例　　　　2018年上海市徐汇区中考模拟第24题

如图1，已知直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 B、C，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 过点 B、C，且与 x 轴的另一个交点为 A.

（1）求该抛物线的解析式；

（2）点 M 是线段 BC 上一点，过点 M 作直线 l//y 轴交该抛物线于点 N，当四边形 $OMNC$ 是平行四边形时，求它的面积；

（3）联结 AC，设点 D 是该抛物线上一点，且满足∠DBA＝∠CAO，求点 D 的坐标.

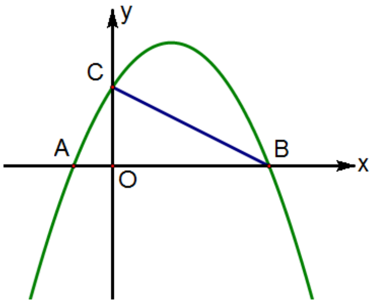

图1

动感体验

请打开几何画板文件名“18徐汇24”，拖动左图中的点 M 在线段 BC 上运动，可以体验到，当 NM＝CO 时，四边形 $OMNC$ 是平行四边形．观察右图，可以体验到，满足∠DBA＝∠CAO 的点 D 存在两种情况，其中点 D 在 x 轴上方时，四边形 $CABD$ 是等腰梯形.

思路点拨

1．第（2）题先根据 NM＝CO 列方程求点 M、N 的横坐标，再求平行四边形的面积.

2．第（3）题按照点 D 的位置分两种情况讨论，其中点 D 在 x 轴上方时，根据等腰梯形与抛物线的对称轴重合，可以直接写出点 D 的坐标.

当点 D 在 x 轴下方时，根据等角的正切值相等列方程.

图文解析

（1）由 $y=-\frac{1}{2}x+2$，得 $B(4, 0)$，$C(0, 2)$.

设抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-4)(x-x_2)$，代入点 $C(0, 2)$，得$-2x_2=2$.

解得 $x_2=-1$.

所以 $y=-\frac{1}{2}(x-4)(x+1)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

（2）设 $M(x,-\frac{1}{2}x+2)$，$N(x,-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2)$.

如图2，如果四边形 $OMNC$ 是平行四边形，那么 NM＝CO＝2.

解方程 $(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2)-(-\frac{1}{2}x+2)=2$，整理，得 $x^2-4x+4=0$.

解得 $x_1=x_2=2$.

所以 $S_{平行四边形OMNC}=2\times2=4$.

（3）如图 3，$\angle DBA=\angle CAO$ 存在两种情况．

①当点 D 在 x 轴上方时，四边形 $CABD$ 是等腰梯形．

此时 C、D 两点关于抛物线的对称轴 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称，所以 $D(3, 2)$．

②当点 D 在 x 轴下方时，作 $DH\perp x$ 轴于 H．

由 $\tan\angle DBH=\tan\angle CAO$，得 $\dfrac{DH}{BH}=\dfrac{CO}{AO}=2$．所以 $DH=2BH$．

设 $D(m,-\dfrac{1}{2}(m-4)(m+1))$，那么 $\dfrac{1}{2}(m-4)(m+1)=2(4-m)$．

解得 $m=-5$，或 $m=4$（与 B 重合，舍去）．此时 $D(-5,-18)$．

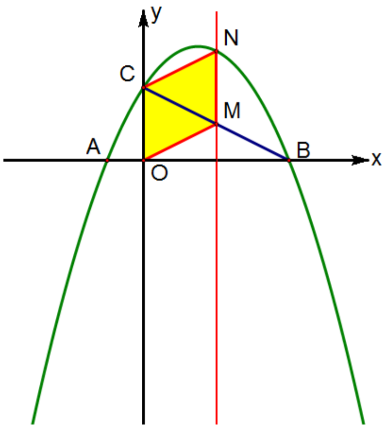

图 2

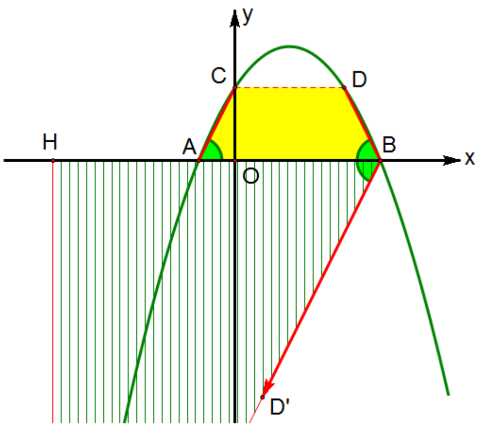

图 3

考点伸展

第（3）题②中设点 D 的纵坐标，为什么用抛物线的交点式表示比较方便呢？

求直线 BD 与抛物线的交点，其中一个交点 $B(4, 0)$在 x 轴上，所以直线 BD 和抛物线的解析式中，都含有一个因式$(x-4)$．这样用因式分解法解方程比较方便．