选乙、丙、丁之一时, 第一、三次接球者的安排方法共有  $C_3^1(2 + A_2^2) = 3 \times (2 + 2) = 12$  种方法

综上可知, 第四次仍传回到甲的方法共有  $9 + 12 = 21$  种方法。

12. 答: 3:2

【解答】因为  $A$  两胜, 而  $C$  有一场踢平, 所以必定只能是与  $B$  踢平。  $A$  胜了  $B$ , 所以在  $A$  与  $B$  的比赛中,  $A$  的失球数一定少于进球数。假设  $A$  没有失球, 则  $B$  的4个进球都是在与  $C$  的比赛中进的。又  $B$  与  $C$  踢平, 所以  $C$  也进了4球, 与  $C$  进2球矛盾, 故假设不成立。同理,  $A$  在与  $B$  的比赛中失1球也不成立。所以得出  $A$  在与  $B$  的比赛中失2球。于是  $A$  在与  $C$  的比赛中没有失球。则  $C$  的2个进球都是在与  $B$  的比赛中进的。所以  $B$  在与  $A$  的比赛中失了  $5 - 2 = 3$  (球)。于是  $A$  与  $B$  两队间的比分是 3:2。

13. 答: 58%

【解答】设盐水  $A$  的为  $x$  克, 盐水  $B$  的为  $y$  克, 盐水  $C$  的为  $z$  克。由于“将  $A, B$  混合在一

起，那么得到的新的盐水浓度为 50%”，我们得到式子  $\frac{40\%x + 60\%y}{x + y} = 50\% \Rightarrow x = y$ ；

由于“B,C 混合在一起，那么得到的新的盐水浓度为 70%”，我们得到式子

$$\frac{60\%y + 90\%z}{y + z} = 70\% \Rightarrow y = 2z。综上所述 x = y = 2z。将三个全部混合在一起，新盐水$$

$$\text{的浓度为} \frac{40\%x + 60\%y + 90\%z}{x + y + z} = \frac{40\% \cdot 2z + 60\% \cdot 2z + 90\%z}{2z + 2z + z} = 58\%。由于“无论将多$$

少盐水 D 放入 A,B,C 的混合盐水中，盐水的浓度都不变”，所以盐水 D 的浓度就是 58%

14. 答：7

【解答】根据题意列出方程  $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{2012}$ ，所以本题考查的就是单位分数的拆分。我们应

该取  $2012 = 2^2 \times 503$  的不同的因数  $m, n$ 。则

$$\frac{1}{2012} = \frac{m}{2012 \times (m+n)} + \frac{n}{2012 \times (m+n)} = \frac{1}{\frac{2012}{m} \times (m+n)} + \frac{1}{\frac{2012}{n} \times (m+n)}。利用数论的知识，我$$

们知道  $2012 = 2^2 \times 503$  的因数个数一共有 6 个。考虑到  $A < B$ ，所以所选的因数  $m \neq n$ 。

满足的组合  $(m, n)$  有  $(1, 2)$ ， $(1, 4)$ ， $(1, 503)$ ， $(1, 1006)$ ， $(1, 2012)$ ， $(2, 4)$ ， $(2, 503)$ ，

$(2, 1006)$ ， $(2, 2012)$ ， $(4, 503)$ ， $(4, 1006)$ ， $(4, 2012)$ ， $(503, 1006)$ ， $(503, 2012)$ ，

$(1006, 2012)$ 。容易知道如果两组因数它们的比值相同，那么其实对应于同一种拆分，所

以最后有效地组合就是  $(1, 2)$ ， $(1, 4)$ ， $(1, 503)$ ， $(1, 1006)$ ， $(1, 2012)$ ， $(2, 503)$ ， $(4, 503)$ ，

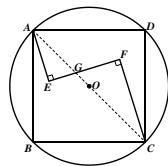
一共七组

15. 答：  $\frac{225}{4}\pi$

【解答】由于  $\angle ABC = 90^\circ$ ，所以 AC 过圆心 O。设 AC 与 EF 相交于点 G，利用相似模型我们知道  $\frac{EG}{GF} = \frac{AE}{FC} = \frac{1}{2}$ ，而  $EG + GF = EF = 9$ ，从而推出  $EG = 3, GF = 6$ 。利用勾股定理我

们知道  $AG^2 = AE^2 + EG^2 \Rightarrow AG = 5$ ，同理可以推出  $CG = 10$ ，所以圆的直径为  $AC = 15$ ，

所以圆的面积为  $\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4}\pi \times 225 = \frac{225}{4}\pi$



16.答: 2013

$$\underbrace{66\cdots6}_{2012\text{个}6} \times \underbrace{44\cdots4}_{2012\text{个}4}$$

$$= \underbrace{33\cdots3}_{2012\text{个}3} \times \underbrace{88\cdots8}_{2012\text{个}8}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left( \underbrace{99\cdots9}_{2012\text{个}9} \times \underbrace{88\cdots8}_{2012\text{个}8} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[ (10^{2012} - 1) \times \underbrace{88\cdots8}_{2012\text{个}8} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \left( \underbrace{88\cdots800\cdots0}_{2012\text{个}8 \quad 2012\text{个}0} - \underbrace{88\cdots8}_{2012\text{个}8} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \underbrace{88\cdots8711\cdots12}_{2011\text{个}8 \quad 2011\text{个}1}$$

容易知道  $888 \div 3 = 296$ ，所以  $\underbrace{88\cdots8}_{201\text{个}8} \div 3 = \underbrace{296}_{6\text{个}0296}$ 。而  $111 \div 3 = 037$ ，所以

$$\underbrace{11\cdots12}_{2011\text{个}1} \div 3 = \underbrace{037037\cdots037}_{670\text{个}037}04，\text{所以最后}$$

$$\underbrace{66\cdots6}_{2012\text{个}6} \times \underbrace{44\cdots4}_{2012\text{个}4} = \underbrace{296\cdots296}_{670\text{个}296} \underbrace{29037037\cdots03704}_{670\text{个}037}。\text{总共有 } 2 \times 670 + 1 + 1 \times 670 + 2 = 2013$$

个偶数数字

17.答: 6150 个

【解答】设这个六位数是  $\overline{ABCDEF}$ ，

$$\text{则} \begin{cases} A+B+C = D+E+F \\ A+C+E = B+D+F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=E \\ A+C = D+F \end{cases}$$

分成18组（先不考虑  $B, E$ ）:

第一组: 当  $A+C=1$  时,  $A, C$  有1种选择  $(1, 0)$ ;  $D, F$  有2种选择  $(1, 0), (0, 1)$ ; 共有

$$1 \times 2 = 2 \text{ 种}$$

第二组: 当  $A+C=2$  时,  $A, C$  有2种选择  $(1, 1), (2, 0)$ ;  $D, F$  有3种选择  $(1, 1), (2, 0),$

$(0, 2)$ ; 共有  $2 \times 3 = 6$  种

第三组: 当  $A+C=3$  时, 共有  $3 \times 4 = 12$  种

第四组: 当  $A+C=4$  时, 共有  $4 \times 5 = 20$  种

第五组: 当  $A+C=5$  时, 共有  $5 \times 6 = 30$  种

第六组: 当  $A+C=6$  时, 共有  $6 \times 7 = 42$  种

第七组：当  $A+C=7$  时，共有  $7 \times 8 = 56$  种

第八组：当  $A+C=8$  时，共有  $8 \times 9 = 72$  种

第九组：当  $A+C=9$  时，共有  $9 \times 10 = 90$  种

第十组：当  $A+C=10$  时，此时不能有 0 参与， $A, C$  有 9 种选择  $(1,9)$ 、 $(2,8)$ 、 $(3,7)$ 、 $(4,6)$ 、 $(5,5)$ 、 $(6,4)$ 、 $(7,3)$ 、 $(8,2)$ 、 $(9,1)$ ； $D, F$  有 9 种选择  $(1,9)$ 、 $(2,8)$ 、 $(3,7)$ 、 $(4,6)$ 、 $(5,5)$ 、 $(6,4)$ 、 $(7,3)$ 、 $(8,2)$ 、 $(9,1)$ ；共有  $9 \times 9 = 81$  种

第十一组：当  $A+C=11$  时，共有  $8 \times 8 = 64$  种

第十二组：当  $A+C=12$  时，共有  $7 \times 7 = 49$  种

第十三组：当  $A+C=13$  时，共有  $6 \times 6 = 36$  种

第十四组：当  $A+C=14$  时，共有  $5 \times 5 = 25$  种

第十五组：当  $A+C=15$  时，共有  $4 \times 4 = 16$  种

第十六组：当  $A+C=16$  时，共有  $3 \times 3 = 9$  种

第十七组：当  $A+C=17$  时，共有  $2 \times 2 = 4$  种

第十八组：当  $A+C=18$  时，共有  $1 \times 1 = 1$  种

18. 答： $6\text{cm}^2$

【解答】延长  $FO$  并延长交  $AB$  的延长线于点  $H$ 。容易知道  $\frac{FD}{BH} = \frac{DO}{OB} = 1$ 。由于

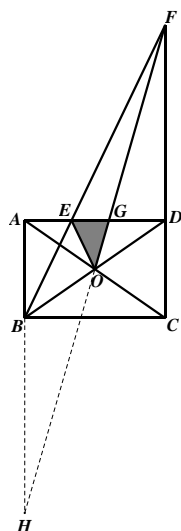
$DE=2AE$ ，所以  $DE=10\text{cm}=AE$ 。而由相似模型我们知道

$\frac{FD}{AB} = \frac{DE}{EA} = 2 \Rightarrow FD = 2AB = 12\text{cm}$ 。从而由  $\frac{FD}{BH} = 1 \Rightarrow BH = FD = 12\text{cm}$ 。而

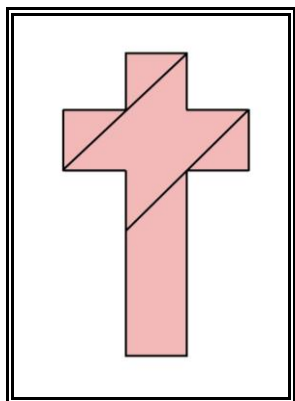
$\frac{AG}{GD} = \frac{AH}{HD} = \frac{AG+AB}{BD} = \frac{6+12}{12} = 2$ ，所以可以推出  $AG=9\text{cm}$ ， $GD=6\text{cm}$ ，所

以  $EG=AG-AE=9-5=4\text{cm}$ 。容易知道  $\triangle OEG$  的边  $GE$  上的高为  $3\text{cm}$ ，所以

$$S_{\triangle OEG} = \frac{1}{2} GE \cdot h = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6\text{cm}^2$$



19. 【解答】



20. 【答案】当  $n = 0, 1, 2$  时，有 0 种染色方法；当  $n \geq 3$  时，有  $n(n-1)^3(n-2)^2$  种

【解答】首先要分类，当  $n = 0, 1, 2$  时，不存在这样的染色方法；然后当  $n \geq 3$  时，先讨论  $D$ ，它有  $n$  四种选择；然后看  $A$ ，有  $n-1$  三种选择；然后看  $B$ ，有  $n-2$  两种选择；然后看  $C$ ，有  $n-2$  种选择；然后看  $E$ ，有  $n-1$  种选择；然后看  $F$ ，有  $n-1$  种选择；所以根据乘法原理，一共  $n(n-1)^3(n-2)^2$  种不同的染色方法.