



2015 年第 26 届亚太小学奥林匹克

(上海赛区决赛)

五年级

120 分钟

(总分: 150 分)

2015 年 3 月 1 日

下午 15:30–17:30

(注意事项)

- 1 尽量解答所有问题。
- 2 不准使用数学用表或计算器。
- 3 答案请另填写在所提供的第一回合的作答卷上。
- 4 只有正确答案才能得分。

【第 1 题】

计算 $3.75 \times 1.28 \times 12.5 =$ _____。

【分析与解】

计算, 乘法交换律与乘法结合律。

$$3.75 \times 1.28 \times 12.5 = 3 \times 1.25 \times 0.8 \times 8 \times 0.2 \times 12.5 = 3 \times (1.25 \times 0.8) \times 0.2 \times (12.5 \times 8) = 3 \times 1 \times 0.2 \times 100 = 60。$$

【第 2 题】

我国农历有用鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪, 按顺序代表年份的习惯, 即若今年是鼠年, 明年就是牛年, 后年就是虎年, 以此类推。现知道, 1949 年是牛年, 那么, 到 2020 年是 _____ 年。

【分析与解】

余数与周期。

1949 年再过 $2020 - 1949 = 71$ 年到 2020 年;

$$71 \div 12 = 5 \cdots 11;$$

牛往后数 11 是鼠;

2020 年是鼠年。





【第3题】

五年级1班56人，2班44人，某次数学考试中，两班全体同学的平均分为80分。2班的平均分比1班的平均分高5分。问：那么2班的平均分是_____。

【分析与解】

平均数问题。

设2班的平均分是 x 分，则1班的平均分是 $(x-5)$ 分；

$$56(x-5) + 44x = 80 \times (56 + 44);$$

解得 $x = 82.8$ ；

2班的平均分是82.8分。

【第4题】

如果 $x * y = \frac{xy}{x+y}$ ，那么 $8 * (8 * 8) =$ _____。

【分析与解】

定义新运算。

$$8 * 8 = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = 4;$$

$$8 * (8 * 8) = 8 * 4 = \frac{8 \times 4}{8 + 4} = \frac{8}{3}。$$

【第5题】

小明在240米长的环形跑道上跑了一圈。已知他前一半时间每秒跑5米，后一半时间每秒跑3米，那么小明后一半路程用了_____秒。

【分析与解】

行程问题，平均速度。

设一半的时间为 x 秒；

则平均速度为 $(5x + 3x) \div 2x = 4$ 米/秒；

总时间为 $240 \div 4 = 60$ 秒；

前一半路程的速度均为5米/秒；

前一半路程用了 $(240 \div 2) \div 5 = 24$ 秒；

后一半路程用了 $60 - 24 = 36$ 秒。

【第6题】

两个质数的和是60，则这两个质数的乘积最大值是_____。

【分析与解】

数论，质数、合数；最值问题。

两个数的和一定，这两个数越接近，这两个数的乘积越大；

$60 = 30 + 30$ ，但30不是质数；

$60 = 29 + 31$ ，29和31都是质数， $29 \times 31 = 899$ ；即这两个质数的乘积最大值是899。





【第7题】

十进制中57改写成四进制为 $(321)_4$ ，计算： $(1003)_4 + (1012)_4 = (\quad)_7$ （结果用七进制表示）。

【分析与解】

进制与位值。

先把 $(1003)_4$ 、 $(1012)_4$ 分别转化成十进制数，然后相加。

$$(1003)_4 = (1 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 3 \times 4^0)_{10} = (67)_{10};$$

$$(1012)_4 = (1 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 2 \times 4^0)_{10} = (70)_{10};$$

$$(1003)_4 + (1012)_4 = (67)_{10} + (70)_{10} = (137)_{10}。$$

再把 $(137)_{10}$ 转化成七进制数，用 $\div 7$ 倒取余数法。

$$7 \overline{)137} \quad \dots\dots\dots \text{余数}4$$

$$7 \overline{)19} \quad \dots\dots\dots \text{余数}5$$

$$7 \overline{)2} \quad \dots\dots\dots \text{余数}2$$

0

$$(137)_{10} = (254)_7。$$

$$(1003)_4 + (1012)_4 = (254)_7。$$

【第8题】

某班同学外出春游，买车票59张，共花299元，其中单程每张4元，往返每张7元，问单程票与往返票相差_____张。

【分析与解】

鸡兔同笼。

（方法一）

假设都是单程票，则共花 $4 \times 59 = 236$ 元，比实际少 $299 - 236 = 63$ 元；

因为一张单程票比一张往返票少 $7 - 4 = 3$ 元，所以有 $63 \div 3 = 21$ 张往返票，有 $59 - 21 = 38$ 张单程票；
单程票与往返票相差 $38 - 21 = 17$ 张。

（方法二）

假设都是往返票，则共花 $7 \times 59 = 413$ 元，比实际多 $413 - 299 = 114$ 元；

因为一张往返票比一张单程票多 $7 - 4 = 3$ 元，所以有 $114 \div 3 = 38$ 张单程票，有 $59 - 38 = 21$ 张往返票；
单程票与往返票相差 $38 - 21 = 17$ 张。

（方法三）

设单程票有 x 张，往返票有 y 张；

$$\begin{cases} x + y = 59 \\ 4x + 7y = 299 \end{cases}; \text{解得} \begin{cases} x = 38 \\ y = 21 \end{cases}$$

单程票有38张，往返票有21张；

单程票与往返票相差 $38 - 21 = 17$ 张。





【第9题】

有一个六位数 $2015\square\square$ 能被 66 整除，则这个六位数为_____。

【分析与解】

数论，整除。

设这个六位数为 $\overline{2015ab}$ ；

因为 $\overline{2015ab}$ 能被 66 整除； $66 = 2 \times 33$ ；

所以 $\overline{2015ab}$ 既能被 2 整除又能被 33 整除；

因为 $\overline{2015ab}$ 能被 33 整除；所以 $20 + 15 + \overline{ab} = 35 + \overline{ab}$ 能被 33 整除； $\overline{ab} = 31$ 或 64 或 97；

因为 $\overline{2015ab}$ 既能被 2 整除；所以 b 能被 2 整除；

所以 $\overline{ab} = 64$ ；这个六位数是 201564。

【第10题】

冬天到了，有一片牧草，草每天匀速地在减少。这片牧草可供 20 头牛吃 6 天，可供 10 头牛吃 10 天。那么可供_____头牛吃 15 天。

【分析与解】

牛吃草。

设 1 头牛 1 天吃 1 份；

20 头牛 6 天吃 $20 \times 6 = 120$ 份；

10 头牛 10 天吃 $10 \times 10 = 100$ 份；

草每天减少 $(120 - 100) \div (10 - 6) = 5$ 份；

牧场原有草量为 $(20 + 5) \times 6 = 150$ 或 $(10 + 5) \times 10 = 150$ 份；

牧场上的草可以供 $150 \div 15 - 5 = 5$ 头牛吃 15 天。





【第 11 题】

亚太杯开考啦！现在给四年级学生安排考场，如果每间教室安排 20 人考试，则有 200 人没有地方考试；如果教室数量增加 1 倍，且人数增加了 40 人，若这时每个教室安排 15 人，则会空出 22 间教室，增加人数后一共有 _____ 人。

【分析与解】

盈亏问题。

（方法一）

如果教室数量增加 1 倍，且人数增加了 40 人；

每间教室安排 $20 \div 2 = 10$ 人考试，则有 $200 + 40 = 240$ 人没有地方考试；

每间教室安排 15 人，则会空出 22 间教室，即少 $15 \times 22 = 330$ 人；

教室数量增加 1 倍后，教室有 $(240 + 330) \div (15 - 10) = 114$ 间；

增加人数后一共有 $15 \times (114 - 22) = 1380$ 人。

（方法二）

设原有教室 x 间；

$$(20x + 200) + 40 = 15(2x - 22);$$

解得 $x = 57$ ；

增加人数后一共有 $(20 \times 57 + 200) + 40 = 1380$ 或 $15 \times (2 \times 57 - 22) = 1380$ 人。

【第 12 题】

五个学生（分别以 A, B, C, D, E 表示）参加考试，其中只有一个得到满分，并且他们相互之间知道分数，老师问这五个学生，五个学生分别作了回答，回答如下：

A 说：“ C 是满分。”

B ：“我不是满分。”

C ：“满分不会是 E 。”

D ：“ A 撒了谎。”

E ：“ B 说的是真话。”

已知只有 3 人说了真话，则满分是 _____。

【分析与解】

逻辑推理。

因为 A 和 D 的话意思完全相反；

所以这两句中肯定有一句是真话、有一句是假话；

因为 B 和 E 的话意思完全相同；

所以这两句要么都是真话、要么都是假话；

因为这 5 个人中只有 3 人说了真话；

所以 B 和 E 说的话都是真话；

所以 C 说的话是假话；

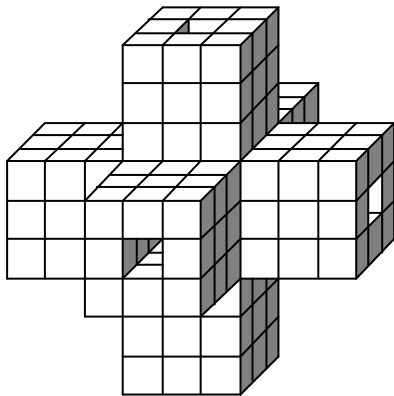
C ：“满分不会是 E 。”这是假话可得满分是 E 。





【第 13 题】

如图：用若干个小正立方体拼成右图所示的造型。其中有一个小孔分别由左至右、由上至下以及由前至后穿透整个造型。拼成此造型共需使用 _____ 个小正立方体。



【分析与解】

几何，立体图形。

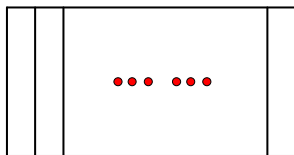
$3 \times 3 \times 3$ 的小立方体有 7 个；

但是上下、左右、前后一共被挖去 3 条 $1 \times 1 \times 9$ 的长方体；其中中心的小立方体被减去了 3 次，多减去了 2 次；

故拼成此造型共需使用 $(3 \times 3 \times 3) \times 7 - 9 \times 3 + 2 = 164$ 个小正立方体。

【第 14 题】

如图：一个大的长方形其周长为 240 厘米。它被分成图中所示的许多相同的长方形，每一个长方形的周长是 46 厘米。这些长方形的边长是整数厘米，则大长方形的面积为 _____ 平方厘米。



【分析与解】

设小长方形横的边长为 a 厘米、竖的边长为 b 厘米；

由 n 个小长方形拼成的大长方形横的边长为 $a \times n$ 厘米、竖的边长为 b 厘米；

$$\begin{cases} (a \times n + b) \times 2 = 240 & \text{..... ①} \\ (a + b) \times 2 = 46 & \text{..... ②} \end{cases}$$

$$(\text{①} - \text{②}) \div 2, \text{ 得 } a \times (n - 1) = 97;$$

97 是质数，故 97 只能拆成 $97 = 1 \times 97$ ；

$$\text{所以 } \begin{cases} a = 1 \\ n - 1 = 97 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 97 \\ n - 1 = 1 \end{cases}; \text{ 即 } \begin{cases} a = 1 \\ n = 98 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 97 \\ n = 2 \end{cases};$$

又因为 $(a + b) \times 2 = 46$ ；所以 $a < 46 \div 2 = 23$ ；所以只能 $a = 1$ ；

当 $a = 1$ ， $b = 46 \div 2 - 1 = 22$ ， $n = 98$ ，大长方形的面积为 $(1 \times 22) \times 98 = 2156$ 平方厘米。





【第 15 题】

用加减乘除四则运算及添括号将 3、6、6、7、9 五个数列式计算得到 103。

(每个数都要用一次且只能用一次) _____ = 103

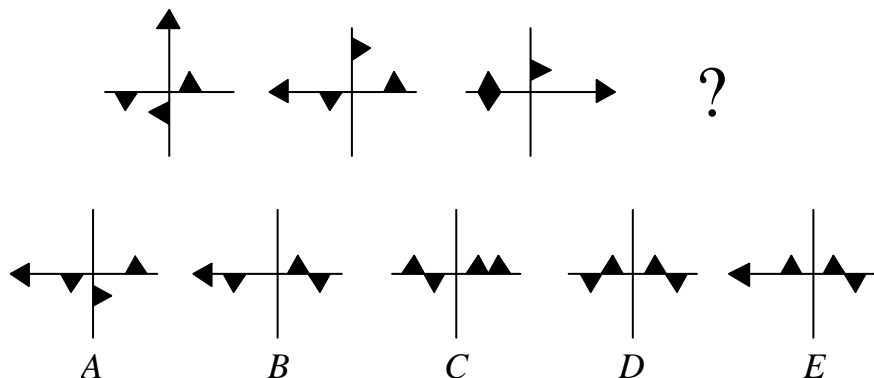
【分析与解】

巧填算符。

$$(6+9) \times 7 - 6 \div 3 = 103$$

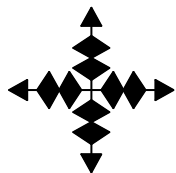
【第 16 题】

如图：根据三图的递变规律，找出下一幅图应该是 _____。



【分析与解】

找规律。



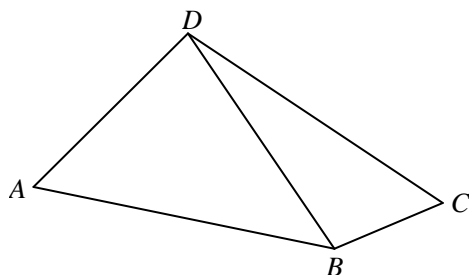
如图所示，一共 20 个位置，每个小三角形每次顺时针走一格；
故答案选 E。





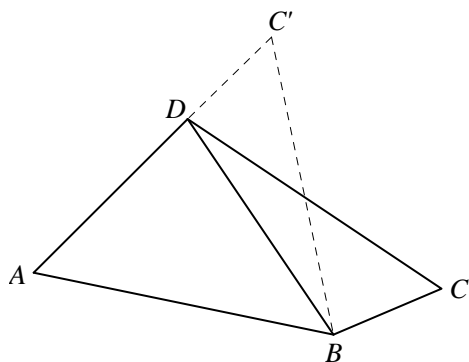
【第 17 题】

如图：四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC + AD$ ， $\angle BCD = 52^\circ$ ，且 $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$ ，请问 $\angle BAD$ 为 _____ 度。



【分析与解】

几何，角。



如图所示，把 $\triangle BCD$ 沿 BD 的垂直平分线翻折至 $\triangle DC'B$ ；

显然， $\triangle BCD \cong \triangle DC'B$ ；

所以 $\angle CBD = \angle C'DB$ ， $BC = DC'$ ， $\angle BCD = \angle DC'B$ （全等三角形对应边相等，对应角相等）；

因为 $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$ （已知）， $\angle CBD = \angle C'DB$ （已证）；

所以 $\angle ADB + \angle C'DB = 180^\circ$ （等量代换）；

所以 A 、 D 、 C' 三点共线（平角的意义）；

因为 $AB = BC + AD$ （已知）， $BC = DC'$ （已证）；

所以 $AB = DC' + AD$ （等量代换）；

即 $AB = AC'$ ；

所以 $\angle ABC' = \angle DC'B$ （等边对等角）；

因为 $\angle BCD = \angle DC'B$ （已证）， $\angle BCD = 52^\circ$ （已知）；

所以 $\angle ABC' = \angle DC'B = 52^\circ$ （等量代换）；

因为 $\angle BAD + \angle ABC' + \angle DC'B = 180^\circ$ （三角形内角等于 180° ）；

所以 $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC' - \angle DC'B = 180^\circ - 52^\circ - 52^\circ = 76^\circ$ （等式性质）。





【第 18 题】

如图：“？”中的数字应该是_____。

5		8	17		9	8		13
	93			49			?	
16		7	13		4	5		4

【分析与解】

找规律。

$$8 \times 16 - 5 \times 7 = 93, \quad 9 \times 13 - 17 \times 4 = 49;$$

a		b
	x	
d		c

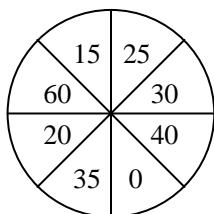
规律为 $b \times d - a \times c = x$;

$13 \times 5 - 8 \times 4 = 33$ ，即“？”中的数字应该是 33。

5		8	17		9	8		13
	93			49			33	
16		7	13		4	5		4

【第 19 题】

如图：3 次射击总得分可以得到 75。假定每次射击都能得分（包括得 0 分）。那么，有_____种方法可以使 3 次射击总得分为 75。



【分析与解】

数的拆分；计数。

$$\begin{aligned} 75 &= 0 + 15 + 60 = 0 + 35 + 40 = 15 + 20 + 40 = 15 + 25 + 35 \\ &= 15 + 30 + 30 = 20 + 20 + 35 = 20 + 25 + 30 = 25 + 25 + 25; \end{aligned}$$

$\{0, 15, 60\}$, $\{0, 35, 40\}$, $\{15, 20, 40\}$, $\{15, 25, 35\}$, $\{20, 25, 30\}$ 各有 $P_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 种排法;

$\{15, 30, 30\}$, $\{20, 20, 35\}$ 各有 3 种排法;

$\{25, 25, 25\}$ 有 1 种排法;

一共有 $6 \times 5 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 37$ 种。





【第20题】

如图：在一个 5×5 的方格中，有25个数。现在从左下角方格开始选取数字，只能往上或者往右，到右上角方格结束。这样共选取了9个数字，共有_____种选法得到9个数的和为38。

5	4	6	3	8
6	2	7	4	4
4	3	6	5	3
5	4	5	6	4
3	5	4	7	5

【分析与解】

从左下角方格开始，前面3个方格里的数一定是3、5、4；

最后到右上角，故最后一个方格里的数一定是8；

其余5个方格里的数之和为 $38 - (3 + 5 + 4 + 8) = 18$ ；

从右上角的8开始尝试，只有 $18 = 3 + 6 + 4 + 2 + 3$ ；

5	4	6	3	8
6	2	7	4	4
4	3	6	5	3
5	4	5	6	4
3	5	4	7	5

5	4	6	3	8
6	2	7	4	4
4	3	6	5	3
5	4	5	6	4
3	5	4	7	5

5	4	6	3	8
6	2	7	4	4
4	3	6	5	3
5	4	5	6	4
3	5	4	7	5

5	4	6	3	8
6	2	7	4	4
4	3	6	5	3
5	4	5	6	4
3	5	4	7	5

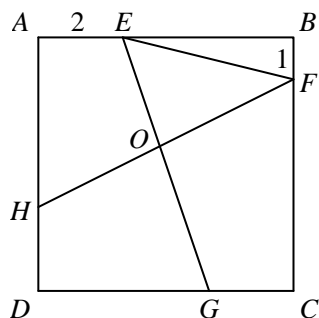
如图所示，共有3种选法。





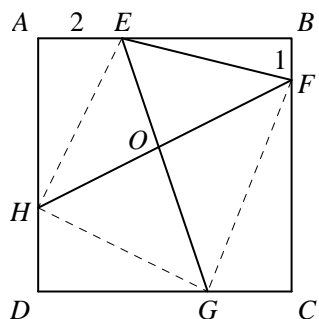
【第 21 题】

如图：正方形 $ABCD$ ，其中 $AB = 6\text{cm}$ ， $AE = 2\text{cm}$ ， $BF = 1\text{cm}$ ， $CG = 2\text{cm}$ ， $DH = 2\text{cm}$ ，链接 EG 和 FH ，交于点 O ，问：三角形 OEF 的面积为_____。



【分析与解】

几何，等积变形，蝴蝶模型。



分别联结 FG 、 GH 、 HE ；

正方形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = DA = 6$ 厘米；

$AE = 2$ 厘米， $BE = AB - AE = 6 - 2 = 4$ 厘米；

$BF = 1$ 厘米， $CF = BC - BF = 6 - 1 = 5$ 厘米；

$CG = 2$ 厘米， $DG = CD - CG = 6 - 2 = 4$ 厘米；

$DH = 2$ 厘米， $AH = DA - DH = 6 - 2 = 4$ 厘米；

$$S_{\triangle AHE} = AH \times AE \div 2 = 4 \times 2 \div 2 = 4 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\triangle BEF} = BE \times BF \div 2 = 4 \times 1 \div 2 = 2 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\triangle CFG} = CF \times CG \div 2 = 5 \times 2 \div 2 = 5 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\triangle DGH} = DG \times DH \div 2 = 4 \times 2 \div 2 = 4 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\text{梯形}CBDEG} = (CG + BE) \times BC \div 2 = (2 + 4) \times 6 \div 2 = 18 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\triangle FEG} = S_{\text{梯形}CBDEG} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CFG} = 18 - 2 - 5 = 11 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\text{梯形}ADGE} = (AE + DG) \times AD \div 2 = (2 + 4) \times 6 \div 2 = 18 \text{ 平方厘米；}$$

$$S_{\triangle HEG} = S_{\text{梯形}ADGE} - S_{\triangle AHE} - S_{\triangle DGH} = 18 - 4 - 4 = 10 \text{ 平方厘米；}$$





根据任意四边形蝴蝶模型，在四边形 $EFGH$ 中， $OF:OH = S_{\triangle FEG}:S_{\triangle HEG} = 11:10$ ；

$$S_{\text{梯形}BAHF} = (BF + AH) \times AB \div 2 = (1 + 4) \times 6 \div 2 = 15 \text{ 平方厘米}；$$

$$S_{\triangle EFH} = S_{\text{梯形}BAHF} - S_{\triangle AHE} - S_{\triangle BEF} = 15 - 4 - 2 = 9 \text{ 平方厘米}；$$

$$\text{在 } \triangle EFH \text{ 中，} OF:OH = 11:10, S_{\triangle OFH} = S_{\triangle EFH} \times \frac{OF}{FH} = 9 \times \frac{11}{21} = \frac{33}{7} \text{ 平方厘米。}$$

【第 22 题】

小明和小华在做游戏，从 81 张分别标上数 1, 2, 3, ..., 81 的卡片中，小明抽取了一张卡片叫小华猜。小华问了三个问题，问题一：你的卡片数小于 41 吗？问题二：你卡片上的数能被 4 整除吗？问题三：你卡片上的数是完全平方数吗？小华根据小明的回答，得出了唯一的结论，则这张卡片上的数是_____。

【分析与解】

逻辑推理。

1~40 中，能被 4 整除且是完全平方数的数有 4、16 等，答案不惟一，不符题意；

1~40 中，能被 4 整除且是不完全平方数的数有 8、12 等，答案不惟一，不符题意；

1~40 中，不能被 4 整除且是完全平方数的数有 1、9 等，答案不惟一，不符题意；

1~40 中，不能被 4 整除且不是完全平方数的数有 2、3 等，答案不惟一，不符题意；

41~81 中，能被 4 整除且是完全平方数的数只有 64，符合题意；

41~81 中，能被 4 整除且是不完全平方数的数有 44、48 等，答案不惟一，不符题意；

41~81 中，不能被 4 整除且是完全平方数的数有 49、81 等，答案不惟一，不符题意；

41~81 中，不能被 4 整除且不是完全平方数的数有 41、42 等，答案不惟一，不符题意；

综上所述，这张卡片上的数是 64。





【第 23 题】

由 1、2、3、4、5、6、7、8 组成一个八位数，并且它们每个数位上的数各不相同。则可以被 1111 整除的八位数有 _____ 个。

【分析与解】

数论，整除；计数。

设这个八位数为 $\overline{ABCDEFGH}$ ；

因为 $\overline{ABCDEFGH}$ 的数字之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8=(1+8)\times 8\div 2=36$ 能被 9 整除；

所以 $\overline{ABCDEFGH}$ 能被 9 整除；

因为 $\overline{ABCDEFGH}$ 能被 1111 整除；

所以 $\overline{ABCDEFGH}$ 能被 $[9, 1111] = 9999$ 整除；

所以 $\overline{ABCD} + \overline{EFGH}$ 能被 9999 整除；

所以 $\overline{ABCD} + \overline{EFGH} = 9999$ ；

则 $D+H=C+G=B+F=A+E=9$ ；

$9=1+8=2+7=3+6=4+5$ ；

故 $\{A, E\}$ 、 $\{B, F\}$ 、 $\{C, G\}$ 、 $\{D, H\}$ 可以是 $\{1, 8\}$ 、 $\{2, 7\}$ 、 $\{3, 6\}$ 、 $\{4, 5\}$ ；

一共有 $P_4^4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 384$ 种不同的选择；

即符合题意的八位数有 384 个。

【第 24 题】

在正整数 N 的右端增加了二位数字，组成了一个新的数，这个数等于由 1 到 N 的所有正整数的和。则 N 是 _____。

【分析与解】

因为 $1+2+\cdots+N \geq N \times 100$ 且 $1+2+\cdots+N < (N+1) \times 100$ ；

而 $1+2+\cdots+N = (1+N) \times N \div 2$ ；

所以 $(1+N) \times N \div 2 \geq N \times 100$ 且 $(1+N) \times N \div 2 < (N+1) \times 100$ ；

$(1+N) \div 2 \geq 100$ 且 $N \div 2 < 100$ ；

$N \geq 199$ 且 $N < 200$ ；

即 $199 \leq N < 200$ ；

所以正整数 $N = 199$ ；

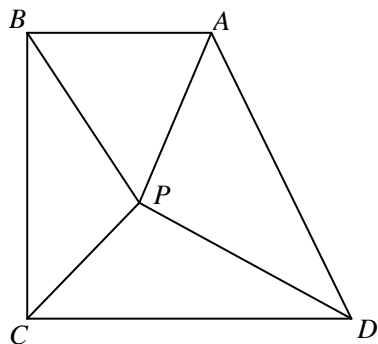
检验， $1+2+\cdots+199 = (1+199) \times 199 \div 2 = 19900$ ，符合题意。





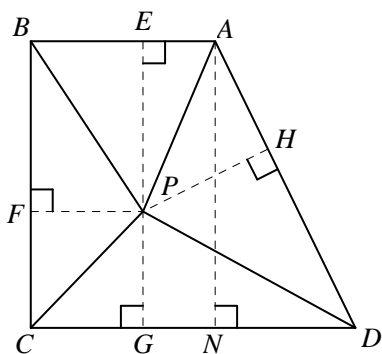
【第 25 题】

如图：直角梯形 $ABCD$ 中， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 12\text{cm}$ ， $CD = 15\text{cm}$ ， P 为梯形内部一点，其中 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD}$ ， $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAD}$ ，那么点 P 到直线 AD 的距离与点 P 到直线 BC 的距离之和为 _____ cm^2 。



【分析与解】

几何，面积，勾股定理。



过点 P 分别作 $PE \perp AB$ 、 $PF \perp BC$ 、 $PG \perp CD$ 、 $PH \perp DA$ ，垂足分别为 E 、 F 、 G 、 H ；

过点 A 作 $AN \perp CD$ ，垂足为 N ；

因为 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CNA = 90^\circ$ ；

所以四边形 $ABCN$ 是长方形；

所以 $AN = BC = 12$ 厘米， $CN = AB = 10$ 厘米；

因为 $CD = 15$ 厘米；

所以 $DN = CD - CN = 15 - 10 = 5$ 厘米；

在直角三角形 AND 中，根据勾股定理得 $DN^2 + AN^2 = AD^2$ ， $AD = 13$ 厘米；

因为 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD}$ ， $S_{\triangle PAB} = AB \times PE \div 2$ ， $S_{\triangle PCD} = CD \times PG \div 2$ ；

所以 $AB \times PE \div 2 = CD \times PG \div 2$ ；所以 $PE : PG = CD : AB = 15 : 10 = 3 : 2$ ；

因为 $PE + PG = BC = 12$ 厘米；

所以 $PE = 12 \times \frac{3}{5} = 7.2$ 厘米， $PG = 12 \times \frac{2}{5} = 4.8$ 厘米；

$S_{\triangle PAB} = AB \times PE \div 2 = 10 \times 7.2 \div 2 = 36$ 平方厘米；





$$S_{\triangle PCD} = CD \times PG \div 2 = 15 \times 4.8 \div 2 = 36 \text{ 平方厘米};$$

$$\text{因为 } S_{\text{梯形}ABCD} = (AB + CD) \times BC \div 2 = (10 + 15) \times 12 \div 2 = 150 \text{ 平方厘米};$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAD} = [S_{\text{梯形}ABCD} - (S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD})] \div 2 = [150 - (36 + 36)] \div 2 = 39 \text{ 平方厘米};$$

$$PF = S_{\triangle PBC} \times 2 \div BC = 39 \times 2 \div 12 = 6.5 \text{ 厘米};$$

$$PH = S_{\triangle PAD} \times 2 \div AD = 39 \times 2 \div 13 = 6 \text{ 厘米};$$

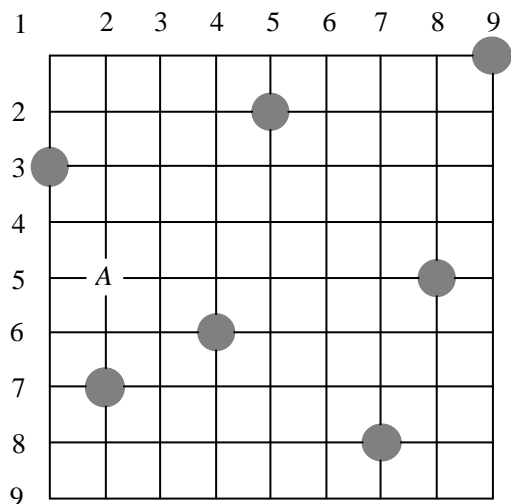
$$PF + PH = 6.5 + 6 = 12.5 \text{ 厘米}, \text{ 即点 } P \text{ 到直线 } AD \text{ 的距离与点 } P \text{ 到直线 } BC \text{ 的距离之和为 } 12.5 \text{ 厘米}。$$





【第 26 题】

如图：有这样一座小城——它的道路布局被设计成正方形的网格状，现在在这座城内 7 个不同的路口处，住着 7 位朋友（以“●”标示）想聚在一起喝杯咖啡。请在地图上确定一个路口作为他们的集合地，要求能让所有人走得总路程最短。请用符号 (a,b) 表示_____。例：A 点表示为 $(5,2)$ 。



【分析与解】

当 $1 \leq a \leq 8$ 时，竖直方向上，到 $(1,9)$ 和 $(8,7)$ 的距离之和最短；

当 $2 \leq a \leq 7$ 时，竖直方向上，到 $(2,5)$ 和 $(7,2)$ 的距离之和最短；

当 $3 \leq a \leq 6$ 时，竖直方向上，到 $(3,1)$ 和 $(6,4)$ 的距离之和最短；

当 $a = 5$ 时，竖直方向上，到 $(5,8)$ 的距离之和最短；

故当 $a = 5$ 时，竖直方向上，到 7 个“●”标示的点距离之和最短；

当 $1 \leq b \leq 9$ 时，竖直方向上，到 $(3,1)$ 和 $(1,9)$ 的距离之和最短；

当 $2 \leq b \leq 8$ 时，竖直方向上，到 $(7,2)$ 和 $(5,8)$ 的距离之和最短；

当 $4 \leq b \leq 7$ 时，竖直方向上，到 $(6,4)$ 和 $(8,7)$ 的距离之和最短；

当 $b = 5$ 时，竖直方向上，到 $(2,5)$ 的距离之和最短；

故当 $b = 5$ 时，竖直方向上，到 7 个“●”标示的点距离之和最短；

综上所述，要求能让所有人走得总路程最短，这个点为 $(5,5)$ 。





【第 27 题】

某班级有男女生各 30 名，现在将他们排成一排，女生在前，男生在后，分别编为 1-60 号，现在将男女生顺序打乱重新排队，30 位女生还是在前，按编号从小到大，奇数在前，偶数在后，如 1、3、5、…、29、2、4、…、28、30；男生按编号被 3 整除余 1 的 10 个数排在最前面，然后被 3 整除余 2 的 10 个数放在中间，被 3 整除的 10 个数放在最后，如 31、34、60。现在数出夹在每两个编号相差为 30 的人中间的人数，共有 30 个数字。则所得到的 30 个数的和是_____。

【分析与解】

若女生和男生编号相差为 30，且这个女生排在第 m 个，这个男生排在第 n 个；

这编号相差为 30 的女生和男生人中间的人数为 $n-m-1$ 人；

$$(31+32+\cdots+60)-(1+2+\cdots+30)-1\times 30=[(31-1)+(32-2)+\cdots+(60-30)]-1\times 30$$

$$=\underbrace{30+30+\cdots+30}_{30\uparrow 30}-1\times 30=30\times 30-1\times 30=(30-1)\times 30=870$$

所得到的 30 个数的和是 870。

【第 28 题】

黑板上写着乘积 $a_1\cdot a_2\cdots a_{2015}$ ，其中 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 都是正整数。如果将其中的一个乘号改为加号（保持其余乘号），我们发现在所得的 2014 个和数中有 301 个是偶数。则在 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 中至多有_____个偶数。

【分析与解】

数论，奇偶性；最值问题。

若 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 都是奇数，则所得的 2014 个和数都是偶数；

若 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 中只有一个是偶数，则所得的 2014 个和数都是奇数；

故若 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 中至少有 2 个偶数。

设 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 中，从前往后，第一个偶数为 a_m ，最后一个偶数为 a_n ；

$a_m \sim a_n$ 中任何一个乘号改为加号，得到的和数为偶数；

$a_1 \sim a_m$ 中任何一个乘号改为加号，得到的和数为奇数；

$a_n \sim a_{2015}$ 中任何一个乘号改为加号，得到的和数为奇数；

因为所得的 2014 个和数中有 301 个是偶数；

所以 $a_m \sim a_n$ 中有 301 个乘号；

$a_m \sim a_n$ 共有 $301+1=302$ 个数；

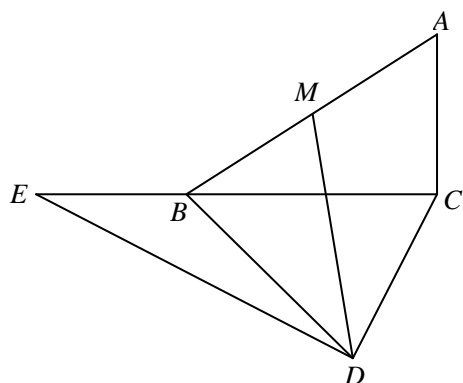
在 $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ 中至多有 302 个偶数。





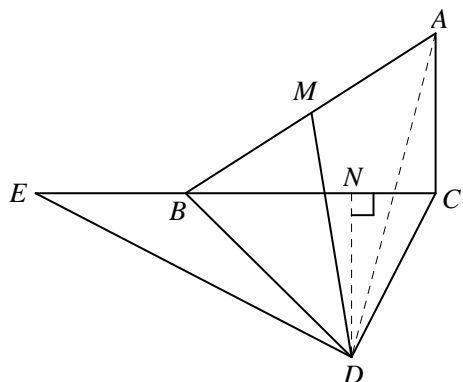
【第 29 题】

如图：直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 12\text{cm}$ ， $BC = 16\text{cm}$ ，直角三角形 CDE 中， $\angle CDE = 90^\circ$ ， $CD = 15\text{cm}$ ， $DE = 20\text{cm}$ ，若 M 为 AB 的中点，则三角形 DMB 的面积为 _____ cm^2 。



【分析与解】

几何，面积，等积变形，勾股定理。



联结 AD ；过点 D 作 $DN \perp CE$ ，垂足为 N ；

在直角三角形 CDE 中， $\angle CDE = 90^\circ$ ，由勾股定理得 $CD^2 + DE^2 = CE^2$ ， $CE = 25$ 厘米；

因为 $S_{\triangle CDE} = CD \times DE \div 2 = CE \times DN \div 2$ ；所以 $DN = \frac{CD \times DE}{CE} = \frac{15 \times 20}{25} = 12$ 厘米；

在直角三角形 CDN 中， $\angle CND = 90^\circ$ ，由勾股定理得 $CN^2 + DN^2 = CD^2$ ， $CN = 9$ 厘米；

$$S_{\triangle ABC} = BC \times AC \div 2 = 16 \times 12 \div 2 = 96 \text{ 平方厘米}；$$

$$S_{\triangle BCD} = BC \times DN \div 2 = 16 \times 12 \div 2 = 96 \text{ 平方厘米}；$$

$$S_{\text{四边形}ABDC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} = 96 + 96 = 192 \text{ 平方厘米}；$$

$$S_{\triangle ACD} = AC \times CN \div 2 = 12 \times 9 \div 2 = 54 \text{ 平方厘米}；$$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\text{四边形}ABDC} - S_{\triangle ACD} = 192 - 54 = 138 \text{ 平方厘米}；$$

因为 M 为 AB 的中点；所以 $S_{\triangle DMB} = S_{\triangle ABD} \times \frac{1}{2} = 138 \times \frac{1}{2} = 69$ 平方厘米。





【第30题】

甲、乙两个机器人同时从 A 、 B 两地出发，在 A 、 B 之间不停地往返行走。 A 、 B 两地相距 90 米，出发时，两人速度相同，乙的速度始终不变。

第一次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度的 $\frac{1}{2}$ ，

第二次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度的 $\frac{1}{3}$ ，

第三次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度的 $\frac{1}{4}$ ，

第四次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度的 $\frac{1}{5}$ ，

第五次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度，

第六次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度的 $\frac{1}{2}$ ，

第七次迎面相遇后，甲的速度变为出发速度的 $\frac{1}{3}$ ，……

甲按照上述规律变化速度。则第 2015 次迎面相遇地点距 A 地 _____ 米。

【分析与解】

行程问题，多次相遇。

从出发到第一次迎面相遇，甲和乙一共了 1 个 AB ，即 90 米；

甲速和乙速之比为 1:1，行驶的路程之比为 1:1，甲走了 $90 \times \frac{1}{2} = 45$ 米；

从第一次迎面相遇到第二次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 $\frac{1}{2}:1=1:2$ ，行驶的路程之比为 1:2，甲走了 $180 \times \frac{1}{3} = 60$ 米；

从第二次迎面相遇到第三次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 $\frac{1}{3}:1=1:3$ ，行驶的路程之比为 1:3，甲走了 $180 \times \frac{1}{4} = 45$ 米；

从第三次迎面相遇到第四次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 $\frac{1}{4}:1=1:4$ ，行驶的路程之比为 1:4，甲走了 $180 \times \frac{1}{5} = 36$ 米；

从第四次迎面相遇到第五次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 $\frac{1}{5}:1=1:5$ ，行驶的路程之比为 1:5，甲走了 $180 \times \frac{1}{6} = 30$ 米；

从第五次迎面相遇到第六次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 1:1，行驶的路程之比为 1:1，甲走了 $180 \times \frac{1}{2} = 90$ 米；

从第六次迎面相遇到第七次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 $\frac{1}{2}:1=1:2$ ，行驶的路程之比为 1:2，甲走了 $180 \times \frac{1}{3} = 60$ 米；

从第七次迎面相遇到第八次迎面相遇，甲和乙一共了 2 个 AB ，即 $90 \times 2 = 180$ 米；

甲速和乙速之比为 $\frac{1}{3}:1=1:3$ ，行驶的路程之比为 1:3，甲走了 $180 \times \frac{1}{4} = 45$ 米；

……

$2015 \div 5 = 403$ ；





学而思培优

则甲一共走了 $(45 + 60 + 45 + 36 + 30) + (90 + 60 + 45 + 36 + 30) \times (403 - 1) = 105138$ 米；

$105138 \div (90 \times 2) = 584 \cdots 18$ ；

甲走了 584 个来回多 18 米；

第 2015 次迎面相遇地点距 A 地 18 米。

更多杯赛信息敬请关注**家长帮社区** <http://jzb.com/bbs/sh/>

家长帮 | 社区

上海学而思 外联竞赛部

孙昊



2015 年第 26 届亚太小学奥林匹克（上海赛区决赛）五年级

城隍喵

