例　　　　2018年上海市徐汇区中考模拟第25题

已知四边形 $ABCD$ 是边长为10的菱形，对角线 AC、BD 相交于点 E，过点 C 作 $CF//DB$ 交 AB 的延长线于点 F，联结 EF 交 BC 于点 H.

（1）如图1，当 $EF\perp BC$ 时，求 AE 的长；

（2）如图2，以 EF 为直径作⊙O，⊙O 经过点 C 交边 CD 于点 G（点 C、G 不重合），设 AE 的长为 x，EH 的长为 y.

①求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；

②联结 EG，当△DEG 是以 DG 为腰的等腰三角形时，求 AE 的长.

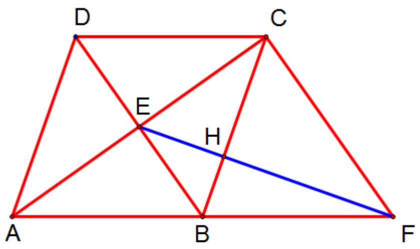

图1

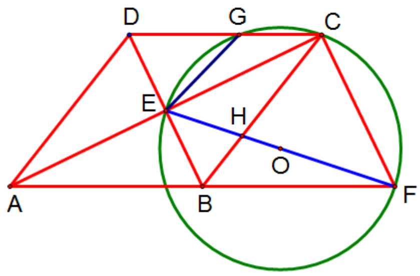

图2

动感体验

请打开几何画板文件名“18徐汇25”，拖动点 D 绕点 A 旋转可以改变菱形 $ABCD$ 的形状，可以体验到，△BEH∽△CFH，相似比为1∶2；Rt△CEF 与 Rt△CAF 有公共的斜边和一条直角边，还有一组边是2倍关系．点击屏幕左下方的按钮“第（3）题”，拖动点 D，观察△DEG，当 $GD=GE$ 时，EG 是 Rt△DEC 斜边上的中线；当 $DG=DE$ 时，△GOC≌△FOC.

思路点拨

1．图形中除了菱形的边长和 BF 的长是定值以外，BH 和 CH 的长也是定值.

2．已知 $AE=x$，$EH=y$，再设 $DE=m$，那么图形中所有线段的长都可以用 x、y 或 m 表示出来了.

3．第（1）题求得的AE的长，就是第（2）题情景中G、C重合时AE的长.

图文解析

（1）如图3，由 $AC\perp BD$，$CF//BD$，可得 $AC\perp CF$.

当 $EF\perp BC$ 时，可得∠1＝∠2.

又因为∠2＝∠3，所以∠1＝∠3.

所以△CFE∽△CAF.

于是可得 $CF^2=CE\ CA=2AE^2$.

在Rt△ACF 中，由勾股定理，

得 $CF^2=AF^2-AC^2=20^2-(2AE)^2$.

等量代换，得 $2AE^2=20^2-(2AE)^2$.

解得 $AE=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$.

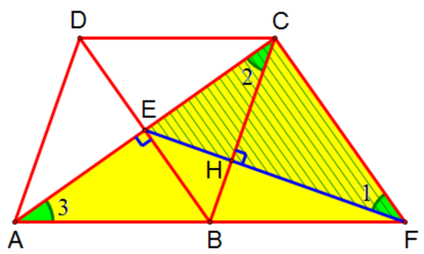

图3

（2）①如图 4，设 $DE=BE=m$，$CF=2m$．

由 $BD//CF$，得 $\frac{FH}{EH}=\frac{CF}{BE}=2$．所以 $FH=2EH=2y$．所以 $EF=3y$．

如图 5，在 Rt△CEF 中，$CE=AE=x$，$EF=3y$，所以 $CF^2=(3y)^2-x^2$．

在 Rt△CAF 中，$CA=2AE=2x$，$AF=20$，所以 $CF^2=20^2-(2x)^2$．

等量代换，得$(3y)^2-x^2=20^2-(2x)^2$．

整理，得 $y=\frac{\sqrt{400-3x^2}}{3}$．定义域是$\frac{10\sqrt{6}}{3}<x<10$．

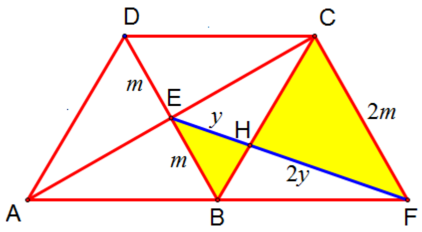

图 4

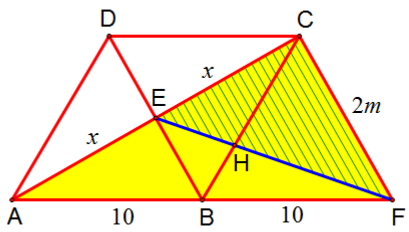

图 5

②以 DG 为腰的等腰三角形 DEG 存在两种情形：

情形 1，如图 6，如果 $GD=GE$，那么 EG 是 Rt△DCE 斜边上的中线．

此时 GO 是梯形 $DEFC$ 的中位线，$GO=\frac{1}{2}(DE+CF)=\frac{3}{2}m$．

如图 7，因为 CO 是 Rt△CEF 斜边上的中线，所以 $EF=2CO=2GO=3m$．

于是在 Rt△CEF 中，$x=CE=\sqrt{EF^2-CF^2}=\sqrt{(3m)^2-(2m)^2}=\sqrt{5}m$．

在 Rt△ABE 中，$AE=\sqrt{5}m$，$BE=m$，$AB=10$，由勾股定理，得 $6m^2=100$．

解得 $m=\frac{10}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$．此时 $AE=x=\sqrt{5}m=\frac{5\sqrt{30}}{3}$．

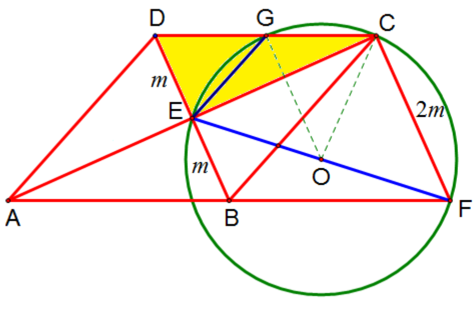

图 6

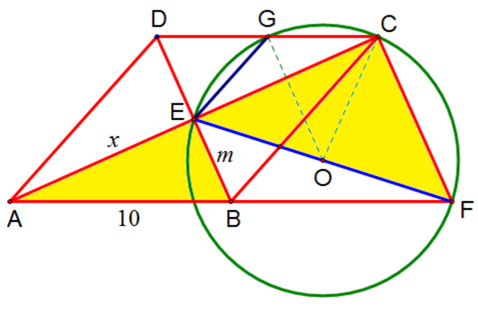

图 7

情形 2，如图 8，如果 $DG=DE=m$，那么 $GC=10-m$，$\angle DEG=\angle DGE$．

又因为 $OE=OG$，所以$\angle OEG=\angle OGE$．所以$\angle DEO=\angle DGO$．

根据等角的邻补角相等，得$\angle BEF=\angle CGO$．

又因为 $BE//CF$，所以$\angle BEF=\angle CFE$．

所以$\angle CGO=\angle CFE$．所以△CGO≌△CFO（如图 9 所示）．

所以 $GC=FC$．所以 $10-m=2m$．所以 $m=\dfrac{10}{3}$．

在 Rt△ABE 中，$AB=10$，$BE=m=\dfrac{10}{3}$，由勾股定理，得 $AE=\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$．

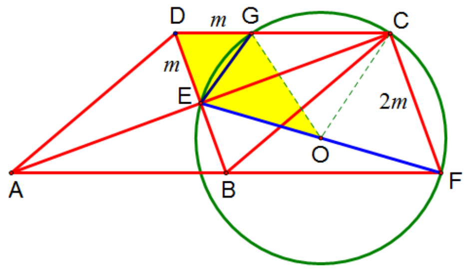

图 8

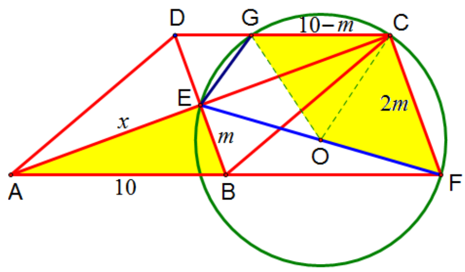

图 9

考点伸展

第（1）题求 AE 的长也可以这样思考：

如图 10，由 $BE//CF$，$CF=2BE$，可得 $FH=2EH=y$，$CH=2BH=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{20}{3}$．

由 $CH^2=EH\cdot FH=2y^2$，得 $y^2=\dfrac{200}{9}$．

如图 11，在 Rt△CEH 中，$x^2=y^2+CH^2=\dfrac{200}{9}+\dfrac{400}{9}=\dfrac{600}{9}$．

所以 $AE=x=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$．

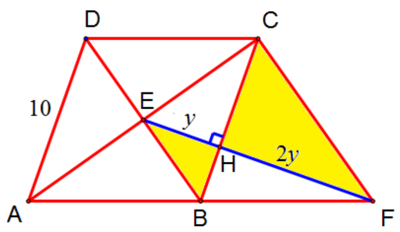

图 10

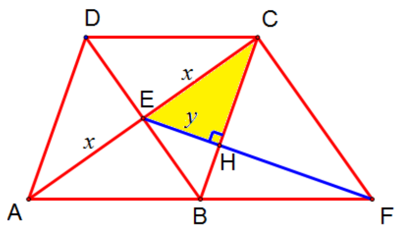

图 11