

5.2 图形的相似

班级_____ 姓名_____

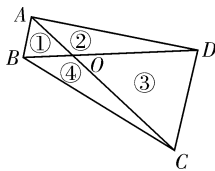
一、选择题

1. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 相似比为 3, 且 $\triangle ABC$ 的周长为 18, 则 $\triangle DEF$ 的周长为().

A. 2 B. 3 C. 6 D. 54

2. 如图, 四边形 $ABCD$ 中的对角线 AC 、 BD 相交于 O , 且将这个四边形分成①②③④四个三角形. 若 $OA : OC = OB : OD$, 则下列结论中一定正确的是().

A. ①与②相似 B. ①与③相似
C. ①与④相似 D. ②与④相似

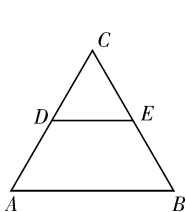


(第 2 题)

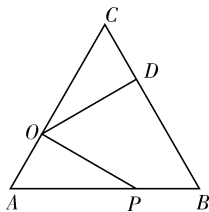
3. 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 2, DE 是它的中位线, 则下面四个

结论: ① $DE=1$; ②边 AB 上的高为 $\sqrt{3}$; ③ $\triangle CDE \sim \triangle CAB$; ④ $\triangle CDE$ 的面积与 $\triangle CAB$ 面积之比为 $1:4$. 其中正确的有().

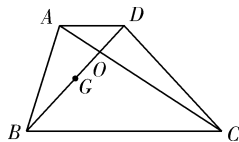
A. 1 个 B. 1 个 C. 3 个 D. 4 个



(第 3 题)



(第 4 题)



(第 5 题)

4. 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AC=9$, 点 O 在 AC 上, 且 $AO=3$, 点 P 是 AB 上的一个动点, 连接 OP , 将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 60° , 得到线段 OD , 要使点 D 恰好落在边 BC 上, 则 AP 的长为().

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

5. 如图, 梯形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , G 是 BD 的中点. 若 $AD=3$, $BC=9$, 则 $GO : BG$ 等于().

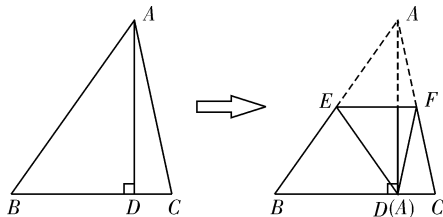
A. $1:2$ B. $1:3$ C. $2:3$ D. $11:20$

6. 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , M 、 N 分别是边 AB 、 AD 的中点, 连接 OM 、 ON 、 MN , 则下列叙述中正确的是().

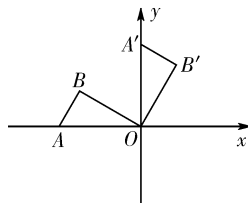
A. $\triangle AOM$ 和 $\triangle AON$ 都是等边三角形
B. 四边形 $MBON$ 和四边形 $MODN$ 都是菱形
C. 四边形 $AMON$ 与四边形 $ABCD$ 是位似图形
D. 四边形 $MBCO$ 和四边形 $NDCO$ 都是等腰梯形

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=12$, $AC=10$, $BC=9$, AD 是边 BC 上的高. 将 $\triangle ABC$ 按如图所示的方式折叠, 使点 A 与点 D 重合, 折痕为 EF , 则 $\triangle DEF$ 的周长为().

A. 9.5 B. 10.5 C. 11 D. 15.5



(第 7 题)



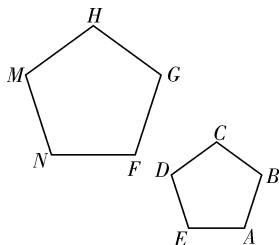
(第 8 题)

8. 如图,将放置于平面直角坐标系中的三角板 AOB 绕点 O 顺时针旋转 90° 得 $\triangle A'OB'$. 已知 $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 1$, 则点 B' 的坐标为().

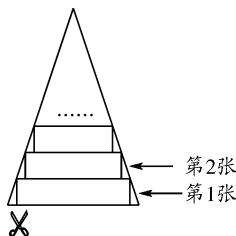
- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

9. 如图,正五边形 $FGHMN$ 是由正五边形 $ABCDE$ 经过位似变换得到的,若 $AB : FG = 2 : 3$, 则下列结论中正确的是().

- A. $2DE = 3MN$ B. $3DE = 2MN$
C. $3\angle A = 2\angle F$ D. $2\angle A = 3\angle F$



(第 9 题)



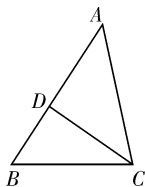
(第 10 题)

10. 一张等腰三角形纸片,底边长 15 cm,底边上的高为 22.5 cm. 现沿底边依次从下往上裁剪宽度均为 3 cm 的矩形纸条,如图所示. 已知剪得的纸条中有一张是正方形,则这张正方形纸条是().

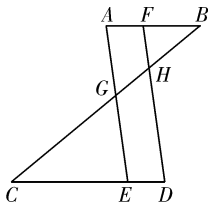
- A. 第 4 张 B. 第 5 张 C. 第 6 张 D. 第 7 张

二、填空题

11. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AB 上一点,连接 CD ,要使 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ACB$ 相似,应添加的条件是_____.



(第 11 题)

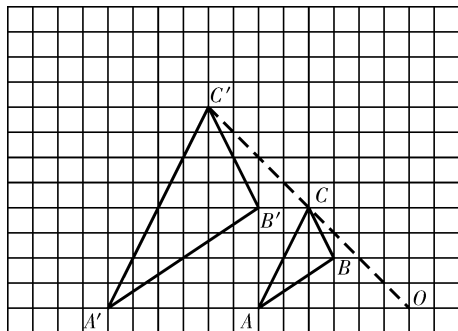


(第 12 题)

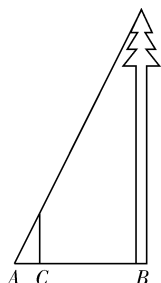
12. 如图, $AB \parallel CD$, $AE \parallel DF$, AE , FD 分别交 BC 于点 G , H , 则图中相似三角形共有_____对. (不添加其他辅助线)

13. 一般说,当一个人脚到肚脐的距离与身高的比约为 0.618 时是比较好看的黄金身段. 某人的身高为 1.7 m, 肚脐到脚的距离为 1 m, 她要穿一双凉鞋使“身材”达到黄金身段, 则所穿凉鞋的高度约为_____cm. (结果保留整数)

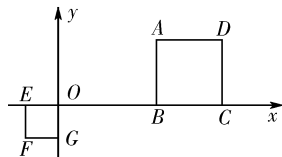
14. 如图,图中的小方格都是边长为 1 的正方形, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是关于点 O 为位似中心的位似图形,它们的顶点都在小正方形的顶点上. 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的位似比为_____.



(第 14 题)



(第 15 题)

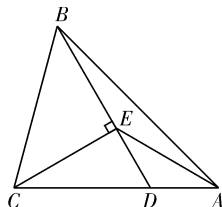


(第 16 题)

15. 如图,身高为 1.6 cm 的某学生想要测量一棵大树的高度,她沿着树影 BA 由 B 向 A 走去,当走到点 C 时,她的影子顶端正好与树的影子顶端重合,测得 $BC = 3.2$ m, $CA = 0.8$ m,则树的高度为_____.
16. 如图,在正方形 $ABCD$ 和正方形 $OEFG$ 中,点 A 和点 F 的坐标分别为 $(3, 2), (-1, -1)$, 则这两个正方形的位似中心的坐标是_____.

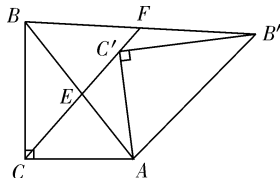
三、解答题

17. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 上一点, $CD = 2DA$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$, $CE \perp BD$, 垂足为 E , 连接 AE .
- (1) 写出图中一对相似三角形;(不要求证明)
- (2) 写出图中所有相等的线段,并加以证明.



(第 17 题)

18. 如图, $\text{Rt}\triangle AB'C'$ 是由 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到的, 连接 CC' 交斜边于点 E , CC' 的延长线交 BB' 于点 F .
- (1) 求证: $\triangle ACE \sim \triangle FBE$;
- (2) 设 $\angle ABC = \alpha$, $\angle CAC' = \beta$, 试探索当 α, β 满足什么关系时, $\triangle ACE$ 与 $\triangle FBE$ 是全等三角形, 并说明理由.

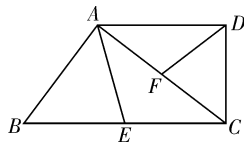


(第 18 题)

19. 如图,在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=90^\circ$, $AD \parallel BC$, 点 E 在边 BC 上, 点 F 在边 AC 上, $\angle DFC=\angle AEB$.

(1) 求证: $\triangle ADF \sim \triangle CAE$;

(2) 当 $AD=8$, $DC=6$, E 、 F 分别是 BC 、 AC 的中点时, 求直角梯形 $ABCD$ 的面积.



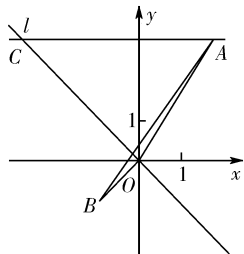
(第 19 题)

20. 如图, 在 $\triangle ABO$ 中, 已知点 $A(\sqrt{3}, 3)$, $B(-1, -1)$, $O(0, 0)$, 正比例函数 $y=-x$ 的图象是直线 l , 直线 $AC \parallel x$ 轴交直线 l 于点 C .

(1) 点 C 的坐标为 _____;

(2) 以点 O 为旋转中心, 将 $\triangle ABO$ 顺时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 使点 B 落在直线 l 上的对应点为 B' , 点 A' 的对应点为 A' , 得到 $\triangle A'OB'$. ① $\angle BOC =$ _____; ② 画出 $\triangle A'OB'$;

(3) 写出所有满足 $\triangle DOC \sim \triangle AOB$ 的点 D 的坐标.



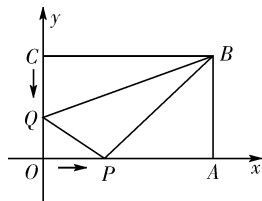
(第 20 题)

21. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的两边分别在 x 轴和 y 轴上, $OA=8\sqrt{2}$ cm, $OC=8$ cm, 现有两动点 P 、 Q 分别从点 O 、 C 同时出发, 点 P 在线段 OA 上沿 OA 方向以每秒 $\sqrt{2}$ cm 的速度匀速运动, 点 Q 在线段 CO 上沿 CO 方向以每秒 1 cm 的速度匀速运动. 设运动时间为 t 秒.

(1) 用含 t 的式子表示 $\triangle OPQ$ 的面积 S ;

(2) 求证: 四边形 $OPBQ$ 的面积是一个定值, 并求出这个定值;

(3) 当 $\triangle OPQ$ 与 $\triangle PAB$ 和 $\triangle QPB$ 相似时, 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 经过 B 、 P 两点, 过线段 BP 上一动点 M 作 y 轴的平行线交抛物线于点 N , 当线段 MN 的长取最大值时, 求直线 MN 把四边形 $OPBQ$ 分成两部分的面积之比.



(第 21 题)

5.2 图形的相似

1. C 2. B 3. D 4. B 5. A 6. C 7. D 8. A 9. B 10. C

11. $\angle ACD = \angle B$ 或 $\angle ADC = \angle ACB$ 或 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

12. 6 13. 13 14. $1:2$ 15. 8 m 16. (1, 0)

17. (1) $\triangle ADE$ 与 $\triangle AEC$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDC$.

(2) $AD = DE$, $BE = CE = AE$. 证明略.

18. (1) $\because$ Rt $\triangle AB'C'$ 是由 Rt $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到的,

$\therefore AC = AC'$, $AB = AB'$, $\angle CAB = \angle C'AB'$.

$\therefore \angle CAC' = \angle BAB'$.

$\therefore \angle ACC' = \angle ABB'$.

又 $\angle AEC = \angle FEB$,

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle FBE$.

(2) 当 $\beta = 2\alpha$ 时, $\triangle ACE \cong \triangle FBE$. 理由如下:

在 $\triangle ACC'$ 中,

$\because AC = AC'$,

$\therefore \angle ACC' = \frac{180^\circ - \angle CAC'}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \alpha$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中,

$\angle ACC' + \angle BCE = 90^\circ$, 即 $90^\circ - \alpha + \angle BCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE = \alpha$.

$\because \angle ABC = \alpha$,

$\therefore \angle ABC = \angle BCE$.

$\therefore CE = BE$.

由 (1) 知 $\triangle ACE \sim \triangle FBE$,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle FBE$.

19. (1) 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAF = \angle ACE$.

$\because \angle DFC = \angle AEB$, $\angle DFC = \angle DAF + \angle ADF$,

$\angle AEB = \angle ACE + \angle CAE$,

$\therefore \angle ADF = \angle CAE$.

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CAE$.

(2) $\because AD = 8$, $DC = 6$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore AC = 10$.

又 F 是 AC 的中点,

$\therefore AF = 5$.

$\because \triangle ADF \sim \triangle CAE$,

$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{CA}{CE}$.

$\therefore \frac{8}{5} = \frac{10}{CE}$.

$\therefore CE = \frac{25}{4}$.

$\because E$ 是 BC 的中点,

$\therefore BC = \frac{25}{2}$.

$\therefore$ 直角梯形 ABCD 的面积 $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{25}{2} + 8 \right) \times 6 = \frac{123}{2}$.

20. (1) (-3, 3)

(2) ① 90° ② 图略

(3) $D(9, -3\sqrt{3})$, $D_1(3\sqrt{3}, -9)$

21. (1) $\because CQ = t$, $OP = \sqrt{2}t$, $CO = 8$.

$\therefore OQ = 8 - t$.

$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} (8 - t) \cdot \sqrt{2}t = -\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + 4\sqrt{2}t (0 < t < 8)$.

(2) $\because S_{\text{四边形OPBQ}} = S_{\text{矩形ABCO}} - S_{\triangle PAB} - S_{\triangle CBQ} = 8 \times 8\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times t - \frac{1}{2} \times 8 \times (8\sqrt{2} - \sqrt{2}t) = 32\sqrt{2}$.

$\therefore$ 四边形 OPBQ 的面积为一个定值, 且定值为 $32\sqrt{2}$.

(3) 当 $\triangle OPQ$ 与 $\triangle PAB$ 和 $\triangle QPB$ 相似时, $\triangle QPB$ 必须是一个直角三角形, 依题意只能是 $\angle QPB = 90^\circ$.

又 BQ 与 AO 不平行,

$\therefore \angle QPO$ 不可能等于 $\angle PQB$, $\angle APB$ 不可能等于 $\angle PBQ$.

$\therefore$ 根据相似三角形的对应关系只能是 $\triangle OPQ \sim \triangle PBQ \sim \triangle ABP$.

$\therefore \frac{8-t}{8\sqrt{2}-\sqrt{2}t} = \frac{\sqrt{2}}{8}t$, 解得 $t = 4$.

经检验, $t = 4$ 是原方程的解且符合题意.

此时 $P(4\sqrt{2}, 0)$.

$\because B(8\sqrt{2}, 8)$ 且抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过 B、P 两点,

$\therefore$ 抛物线是 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2\sqrt{2}x + 8$, 直线 BP 是 $y = \sqrt{2}x - 8$.

设 $M(m, \sqrt{2}m - 8)$, $N\left(m, \frac{1}{4}m^2 - 2\sqrt{2}m + 8\right)$.

$\because$ 点 M 在 BP 上运动,

$\therefore 4\sqrt{2} \leq m \leq 8\sqrt{2}$.

$\because y_1 = \frac{1}{4}x^2 - 2\sqrt{2}x + 8$ 与 $y_2 = \sqrt{2}x - 8$ 交于 P、B 两点且抛物线的顶点是 P,

$\therefore$ 当 $4\sqrt{2} \leq m \leq 8\sqrt{2}$ 时, $y_1 < y_2$.

$\therefore |MN| = |y_1 - y_2| = -\frac{1}{4}(m - 6\sqrt{2})^2 + 2$.

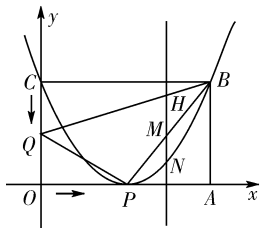
$\therefore$ 当 $m = 6\sqrt{2}$ 时, MN 的长有最大值 2.

设 MN 与 BQ 交于点 H, 则 $M(6\sqrt{2}, 4)$, $H(6\sqrt{2}, 7)$.

$\therefore S_{\triangle BHM} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

$\therefore S_{\triangle BHM} : S_{\text{五边形QPMH}} = 3\sqrt{2} : (32\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) = 3 : 29$.

∴ 当 MN 的长取最大值时, 两部分面积之比是 $3:29$.



(第 21 题)