例 2018 年上海市杨浦区中考模拟第 25 题

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AB=DC=5$，$AD=1$，$BC=9$，点 P 为边 BC 上一动点，作 $PH\perp DC$，垂足 H 在边 DC 上，以点 P 为圆心、PH 为半径画圆，交射线 PB 于点 E.

（1）当圆 P 过点 A 时，求圆 P 的半径；

（2）如图 2，分别联结 EH 和 EA，当△ABE 与△CEH 相似时，以点 B 为圆心、r 为半径的圆 B 与圆 P 相交，试求圆 B 的半径 r 的取值范围；

（3）如图 3，将劣弧 EH 沿直线 EH 翻折交 BC 于点 F，试通过计算说明线段 EH 和 EF 的比值为定值，并求此定值.

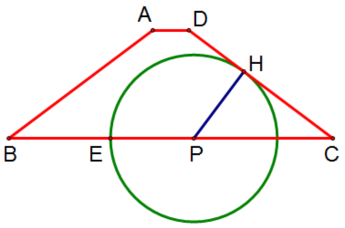

图 1

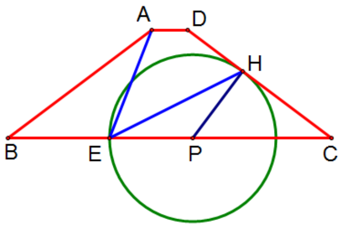

图 2

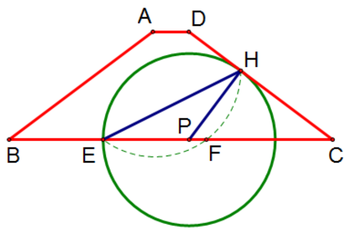

图 3

动感体验

请打开几何画板文件名“18 杨浦 25”，拖动点 P 在 BC 上运动，可以体验到，当圆 P 经过点 A 时，恰好 $PA\perp AD$. 点击屏幕左下方的按钮“第（2）题”，拖动点 P 在 BC 上运动，可以体验到，只存在△CEH∽△BAE 的情况. 点击按钮“第（3）题”，可以体验到，EF'与直径 EQ 的关系是确定的，EH 与直径 EQ 的关系也是确定的.

思路点拨

1．过等腰梯形上底的两个顶点向下底作垂线段 AA'和 DD'，把图形中所有线段的长都标记出来.

2．Rt△CPH 的三边比为 3∶4∶5，设圆 P 的半径 $PH=3m$，那么用 m 可以表示 CH、CP、CE 的长，于是可得到 $CE=2CH$，说明△CEH 的形状是确定的.

3. 第(3)题先将点 F 翻折回去找到点 F'，在 Rt△$F'EQ$ 中得到 EF'与直径 EQ 的关系. 再探究 EH 与 EQ 的关系. 从而得到 EH 与 EF 的关系.

图文解析

（1）如图 4，作 $AA'\perp BC$ 于 A'，作 $DD'\perp BC$ 于 D'，那么 $A'D'=AD=1$，$BA'=CD'=4$.

在 Rt△DCD'中，$DC=5$，$CD'=4$，所以 $DD'=3$. 所以 $\sin\angle C=\dfrac{3}{5}$.

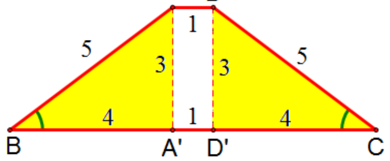

图 4

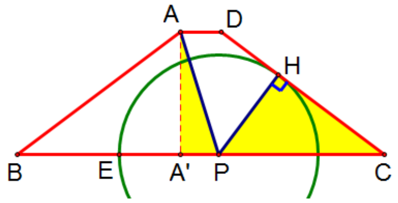

图 5

如图 5，在 Rt△PCH 中，设 $PH=R=3m$，$PC=5m$.

如果圆 P 经过点 A，那么 $PA=R=3m$.

在 Rt△APA'中，$AA'=3$，$A'P=A'C-PC=5-5m$.

由勾股定理，得$(3m)^2=3^2+(5-5m)^2$．整理，得 $8m^2-25m+17=0$.

解得 $m=1$，或 $m=\dfrac{17}{8}$.

如图 6，当 H 与 D 重合时，$R=PH$ 达到最大值，最大值为 $DC\tan\angle C=5\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{4}$.

当 $m=1$ 时，圆 P 的半径 $R=3m=3$（如图 7 所示）.

当 $m=\dfrac{17}{8}$ 时，$3m=\dfrac{51}{8}>\dfrac{15}{4}$．此时点 H 在 CD 的延长线上，不符合题意.

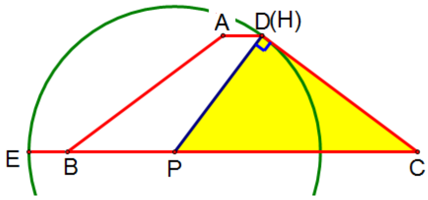

图 6

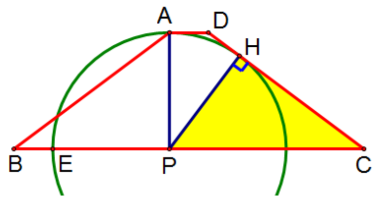

图 7

（2）第一步，如图 8，在 Rt△PCH 中，设 $PH=3m$，$CH=4m$，$PC=5m$.

在△CEH 中，$CE=PC+PE=5m+3m=8m$．所以 $CE=2CH$.

第二步，因为∠B=∠C，所以△ABE 与△CEH 相似分两种情况讨论：

①当 $\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{CE}{CH}=2$ 时，$\dfrac{5}{9-8m}=2$．解得 $m=\dfrac{13}{16}$（如图 9 所示）.

②当 $\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{CH}{CE}=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{5}{9-8m}=\dfrac{1}{2}$．解得 $m=-\dfrac{1}{8}$（不符合题意，舍去）.

第三步，如图 9，当 $m=\dfrac{13}{16}$ 时，$BE=9-8m=9-\dfrac{13}{2}=\dfrac{5}{2}$.

设圆 P 与 BC 的另一个交点为 Q，那么 $BQ=BE+6m=\dfrac{5}{2}+\dfrac{39}{8}=\dfrac{59}{8}$.

如图 10，当圆 B 与圆 P 外切时，圆 B 的半径 $r=BE=\dfrac{5}{2}$；内切时，$r=BQ=\dfrac{59}{8}$.

所以当圆 B 与圆 P 相交时，$\dfrac{5}{2}<r<\dfrac{59}{8}$.

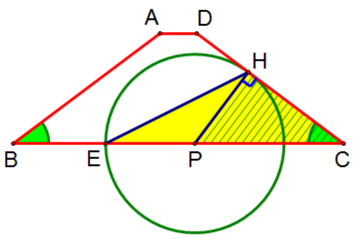

图 8

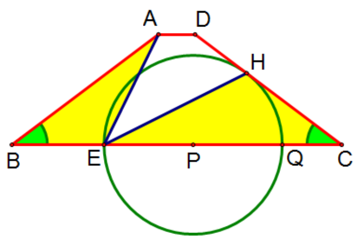

图 9

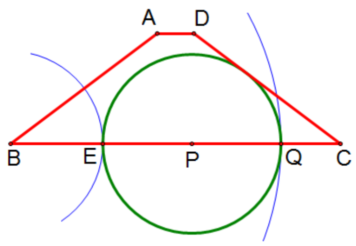

图 10

（3）第一步，如图 11，作点 F 关于 EH 的对应点 F'，那么∠$F'EF$=2∠HEF=∠HPC.

所以在 Rt△$F'EQ$ 中，$EF'=\dfrac{3}{5}EQ$.

第二步，如图 12，在△CHQ 和△CEH 中，$CH=4m$，$CE=8m$，$CQ=8m-6m=2m$.

于是可得$\frac{CQ}{CH}=\frac{CH}{CE}=\frac{1}{2}$．所以△$CHQ$∽△$CEH$．所以$\frac{HQ}{EH}=\frac{CH}{CE}=\frac{1}{2}$．

所以在 Rt△EHQ 中，$EH=\frac{2\sqrt{5}}{5}EQ$．

第三步，由 EF＝EF'＝$\frac{3}{5}EQ$ 和 $EH=\frac{2\sqrt{5}}{5}EQ$，得$\frac{EH}{EF}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$．

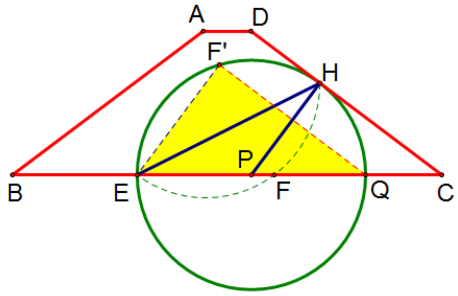

图 11

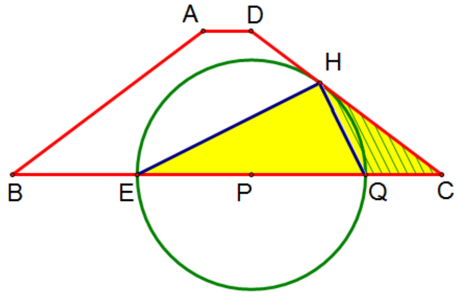

图 12

考点伸展

上面解题过程中第（3）题第二步也可以这样思考：既然△CEH 的形状是确定的，那么∠CEH 的正切值一定是可以计算的．

如图 13，在△CEH 中，已证 CE＝2CH，sin∠C＝$\frac{3}{5}$，可设 CH＝5k，CE＝10k．

作 HG⊥CE 于 G，那么 HG＝3k，CG＝4k．所以 EG＝10k－4k＝6k．

所以 tan∠CEH＝$\frac{HG}{EG}=\frac{3k}{6k}=\frac{1}{2}$．

于是在 Rt△HEQ 中，$\frac{HQ}{EH}$＝tan∠CEH＝$\frac{1}{2}$．所以$\frac{EH}{EQ}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

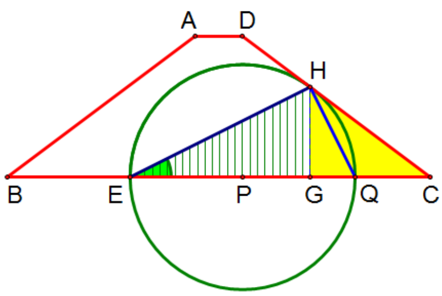

图 13