

第十三届“中环杯”中小学生思维能力训练活动  
八年级选拔赛答案

1. 答:  $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$

【解答】利用有理化因式的方法，分母的有理化因式为  $\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ，所以

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6} \times (\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{6} \times (\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

2. 答:  $P(-2, 4)$

3. 答:  $a^3 - a^2b - (b-c)a + b^2 - bc = (b-a)(b-a^2-c)$

【解答】

$$a^3 - a^2b - (b-c)a + b^2 - bc = b^2 - (a^2 + a + c)b + a^3 + ac = (b-a)(b-a^2-c)$$

4. 答: 14

【解答】由已知得  $4x_1 - 1 = x_1^2$ ，故  $\frac{1}{4x_1 - 1} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2}$ 。由韦达定理我们有  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 = 14$ ， $x_1^2 x_2^2 = 1$ 。所以所求式 = 14

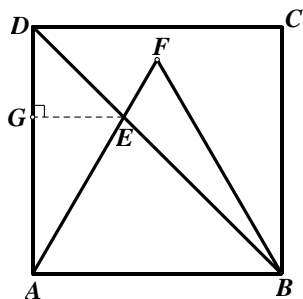
5. 答: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 593

【解答】

$$\begin{aligned} 77^{2009} + 77^{2010} + 77^{2011} + 77^{2012} &= 77^{2009} (1 + 77 + 77^2 + 77^3) \\ &= 7^{2009} \times 11^{2009} \times 462540 \\ &= 7^{2009} \times 11^{2009} \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 593 \end{aligned}$$

6. 答:  $4 + 2\sqrt{3}$

【解答】 $EG = 1, AG = \sqrt{3}$ ，容易知道  $\triangle DGE$  为等腰直角三角形，所以  $DG = GE = 1$ ，所以边长为  $\sqrt{3} + 1$ ，所以面积就是  $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$



7.答:4对

【解答】容易知道上底  $BC=5$ ，下底  $AD=a$ ，高为  $b$ ，所以

$$\frac{1}{2}(a+5)b=121 \Rightarrow (a+5)b=242=2 \times 11^2. \text{ 因为 } a+5 > 5, \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} a+5=11 \\ b=22 \end{cases}, \begin{cases} a+5=22 \\ b=11 \end{cases}, \begin{cases} a+5=121 \\ b=2 \end{cases}, \begin{cases} a+5=242 \\ b=1 \end{cases}, \text{ 一共有4对}$$

8.答:113

$$\text{【解答】 } BX^2 - AX^2 = BF^2 - AF^2 = CB^2 - CA^2 \Rightarrow BX^2 + CA^2 = CB^2 + AX^2 = 113$$

9.答:3

【解答】

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y + z} = \frac{z^2 + 2yz}{x^2 + 2xy + y^2} = 1 \Rightarrow \frac{z^2 + 2yz}{x + y + z} = 1,$$

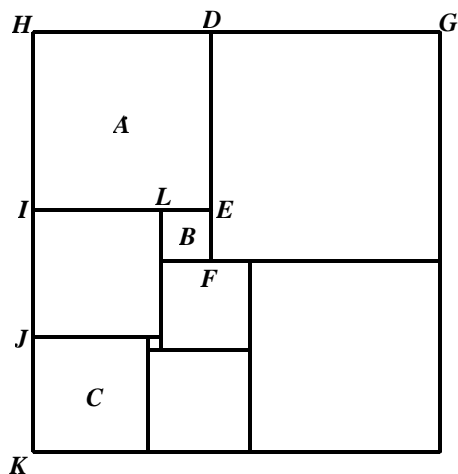
$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y + z} = \frac{z^2 + 2yz}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{2xz}{z^2 + 2yz} = 1 \Rightarrow \frac{2xz}{x + y + z} = 1, \text{ 从而我们有}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y + z} = 1 \\ \frac{z^2 + 2yz}{x + y + z} = 1 \\ \frac{2xz}{x + y + z} = 1 \end{cases}, \text{ 三个式子相加得 } \frac{(x + y + z)^2}{x + y + z} = x + y + z = 3$$

10.答:1056cm<sup>2</sup>

【解答】  $S_A = 196\text{cm}^2 \Rightarrow HD = HI = 14\text{cm}$ ， $S_B = 16\text{cm}^2 \Rightarrow LE = EF = 4\text{cm}$ ，所以  
 $DG = DF = DE + EF = 14 + 4 = 18\text{cm}$ ，所以矩形的长  $HG + HD + DG = 14 + 18 = 32\text{cm}$ 。  
 其  $IJ = IL = IE - LE = 14 - 4 = 10\text{cm}$ ，所以矩形的宽为

$$HK = HI + IJ + JK = 14 + 10 + 9 = 33\text{cm}, \text{ 所以面积为 } HK \times HG = 33 \times 32 = 1056\text{cm}^2$$



11.答:&gt;

【解答】先算  $\sqrt{\underbrace{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\cdots}}}_{\text{无穷多个20}}}$ ，令  $x = \sqrt{\underbrace{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\cdots}}}_{\text{无穷多个20}}}$ ，则

$$x^2 = 20 + x \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 5, \text{ 所以}$$

$$\sqrt{\underbrace{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\cdots}}}_{\text{无穷多个20}}} = \sqrt{5}。 \text{再来算 } \sqrt[3]{\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}} - \sqrt[3]{17\sqrt{2}+9\sqrt{3}+7}。 \text{容}$$

易知道  $\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$ ，对于  $\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}$ ，可以猜测其为

$$\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}, \text{ 通过比较系数可以发现 } \sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \text{ 所以}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}} - \sqrt[3]{17\sqrt{2}+9\sqrt{3}+7} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 7} = \sqrt[3]{9}。 \text{最}$$

后只要比较  $\sqrt{5}$  与  $\sqrt[3]{9}$  的大小即可。显然  $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 125^{\frac{1}{6}}$ ，而  $\sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}} = 81^{\frac{1}{6}}$ ，所以  $\sqrt{5} > \sqrt[3]{9}$

12.答:48

【解答】 $\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc} = 1111(a+b+c+d) = 31108 \Rightarrow a+b+c+d = 28$ ，

由于四个数字都不相同，若最大的为8，则  $5+6+7+8=26 < 28$ 。所以最大的应该为9。同样的道理，如果不取8，最大只能是  $5+6+7+9=27 < 28$ ，也不满足要求，所以必须取6。

接下来尝试一下就发现有两种组合： $(4,7,8,9), (5,6,8,9)$ 。每种组合有  $4! = 24$  个，所以一共有48个

13.答:  $m \leq -7$  或  $-\frac{5}{4} \leq m < 9$ 

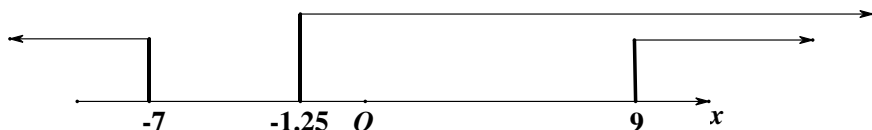
【解答】先求方程  $(m^2-1)x^2 + (2m+1)x + 1 = 0$  有实数根的条件： $m = \pm 1$  或

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 4 = 4m + 5 \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{5}{4}。 \text{所以第一个方程有实数根的条件就是}$$

$$m \geq -\frac{5}{4}； \text{然后求方程 } 2x^2 + (m-1)x + 8 = 0 \text{ 有实数根的条件，显然}$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 64 \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 8 \text{ 或 } m-1 \leq -8, \text{ 所以第二个方程有实数根的条件就是 } m \geq 9$$

或  $m \leq -7$ 。然后画数轴，从而知道当  $m \leq -7$  或  $-\frac{5}{4} \leq m < 9$  时，有且只有一个方程有实数根

14.答:  $MN = \frac{7}{2}$ 

【解答】如下图，延长  $ED, MG$  相交于点  $I$ ，延长  $EF, NH$  相交于点  $J$ ，容易证明

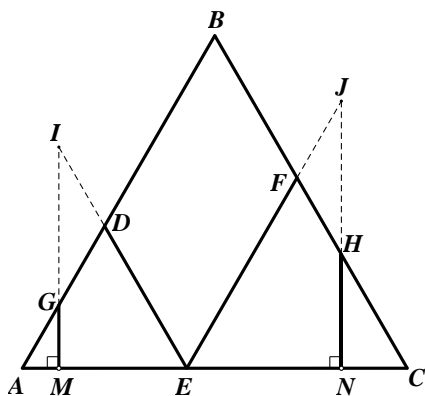
$\triangle DAE, \triangle FEC$  都是等边三角形，且  $\triangle DIG, \triangle FJH$  都是顶角为  $120^\circ$  的等腰三角形，所以

$$\begin{cases} ME = \frac{1}{2}EI = \frac{1}{2}(ED + DI) = \frac{1}{2}(ED + DG) \\ NE = \frac{1}{2}EJ = \frac{1}{2}(EF + FJ) = \frac{1}{2}(EF + FH) \end{cases}, \text{ 所以}$$

$$MN = ME + NE = \frac{1}{2}(ED + DG) + \frac{1}{2}(EF + FH) = \frac{1}{2}(ED + EF + DG + FH). \text{ 容易证明}$$

$$ED + EF = EA + EC = AC, \text{ 所以}$$

$$MN = \frac{1}{2}(ED + EF + DG + FH) = \frac{1}{2}(AC + DG + FH) = \frac{7}{2}$$



15. 答:  $x_1 = 4, x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$

【解答】首先  $x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$  或  $x \leq 0$

(1) 当  $x \geq 4$  时,  $|x - |x - |x - 4|| = |x - |x - (x - 4)|| = |x - 4| = x - 4$ , 所以

$x - 4 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$  或  $1$ 。而只有  $x = 4$  符合  $x \geq 4$  这个大前提, 所以  $x_1 = 4$  是原方程的解

(2) 当  $x \leq 0$  时,

$|x - |x - |x - 4|| = |x - |x - (4 - x)|| = |x - |2x - 4|| = |x - (4 - 2x)| = |3x - 4| = 4 - 3x$ , 所以

$4 - 3x = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ 。由于只有  $x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$  符合  $x \leq 0$  这个大前提,

所以  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$  是原方程的解

综上所述,  $x_1 = 4, x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$  为方程的解

16. 答: 8

【解答】设三个圆的半径从小到大为  $a, b, c (a < b < c)$ , 设编号为  $i$  的图形的面积为

$S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 。由于编号为 1 的块面积相等, 所以  $\angle AOB = \angle COB$ 。设

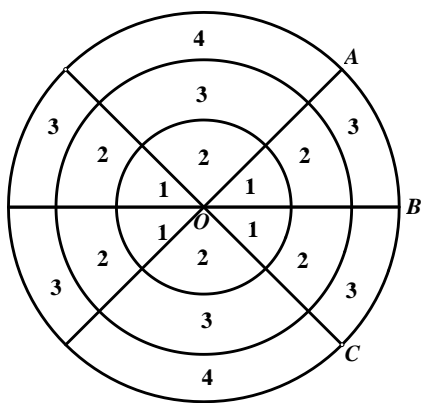
$\angle AOB = \angle COB = \alpha$ ，所以  $S_1 = \frac{\alpha}{360} \pi a^2$ 。由于“编号为2的块的面积是编号为3的块的面积的一半”，而  $S_3 = \frac{180-2\alpha}{360} \pi (b^2 - a^2)$ ， $S_2 = \frac{\alpha}{360} \pi (b^2 - a^2)$ ，所以

$$\frac{180-2\alpha}{360} \pi (b^2 - a^2) = \frac{2\alpha}{360} \pi (b^2 - a^2) \Rightarrow \alpha = 45^\circ。由于编号为2的块的面积相等，所以$$

$$\frac{90}{360} \pi a^2 = \frac{45}{360} \pi (b^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 3a^2。由于编号为3的块的面积相等，所以$$

$$\frac{90}{360} \pi (b^2 - a^2) = \frac{45}{360} \pi (c^2 - b^2) \Rightarrow c^2 = 3b^2 - 2a^2 = 7a^2。所以$$

$$S_4 = \frac{90}{360} \pi (c^2 - b^2) = \frac{90}{360} \pi \cdot 4a^2，而 S_1 = \frac{45}{360} \pi a^2，所以 S_4 = 8S_1$$



17. 答:  $c = 12 + 2\sqrt{59}$

【解答】我们知道  $x^3 - 4x^2 + 6x + c = (x-r)(x-s)(x-t)$ ，展开后比较得

$$\begin{cases} r+s+t=4 \\ rs+rt+st=6, \text{ 所以 } r^2+s^2+t^2=(r+s+t)^2-2(rs+st+tr)=4。从而我们有 \\ rst=-c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2+s^2} + \frac{1}{s^2+t^2} + \frac{1}{t^2+r^2} &= \frac{1}{4-t^2} + \frac{1}{4-r^2} + \frac{1}{4-s^2} \\ &= \frac{(4-r^2)(4-s^2) + (4-t^2)(4-s^2) + (4-t^2)(4-r^2)}{(4-t^2)(4-r^2)(4-s^2)} \\ &= \frac{48 - 8(r^2+s^2+t^2) + (r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2)}{64 - 16(r^2+s^2+t^2) + 4(r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2) - r^2s^2t^2} \\ &= \frac{48 - 8 \times 4 + (r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2)}{64 - 16 \times 4 + 4(r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2) - c^2} \\ &= \frac{16 + (r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2)}{4(r^2s^2+s^2t^2+t^2r^2) - c^2} \end{aligned}$$

容易知道  $r^2s^2 + s^2t^2 + t^2r^2 = (rs + st + tr)^2 - 2rst(r + s + t) = 36 + 8c$ ，代入后得

$$\frac{16 + (r^2s^2 + s^2t^2 + t^2r^2)}{4(r^2s^2 + s^2t^2 + t^2r^2) - c^2} = \frac{16 + (36 + 8c)}{4 \cdot (36 + 8c) - c^2} = \frac{52 + 8c}{144 + 32c - c^2} = 1, \text{ 所以}$$

$$c^2 - 24c - 92 = 0 \Rightarrow c = 12 \pm 2\sqrt{59}. \text{ 由于 } c > 0, \text{ 所以 } c = 12 + 2\sqrt{59}$$

18. 答:  $\frac{2012}{2011}$

【解答】一次操作后，两个自然数  $x, y$  变成一个数

$$z = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{xy + (1-x)(1-y)}{xy} = 1 + \frac{(1-x)(1-y)}{xy}, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{z} - 1 = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} = \left(\frac{1-x}{x}\right)\left(\frac{1-y}{y}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right). \text{ 经过 2010 次操作，最后的一个数}$$

设为  $k$ ，则

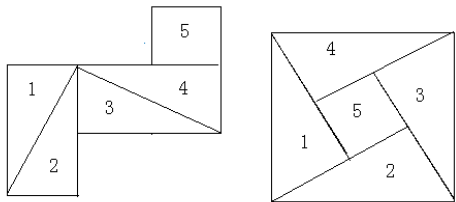
$$\frac{1}{k} - 1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2012} - 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2011}{2012}\right)$$

$$= -\frac{1}{2012}$$

$$\text{所以 } k = \frac{2012}{2011}$$

19. 答:



20. 答:  $\frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}$

【解答】设正方形的边长为  $a$ ，并设  $\frac{CE}{CB} = k$ ，则  $CE = ka, BE = (1-k)a$ 。容易证明

$\triangle DAF \cong \triangle DC'F$ ，而  $F$  为  $AB$  中点，所以  $FC' = FA = \frac{a}{2}$ ，从而推出

$$FE = FC' + C'E = FA + CE = \frac{a}{2} + ka. \text{ 在 } Rt\triangle FBE \text{ 中,}$$

$$BF^2 + BE^2 = EF^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (1-k)^2 a^2 = \left(\frac{a}{2} + ka\right)^2, \text{ 从而推出}$$

$$\frac{1}{4} + k^2 - 2k + 1 = \frac{1}{4} + k + k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}$$