例　　2018年上海市奉贤区中考模拟第25题

如图1，在半径为2的扇形 AOB 中，$\angle AOB=90°$，点 C 在半径 OB 上，AC 的垂直平分线交 OA 于点 D，交弧 AB 于点 E，联结 BE、CD．

（1）若 C 是半径 OB 中点，求 $\angle OCD$ 的正弦值；

（2）若 E 是弧 AB 的中点，求证：$BE^2=BO\cdot BC$；

（3）联结 CE，当△DCE 是以 CD 为腰的等腰三角形时，求 CD 的长．

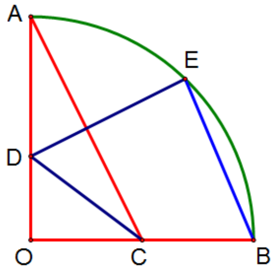
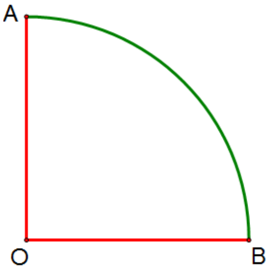
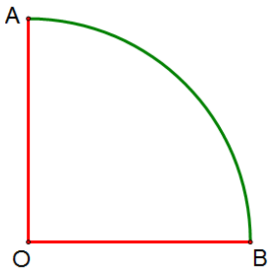


图1



备用图



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18奉贤25”，拖动点 C 在 OB 上运动，可以体验到，当 $AD=AE$ 时，四边形 $ADCE$ 是菱形，此时 $EC\perp OB$；当 $DA=DE$ 时，点 D 与点 O 重合．

思路点拨

1．第（1）题就是解直角三角形 DOC，设斜边 CD 为 x．

2．第（2）题根据相等的弧所对的弦相等，及对应线段相等，可得 $EB=EA=EC$．

3．联结半径 OE 是一条关键的辅助线．

4．讨论等腰三角形 DCE 转化为讨论等腰三角形 DAE 比较方便．

图文解析

（1）如图2，设 $AD=CD=x$．

在Rt△DOC 中，$DO=2-x$，$CO=1$，由勾股定理，得 $x^2=(2-x)^2+1^2$．

解得 $x=\dfrac{5}{4}$．所以 $DO=2-x=2-\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$．所以 $\sin\angle OCD=\dfrac{DO}{CD}=\dfrac{3}{5}$．

（2）如图3，若 E 是弧 AB 的中点，那么 $EA=EB$．

又因为 $EA=EC$，所以 $EB=EC$．

联结 OE，那么 $OE=OB$．

又因为 $\angle B$ 是两个等腰三角形的公共底角，所以△OBE∽△EBC．

所以 $\dfrac{BE}{BO}=\dfrac{BC}{BE}$．于是得到 $BE^2=BO\cdot BC$．

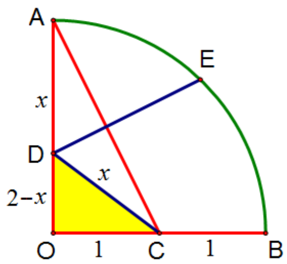


图2

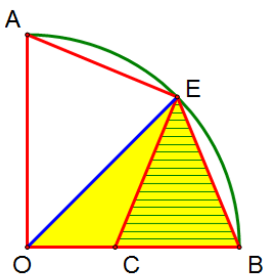


图3

（3）如图 4，因为△DCE≌△DAE，我们讨论以 AD 为腰的等腰三角形 DAE：

①如图 5，当 AD＝AE 时，由于 AD＝CD，AE＝CE，所以四边形 $ADCE$ 是菱形

此时 $EC\perp OB$．

因为 $OC^2=CD^2-DO^2=x^2-(2-x)^2=4x-4$，$OC^2=OE^2-EC^2=2^2-x^2$，

所以 $4x-4=2^2-x^2$．

整理，得 $x^2+4x-8=0$．解得 $CD=x=2\sqrt{3}-2$．

②如图 6，当 DA＝DE 时，点 D 在 AE 的垂直平分线上．

而弦 AE 的垂直平分线一定经过原点 O，所以点 D 与点 O 重合．

此时点 C 与点 B 重合，CD＝2．

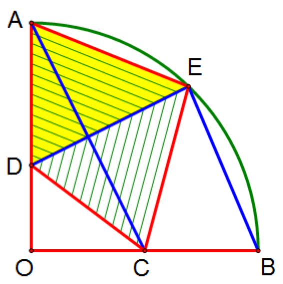


图 4

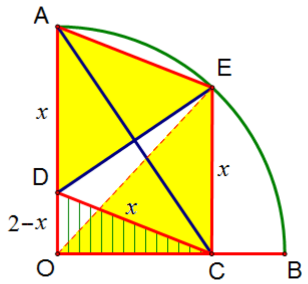


图 5

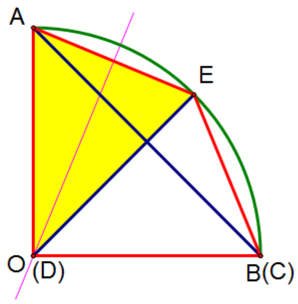


图 6

考点伸展

等腰三角形 DAE 的第 3 种情况 EA＝ED 怎么讨论呢？

如图 7，讨论 ED＝DC 比较方便．此时点 E 在 CD 的垂直平分线上．

由垂径定理，可知半径 OE 垂直平分弦 AB，所以 $DC//AB$．

所以△DOC 是等腰直角三角形．此时 $DC=\sqrt{2}DO$．

解方程 $x=\sqrt{2}(2-x)$，得 $CD=x=4-2\sqrt{2}$．

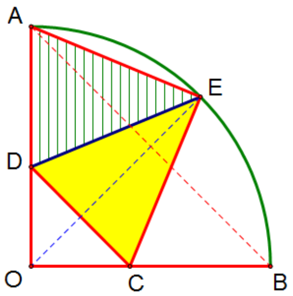


图 7