

例 2018 年上海市黄浦区中考模拟第 25 题

如图 1，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = \angle D = 90^\circ$ ， E 是边 AB 的中点．已知 $AD = 1$ ， $AB = 2$ ．

(1) 设 $BC = x$ ， $CD = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；

(2) 当 $\angle B = 70^\circ$ 时，求 $\angle AEC$ 的度数；

(3) 当 $\triangle ACE$ 为直角三角形时，求边 BC 的长．

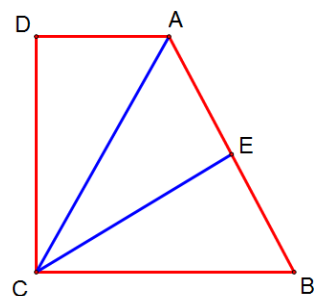


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 黄浦 25”，拖动点 B 绕点 A 旋转，可以体验到， y 随 x 变化的函数图像是一段圆弧，直角三角形 ACE 存在两种情况．

思路点拨

1. 本题情景中， $AB = 2AD$ ， E 是腰 AB 的中点，不由得让我们联想到构造梯形的中位线，而且中位线垂直平分 CD ．

2. 直角梯形构造辅助线的常见方法是把直角梯形分割为一个矩形和一个直角三角形，其实把直角梯形补成一个矩形，看起来更方便．

3. 分两种情况讨论直角三角形 ACE ，两种情况各有特殊性．

图文解析

(1) 如图 2，作 $BH \perp AD$ ，垂足为 H ．

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中， $BH = CD = y$ ， $AH = BC - AD = x - 1$ ， $AB = 2$ ．

由勾股定理，得 $y^2 + (x - 1)^2 = 2^2$ ．整理，得 $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ ．定义域是 $0 < x < 3$ ．

(2) 如图 3，设 CD 的中点为 F ，联结 EF ，那么 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线．

因为 $\angle D = 90^\circ$ ，所以 EF 垂直平分 CD ．所以 $\angle 1 = \angle 2$ ．

由 $EF \parallel AD \parallel BC$ ，可得 $\angle BAD = 180^\circ - \angle B = 110^\circ$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ．

在 $\triangle ADE$ 中，由 $AD = AE = 1$ ，可得 $\angle 3 = \angle 4 = 35^\circ$ ．

所以 $\angle AEC = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 35^\circ + 35^\circ + 35^\circ = 105^\circ$ ．

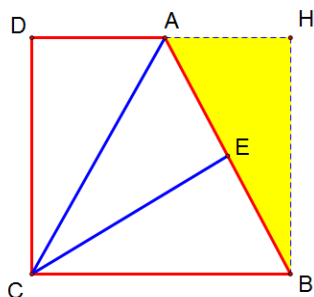


图 2

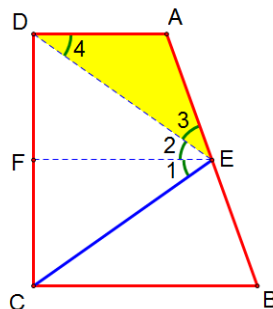


图 3

(3) 直角三角形 ACE 存在两种情况:

() ①如图 4, 当 $\angle AEC=90^\circ$ 时, 由于 $AD=AE=BE=1$, 一方面, CE 垂直平分 AB ; 另一方面, $\triangle ACD \cong \triangle ACE$.

于是可得 CA 、 CE 三等分 $\angle BCD$. 所以 $\angle ACB=60^\circ$.

所以 $\triangle ACB$ 是边长为 2 的等边三角形. 此时 $BC=2$.

②如图 5, 当 $\angle CAE=90^\circ$ 时, $\triangle CDA \sim \triangle AHB$.

所以 $\frac{CD}{DA} = \frac{AH}{HB}$. 所以 $\frac{y}{1} = \frac{x-1}{y}$, 即 $y^2 = x-1$.

解方程 $3+2x-x^2=x-1$, 得 $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. 此时 $BC = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

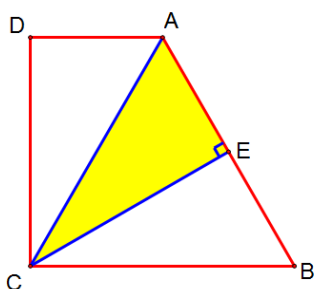


图 4

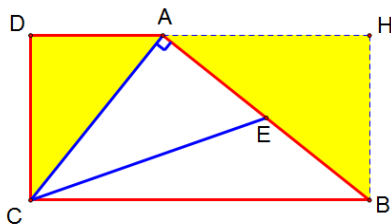


图 5

考点伸展

从第 (2) 题的解题过程可以看出, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = \angle 3$.

设 $\angle B = \alpha$, 那么 $\angle BAD = 180^\circ - \alpha$.

在 $\triangle ADE$ 中, 由于 $AD=AE$, 所以 $\angle 4 = \angle 3 = \frac{\alpha}{2}$. 所以 $\angle AEC = \frac{3\alpha}{2}$.

特别地, 当 $\alpha = 70^\circ$ 时, $\angle AEC = \frac{3\alpha}{2} = \frac{210^\circ}{2} = 105^\circ$.

第 (1) 题 y 随 x 变化的函数图像为什么是一段圆弧呢?

因为 $AB=2$ 为定值, 所以点 B 在以 A 为圆心、2 为半径的圆上运动.

如果以 D 为坐标原点、 AD 长为单位长度建立平面直角坐标系, 那么 $BC=x$ 的意义就是点 B 的横坐标, $CD=y$ 的意义就是点 B 的纵坐标的相反数.

所以 y 随 x 变化的函数图像如图 6 所示.

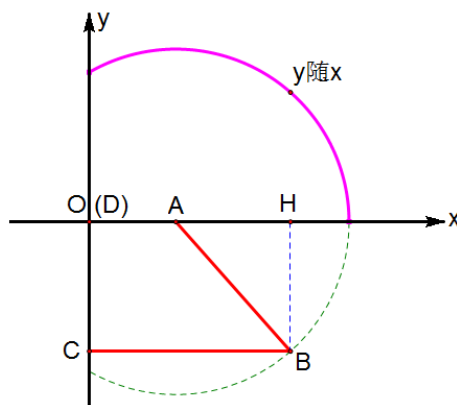


图 6