

# 第二十一届华罗庚金杯少年数学邀请赛

## 初赛试卷（小学高年级组）

一、选择题（每小题 10 分，共 60 分，以下每题的四个选项中，仅有一个是正确的，请将表示正确答案的英文字母写在每题的圆括号内。）

1. 算式  $\underbrace{999\cdots 9}_{2016\text{个}} \times \underbrace{999\cdots 9}_{2016\text{个}}$  的结算中含有（ ）个数字 0.

A. 2017

B. 2016

C. 2015

D. 2014

【答案】C

【解析】方法一：找规律：

$9 \times 9 = 81$ ,  $99 \times 99 = 9801$ ,  $999 \times 999 = 998001 \cdots$  两个  $n$  个 9 相乘会有  $n-1$  个 0, 因此有 2015 个数字 0.

方法二：

$$\begin{aligned} & \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \times \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \\ &= \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \times \left( \underbrace{1000\cdots 00}_{2016\text{个}} - 1 \right) \\ &= \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \times \underbrace{1000\cdots 00}_{2016\text{个}} - \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \\ &= \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \underbrace{000\cdots 00}_{2016\text{个}} - \underbrace{999\cdots 99}_{2016\text{个}} \\ &= \underbrace{999\cdots 99}_{2015\text{个}} \underbrace{8000\cdots 001}_{2015\text{个}} \end{aligned}$$

有 2015 个 0, 选 C.

2. 已知  $A, B$  两地相距 300 米. 甲、乙两人同时分别从  $A, B$  两地出发, 相向而行, 在距  $A$  地 140 米处相遇; 如果乙每秒多行 1 米, 则两人相遇处距  $B$  地 180 米. 那么乙原来的速度是每秒（ ）米.

A.  $2\frac{3}{5}$

B.  $2\frac{4}{5}$

C. 3

D.  $3\frac{1}{5}$

【答案】D

【解析】

方法一：设甲的速度为  $v_{\text{甲}}$ , 乙原来的速度为  $v_{\text{乙}}$ , 后来速度变为  $v_{\text{乙快}}$

$$\begin{cases} \frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{140}{300-140} = \frac{7}{8} = \frac{14}{16} \\ \frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙快}}} = \frac{300-180}{180} = \frac{2}{3} = \frac{14}{21} \end{cases}$$

可以发现,统一分子后,乙原来为 16 份,加速后变为 21 份,“5”份相当于 1 米每秒,则“16”份相当于  $3\frac{1}{5}$  米每秒,选 D.

方法二: 设甲速  $v_1$  米/秒, 乙速  $v_2$  米/秒, 根据题意列方程得:

$$\begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = \frac{140}{300-140} = \frac{7}{8} \\ \frac{v_1}{v_2+1} = \frac{300-180}{180} = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} v_1 = \frac{14}{5} \\ v_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

3. 在一个七位整数中, 任何三个连续排列的数字都构成一个能被 11 或 13 整除的三位数, 则这个七位数最大是 ( )

- A.9981733      B.9884737      C.9978137      D.9871773

【答案】B

【解析】 $1001=7 \times 11 \times 13$ , 则三位数中被 11 整除的最大数为 990, 被 13 整除的最大数为 988, 由于后面的两个数位会做首位, 因此不能为 0, 前三位只能为 988, ACD 前三位都不是 11 或 13 的倍数, 且  $988=13 \times 76$ ,  $884=13 \times 68$ ,  $847=11 \times 77$ ,  $473=11 \times 43$ ,  $737=11 \times 67$ , 选 B.

4. 将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这 8 个数排成一行, 使得 8 的两边各数之和相等, 那么共有 ( ) 种不同的排行.

- A.1152      B.864      C.576      D.288

【答案】A

【解析】 $1+2+3+\dots+7=28$ , 8 的两边之和都是  $28 \div 2=14$ ,

有 (1247)8(356), (1256)8(347), (1346)8(257), (2345)8(167) 四种分法,

共有  $2 \times 4 \times 4 \times 3! = 1152$  种排法. 选 A.

5. 在等腰梯形  $ABCD$  中,  $AB$  平行于  $CD$ ,  $AB=6$ ,  $CD=14$ ,

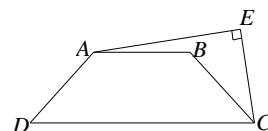
$\angle AEC$  是直角,  $CE=CB$ , 则  $AE^2$  等于 ( )

A.84

B.80

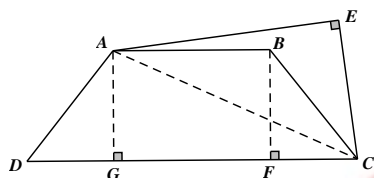
C.75

D.64



【答案】A

【解析】



$$AG = BF = h, \quad CG = 10, \quad CF = 4,$$

$$AC^2 = AG^2 + CG^2 = h^2 + 100,$$

$$CE^2 = BC^2 = BF^2 + CF^2 = h^2 + 16,$$

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 84. \text{ 选 A.}$$

6. 从自然数  $1, 2, 3, \dots, 2015, 2016$  中, 任意取  $n$  个不同的数, 要求总能在这  $n$  个不同的数中找到 5 个数, 它们的数字和相等. 那么  $n$  的最小值等于 ( )

A.109

B.110

C.111

D.112

【答案】B

【解析】1 到 2016 中, 数字和最大 28. 数字和为 28 的只有 1999 这 1 个数,

最坏情况: 取数字和 1 到 27 各 4 个, 以及 1999, 共 109 个数.

再多取一个数就保证有 5 个数字和相等.  $n=110$ , 选 B.

## 二、填空题 (每小题 10 分, 共 40 分)

7. 两个正方形的面积之差为 2016 平方厘米, 如果这样的一对正方形的边长都是整数厘米, 那么满足上述条件的所有正方形共有 \_\_\_\_\_ 对.

【答案】12

【解析】 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 2016$ ,  $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7^1$ ,

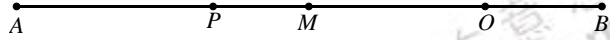
共有  $(5+1) \times (2+1) \times (1+1) = 36$  个因数, 由于  $a+b > a-b$  可以组成 18 对,

且  $a+b$  与  $a-b$  奇偶性相同, 乘积是偶数, 两个数必然都是偶数, 有一个数是奇数

的数对不满足条件. 2016 中奇因数共有  $(2+1) \times (1+1) = 6$  对, 共有 6 对含奇因数的

数对不满足，故有  $18-6=12$  组解。

8. 如下图， $O, P, M$  是线段  $AB$  上的三个点， $AO = \frac{4}{5}AB, BP = \frac{2}{3}AB$ ， $M$  是  $AB$  的中点，且  $OM = 2$ ，那么  $PM$  长为\_\_\_\_\_。



【答案】 $\frac{10}{9}$

【解析】方法一：由于  $AO:OB=4:1, AP:PB=1:2$

可设  $AB$  分为 15 份，则  $AP$  为 5 份， $OB$  为 3 份，由于  $M$  为中点，则  $AM$  和  $MB$  均为 7.5 份， $PM$  为 2.5 份， $MO$  为 4.5 份，则  $PM$  的长为  $\frac{2}{4.5} \times 2.5 = \frac{10}{9}$

方法二：由已知可得：

$$OM = AO - AM = \frac{4}{5}AB - \frac{1}{2}AB = \frac{3}{10}AB$$

$$PM = BP - MB = \frac{2}{3}AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{6}AB = \frac{5}{9}OM = \frac{10}{9}$$

9. 设  $q$  是一个平方数。如果  $q-2$  和  $q+2$  都是质数，就称  $q$  为  $P$  型平方数，例如，9 就是一个  $P$  型平方数，那么小于 1000 的最大  $P$  型平方数是\_\_\_\_\_。

【答案】441

【解析】显然， $q$  是奇数。且  $q+2$  和  $q-2$  都不是 3 的倍数。

$$\text{只能 } q-2 \equiv 1 \text{ 和 } q+2 \equiv 2 \pmod{3}$$

所以  $q$  是 3 的倍数。

$$33^2 > 1000, 27^2 + 2 = 17 \times 43$$

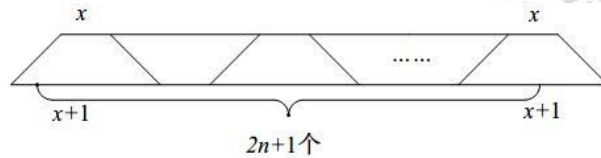
$$21^2 - 2 = 439, 21^2 + 2 = 443 \text{ 都是质数}$$

则小于 1000 的最大  $P$  型平方数为  $21^2=441$ 。

10. 有一个等腰梯形的纸片，上底长度为 2015，下底长度为 2016，用该纸片剪出一些等腰梯形，要求剪出的梯形的两个底边分别在原来梯形的底边上，剪出的梯形的两个锐角等于原来梯形的锐角，则最多可以剪出\_\_\_\_\_个同样的等腰梯形。

【答案】4029

【解析】如图，将大等腰梯形分成  $2n+1$  个等腰梯形，梯形上底为  $x$ ，则下底为  $x+1$ ，



根据原来梯形的上底可得  $n(2x+1) + x = 2015$

$$n = \frac{2015 - x}{2x + 1}$$

尝试可得，当  $x$  增大时， $n$  会减少，且  $x$  为 0 时， $n$  最大取 2015，但是  $x$  不能为 0，否则不能形成梯形， $n$  不能取 2015。

当  $n=2014$  时，可得  $2014(2x+1) + x = 2015$ ，解得  $x = \frac{1}{4029}$ ，即  $n=2014$  是成立的。

综上可得， $n$  最大值为 2014，最多可以剪  $2 \times 2014 + 1 = 4029$  个等腰梯形。

网校五年级活动群 170107472

网校六年级活动 2 群 246706047

加群获取初赛视频解析，以及复赛复习资料