

例 2018 年上海市奉贤中考模拟第 18 题

如图 1，将 $\triangle ABC$ 的边 AB 绕着点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 AB' ，边 AC 绕着点 A 逆时针旋转 β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 得到 AC' ，联结 $B'C'$ 。当 $\alpha + \beta = 90^\circ$ 时，我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“双旋三角形”。如果等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a ，那么它的“双旋三角形”的面积是 _____ (用含 a 的代数式表示)。

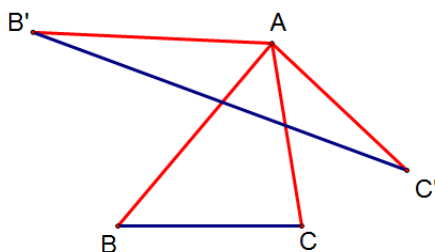


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 奉贤 18”，拖动左图中的点 B 绕点 A 旋转，可以体验到，对于一个确定的 $\triangle ABC$ 来说，它的“双旋三角形” $\triangle AB'C'$ 的大小和形状是确定的（如图 2 所示）。特别地，当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，它的“双旋三角形” $\triangle AB'C'$ 是顶角为 150° 的等腰三角形（如图 3 所示）。

答案 $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ 。思路如下：

如图 3，由 $\alpha + \beta = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，可得 $\angle B'AC' = 150^\circ$ 。

作 $C'H \perp B'A$ ，垂足为 H 。

在 $\text{Rt}\triangle AC'H$ 中， $AC' = a$ ， $\angle C'AH = 30^\circ$ ，所以 $C'H = \frac{1}{2}a$ ， $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。

所以 $\triangle AB'C'$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times B'A \times C'H = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$ 。

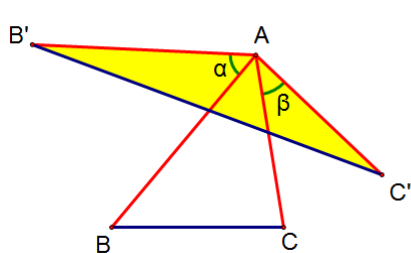


图 2

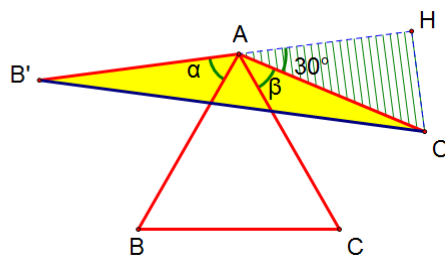


图 3