例　　　　2018 年上海市奉贤区中考模拟第 24 题

已知平面直角坐标系（如图 1），抛物线 $y=-x^2+2mx+3m^2$（$m>0$）与 x 轴交于点 A、B（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C，顶点为 D，对称轴为直线 l，过点 C 作直线 l 的垂线，垂足为点 E，联结 DC、BC．

（1）当点 $C(0, 3)$时，

① 求这条抛物线的表达式和顶点坐标；

② 求证：$\angle DCE=\angle BCE$；

（2）当 CB 平分$\angle DCO$ 时，求 m 的值．

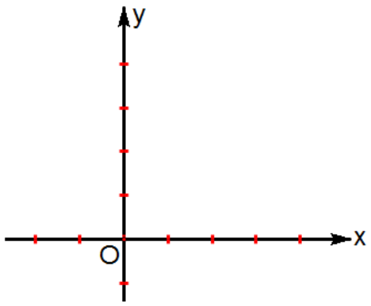

图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“18 奉贤 24”，拖动点 B 在 x 轴正半轴上运动，可以体验到，$\angle DCE$、$\angle CBO$ 和$\angle BCE$ 保持相等．当 CB 平分$\angle DCO$ 时，$\angle CBO=30°$ ．

思路点拨

1．第（1）题中 A、B、C、D、E 都是整数点，所有的线段长都是确定的，画出准确的示意图，把所有相等的角都标记出来．

2．第（1）题为第（2）题提供了方法借鉴，从特殊到一般．

图文解析

（1）① 由 $y=-x^2+2mx+3m^2$（$m>0$），得 $C(0, 3m^2)$.

当点 $C(0, 3)$时，$m=1$．

此时 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$．顶点为 $D(1, 4)$.

② 如图 2，由 $y=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$，得 $A(-1, 0)$，$B(3, 0)$.

已知 $C(0, 3)$，CE 与直线 $x=1$ 垂直，垂足为 E，可得 $E(1, 3)$.

因为 $\tan\angle DCE=\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{1}{1}=1$，$\tan\angle CBO=\dfrac{CO}{BO}=\dfrac{3}{3}=1$，所以$\angle DCE=\angle CBO$.

又因为$\angle CBO=\angle BCE$，所以$\angle DCE=\angle BCE$.

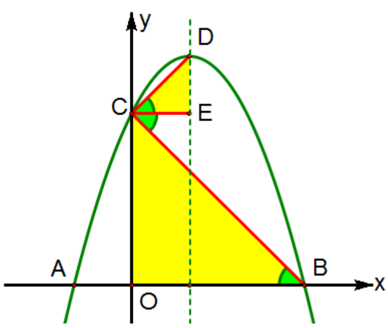

图 2

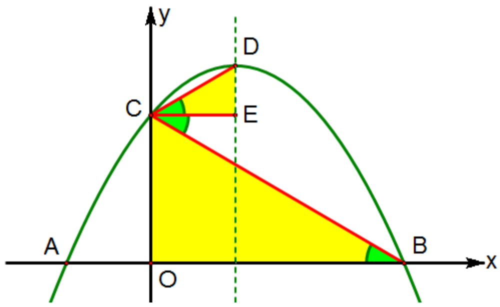

图 3

（2）如图 3 所示，由 $y=-x^2+2mx+3m^2=-(x+m)(x-3m)=-(x-m)^2+4m^2$（$m>0$），得 $A(-m, 0)$，$B(3m, 0)$，$C(0, 3m^2)$ ，$D(m, 4m^2)$， $E(m, 3m^2)$.

所以 $\tan\angle DCE=\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{m^2}{m}=m$，$\tan\angle CBO=\dfrac{CO}{BO}=\dfrac{3m^2}{3m}=m$，所以$\angle DCE=\angle CBO$.

又因为$\angle CBO=\angle BCE$，所以$\angle DCE=\angle CBO=\angle BCE$.

设$\angle DCE=\angle CBO=\angle BCE=\alpha$.

当CB平分$\angle DCO$时，$\angle DCB=\angle OCB=2\alpha$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OBC$中，$\angle OCB=2\alpha$，$\angle CBO=\alpha$，所以$\alpha=30°$．

所以$\tan\angle OBC=\dfrac{3m^2}{3m}=m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

考点伸展

在本题情境下，A、B、C、D、E等5个点的坐标都可以用m表示，那么我们就可以提出很多问题.

例如，如果$\triangle BCD$是直角三角形，求m的值.

如图4，当$\angle BCD=90°$时，$\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{CO}{OB}$．所以$\dfrac{m}{m^2}=\dfrac{3m^2}{3m}$．解得$m=1$.

如图5，当$\angle BDC=90°$时，$\dfrac{BH}{HD}=\dfrac{DF}{FC}$．所以$\dfrac{4m^2}{2m}=\dfrac{m}{m^2}$．解得$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

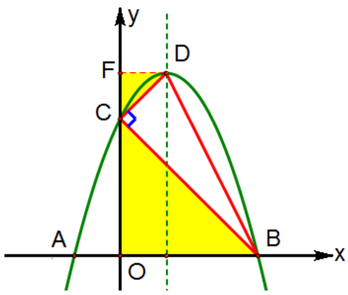

图4

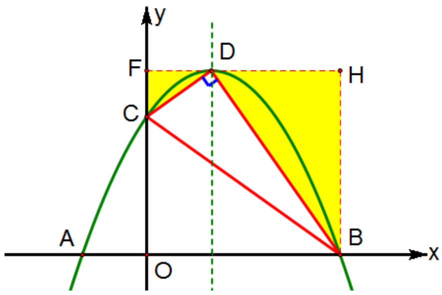

图5

再如，如果$\triangle ABC$是等腰三角形，求m的值.

如图6，当$AB=AC$时，由$AB^2=AC^2$，得$(4m)^2=m^2+(3m^2)^2$．解得$m=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

如图7，当$BA=BC$时，由$BA^2=BC^2$，得$(4m)^2=(3m)^2+(3m^2)^2$．解得$m=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

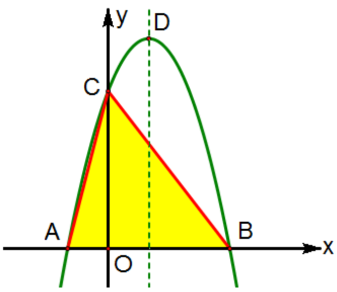

图6

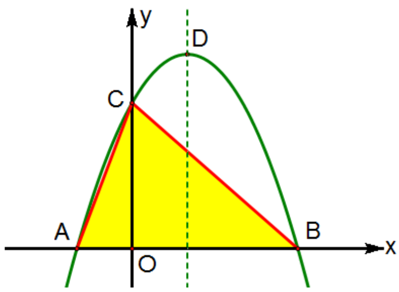

图7