

### 4月3日更新题目:

长度为  $L$  的一条木棍, 分别用红、蓝、黑线将它等分为 8、12 和 18 段, 在各划分线处将木棍锯开, 问一共可以得到多少段? 其中最短的一段的长是多少?

### 4月2日更新题目答案:

对于 155 个装有红、黄、蓝三种颜色球的盒子, 有三种分类方法: 对于每种颜色, 将该颜色的球数目相同的盒子归为一类. 若从 1 到 30 之间所有的自然数都是某种分类中一类的盒子数, 那么

(1) 三种分类的类数之和是多少?

(2) 说明, 可以找到三个盒子, 其中至少两种颜色的球, 它们的数目分别相同.

【解析】记第一种、第二种和第三种分类分别分了  $i, j, k$  类, 每类的盒子数目分别为  $a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_j, c_1, c_2, \dots, c_k$ , 令  $n = i + j + k$ .

(1) 因为  $a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_j, c_1, c_2, \dots, c_k$ , 包含了 1 到 30 的所有整数, 所以  $n \geq 30$ . 另一方面,

$$3 \times 155 = a_1 + a_2 + \dots + a_i + b_1 + b_2 + \dots + b_j + c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq 1 + 2 + \dots + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465 = 3 \times 155,$$

所以  $n = i + j + k = 30$  三种分类各自分类的类数之和是 30.

(2) 不妨设  $a_1 = 30$ , 记这 30 个盒子的类为  $A$  类, 因为  $i + j + k = 30$ , 必有  $j \leq 14$  或  $k \leq 14$ , 不妨设  $j \leq 14$ .  $A$  类的 30 个盒子分到这不超过 14 个类中去, 必有一类至少有三个盒子, 这三个盒子里的红球数相同并且黄球数也相同.