例　　　　2018年上海市杨浦区中考模拟第24题

如图1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，直线 $y=x+4$ 经过点 A、C，点 P 为抛物线上位于直线 AC 上方的一个动点．

（1）求抛物线的表达式；

（2）如图1，当 $CP//AO$ 时，求∠PAC 的正切值；

（3）当以 AP、AO 为邻边的平行四边形第四个顶点恰好也在抛物线上时，求此时点 P 的坐标．

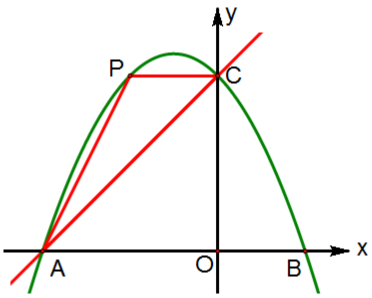
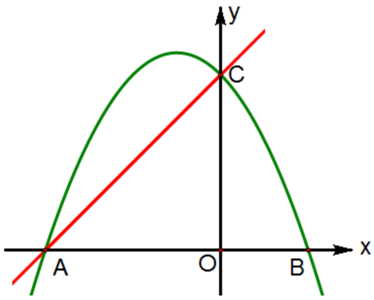


图1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“18杨浦24”，拖动右图中的点 P 在 AC 上方的抛物线上运动，可以体验到，四边形 $PAOQ$ 保持平行四边形的形状，点 Q 比点 P 的横坐标大4，纵坐标相等．

思路点拨

1．第（2）题的△PAC 中，PC、AC 及夹角是确定的，作 AC 边上的高 PM 就可以解决∠PAC 的正切值了．

2．第（3）题根据 P、Q 两点的纵坐标相等列方程．设点 P 的横坐标为 m，那么点 Q 的横坐标为 $m+4$．

图文解析

（1）由 $y=x+4$，得 $A(-4, 0)$，$C(0, 4)$．

设抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x+4)(x-x_2)$，代入 $C(0, 4)$，得 $2x_2=4$．

解得 $x_2=2$．所以 $y=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2-x+4$．

（2）如图2，由 $A(-4, 0)$、$C(0, 4)$，可得 $AC=4\sqrt{2}$，∠$OAC=45°$．

当 $CP//AO$ 时，∠C=∠$OAC=45°$．

由 $CP//AO$，可知 P、C 关于抛物线的对称轴 $x=-1$ 对称，所以 $PC=2$．

作 $PM\perp AC$ 于 M．

在等腰直角三角形 PCM 中，$PM=CM=\sqrt{2}$．

在Rt△PAM 中，$AM=AC-CM=3\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle PAC=\frac{PM}{AM}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$．

（3）如图 3，设点 P 的横坐标为 m．

当 $PQ//AO$，$PQ=AO=4$ 时，点 Q 的横坐标为 $m+4$，P、Q 两点的纵坐标相等．

当点 Q 落在抛物线上时，$-\dfrac{1}{2}m^2-m+4=-\dfrac{1}{2}(m+4)^2-(m+4)+4$．

解得得 $m=-3$．此时点 P 的坐标为$(-3,\dfrac{5}{2})$．

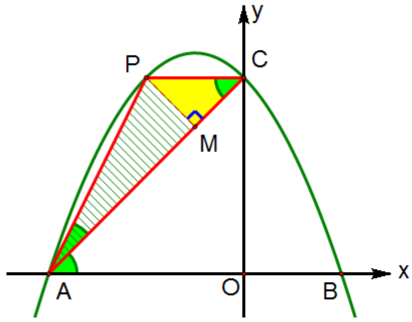


图 2

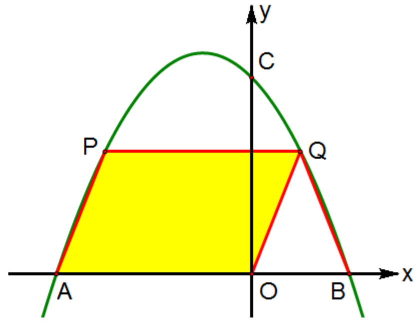


图 3

考点伸展

第（3）题可以这样思考：

如图 3，如果点 Q 落在抛物线上，四边形 $PAOQ$ 是平行四边形，那么四边形 $PABQ$ 是等腰梯形．

所以△QOB 是等腰三角形，$QO=QB$．

所以点 Q 在 OB 的垂直平分线上，点 Q 的横坐标为 1．

将点 Q 向左平移 4 个单位，得点 P 的横坐标为－3．此时 $P(-3,\dfrac{5}{2})$．