2011-2017 年数学压轴题集锦

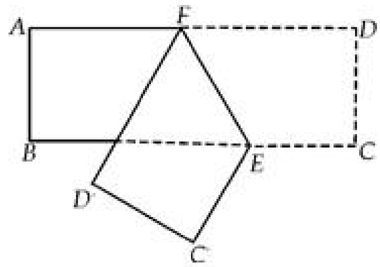
填空题

1. （2017 年 18 题）我们规定：一个正 n 边形（ n 为常数,n≥4) 的最短对角线与最长对角线长度的比值叫做这个正 n 边形的“特征值”。记为λ_n，那么λ_6=_______.

2. (2016 年 18 题). 如图，矩形 $ABCD$ 中， $BC=2$，将矩形 $ABCD$ 绕点 D 顺时针旋转 90°， 点 A 、C 分别落在点 A'、C' 处，如果点 A'、C'、 B 在同一条直线上，那么 $\tan\angle ABA'$ 的值为

3. （2015 年 18 题）已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=8$，∠BAC=30°，将 $\triangle ABC$ 绕点 A旋转，使点 B 落在原 $\triangle ABC$ 的点 C 处，此时点 C 落在点 D 处，延长线段 AD，交原 $\triangle ABC$ 的边 BC 的延长线于点 E，那么线段 DE 的长等于_______.

4. （2014 年 18 题）如图,已知在矩形 ABCD 中,点 E 在边 BC 上,BE=2CE,将矩形沿着过点 E的直线翻折后,点 C、D 分别落在边 BC 下方的点 C'、D'处,且点 C'、D'、B 在同一条直线上,折痕与边 AD 交于点 F,D'F 与 BE 交于点 G,设 AB=t,那么 $\triangle EFG$ 的周长为_________(用含 t 的代数式表示).



第 18 题图

5. （2013 年18 题）如图 5，在△ ABC 中， $AB=AC$， $BC=8$， $\tan C=\frac{3}{2}$，如果将△ ABC 沿直线 l 翻折后，点 B 落在边 AC 的中点处，直线 l 与边 BC 交于点 D，那么 BD 的长为__________.

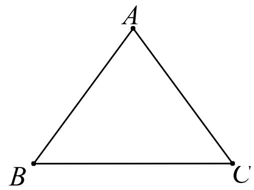
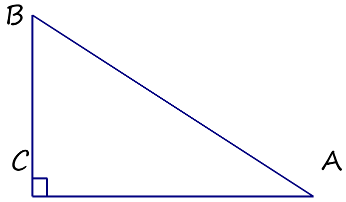
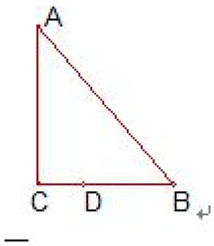


图 5

6. （2012 年18 题）如图，在 Rt△ ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle A=30^{\circ}$，$BC=1$，点 D 在 AC 上，将△ ADB 沿直线 BD 翻折后，将点 A 落在点 E 处，如果 $AD\perp ED$，那么线段 DE 的长为____________.



7. （2011 年18 题）Rt△ABC 中，已知$\angle C=90^{\circ}$， $\angle B=50^{\circ}$，点 D 在边 BC 上，$BD=2CD$（图 4）．把△ABC 绕着点 D 逆时针旋转 m（$0<m<180$）度后，如果点 B 恰好落在初始 Rt△ABC 的边上， 那么 $m=$______.



解答题

1.（2017 年25 题）如图 9，已知⊙O 的半径长为 1，AB、AC 是⊙O 的两条弦， 且 AB=AC，BO 的延长线交 AC 于点 D，联结 OA、OC .

(1) 求证：△OAD∽△ABD；

(2) 当△ OCD 是直角三角形时，求 B、C 两点的距离；

(3) 记△ AOB、△AOD、△COD 的面积分别是 S1、S2、S3，如果 S2 是 S1 和 S3 的比例中项，求 OD 的长。

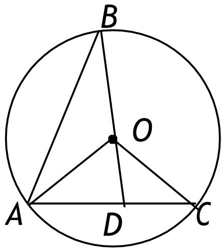
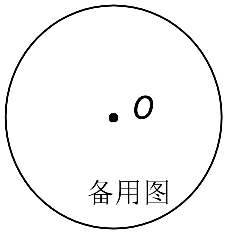


图9



2.（2016 年25 题）. 如图所示，梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$\angle B = 90°$，$AD = 15$，$AB = 16$，$BC = 12$，点 E 是边 AB 上的动点，点 F 是射线 CD 上一点，射线 ED 和射线 AF 交于点 G，且 $\angle AGE = \angle DAB$；

（1）求线段 CD 的长；

（2）如果 ΔAEG 是以 EG 为腰的等腰三角形，求线段 AE 的长；

（3）如果点 F 在边 CD 上（不与点 C、D 重合），设 $AE = x$，$DF = y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；

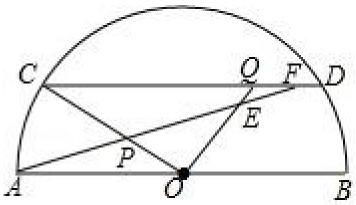
3. （2015 年25 题）已知，如图，AB 是半圆 O 的直径，弦 $CD // AB$，动点 P, Q 分别在

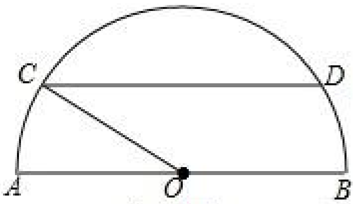
线段OC,CD上，且 $DQ=OP,AP$的延长线与射线OQ相交于点 E，与弦CD相交于点 F（点 F 与点C， D不重合）， $AB=20,\cos\angle AOC=\frac{4}{5}$ 设$OP=x$， $\triangle CPF$ 的面积为 y .

（1）求证： $AP=OQ$；

（2）求 y 关于x的函数关系式，并写出它的定义域；

（3）当$\triangle OPE$ 是直角三角形时，求线段OP 的长.





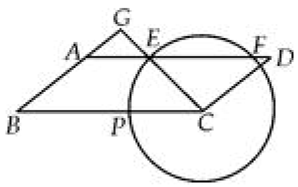
备用图

4. （2014 年25 题）如图,已知在平行四边形 ABCD 中,AB=5,BC=8,cosB=$\frac{4}{5}$,点 P 是边 BC 上的动点,以 CP 为半径的圆 C 与边 AD 交于点 EF(点 F 在点 E 的右侧),射线 CE 与射线 BA 交于点 G.

(1) 当圆 C 经过点 A 时，求 CP 的长；

(2) 联结 AP，当 AP//CG 时，求弦 EF 的长；

(3) 当$\triangle AGE$是等腰三角形时，求圆 C 的半径长.



第 25 题图

备用图

5. （2013 年25 题）在矩形 $ABCD$中，点 P是边 AD上的动点，联结 BP，线段 BP 的垂直平分线交边 BC 于点Q，垂足为点 M，联结QP（如图 10）. 已知 $AD=13$， $AB=5$

，设$\mathrm{AP}=\mathrm{x}$，$\mathrm{BQ}=\mathrm{y}$.

（1）求 y 关于 x 的函数解析式，并写出 x 的取值范围；

（2）当以 AP 长为半径的⊙ P 和以QC 长为半径的⊙Q 外切时，求 x 的值；

（3）点 E 在边CD 上，过点 E 作直线QP 的垂线，垂足为 F，如果 $EF=EC=4$，求

x 的值．

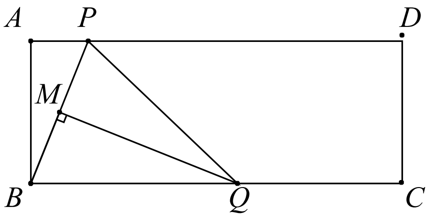
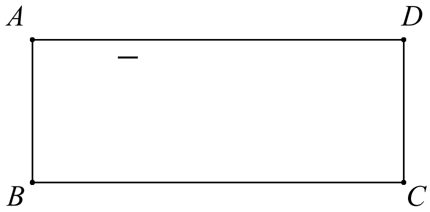


图 10



备 用 图

6. （2012 年 25 题）如图，在半径为 2 的扇形 AOB 中，$\angle AOB=90^\circ$，点 C 是弧 AB 上的一个动点（不与点 A、B 重合）$OD\perp BC$，$OE\perp AC$，垂足分别为 D、E．

（1）当 $BC=1$ 时，求线段 OD 的长；

（2）在△ DOE 中是否存在长度保持不变的边？如果存在，请指出并求其长度，如果不存在，请说明理由；

（3）设 $BD=x$，△ DOE 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域．

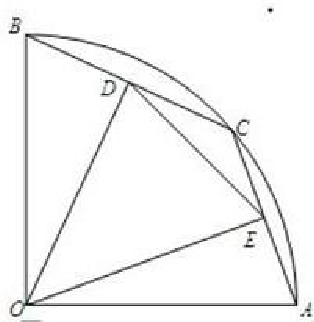


图 8

7. （2011 年 25 题）在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$BC=30$，$AB=50$．点 P 是 AB 边上任意一点，直线 $PE\perp AB$，与边 AC 或 BC 相交于 E．点 M 在线段 AP 上，点 N 在线段 BP 上，$EM=EN$，$\sin\angle EMP=\frac{12}{13}$．

（1）如图 1，当点 E 与点 C 重合时，求 CM 的长；

（2）如图 2，当点 E 在边 AC 上时，点 E 不与点 A、C 重合，设 $AP=x$，$BN=y$，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域；

（3）若△AME∽△ENB（△AME 的顶点 A、M、E 分别与△ENB 的顶点 E、N、B 对应），求 AP 的长．

图 1

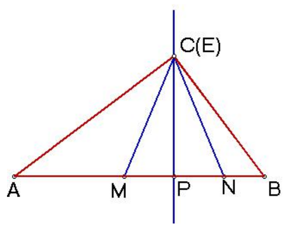
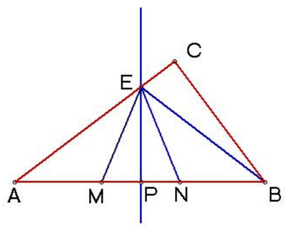
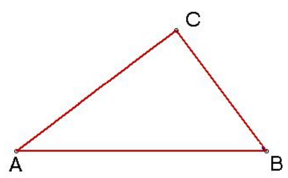


图 2



备用图



答案与详解

填空题

1. （17 年18 题）

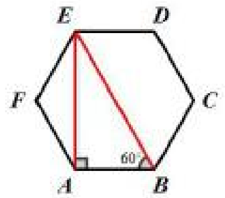
18、$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

能力要求：解决简单问题的能力/初步掌握观察、操作、比较、类比、归纳的方法；懂得“从特殊到一般”、“从一般到特殊”及“转化”等思维策略。

知识内容：图形与几何/多边形及其有关概念，锐角三角比

点评：本题只需弄清概念即可，针对问题$n=6$的情况，画图，然后明确角度，将提干的定义转化为合适的三角比，本题即可求解。

解析：如图，在正六边形$ABCDEF$中，AE是一条最短的对角线，EB是一条最长的对角线.，$\angle CBA=60°$，所以$\frac{AE}{EB}=\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



2. （16 年18 题）

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

3. （15 年18 题）

$4\sqrt{3}-4$

4. （14 年18 题）

$2\sqrt{3}t$

5. （13 年18 题）

$\frac{15}{4}$

6. （12 年18 题）

$\sqrt{3}$-1

7. （11 年18 题）

80 或 120

解答题

1. （17 年25 题）

25.（本题满分 14 分，第（1）小题满分 4 分，第（2）小题满分 5 分，第（3）小题满分 5 分）

能力要求：

空间观念/能够从复杂的图形中区分基本图形，并能分析其中的基本元素及其关系。

空间观念/能由基本图形的性质导出复杂图形的性质。

逻辑推理能力/能简明和有条理地表述演绎推理过程，合理解释推理演绎的正确性

运算能力/能通过运算进行推理和探求。

解决简单问题的能力/初步掌握观察、操作、比较、类比、归纳的方法；懂得“从特殊到一般”、“从一般到特殊”及“转化”等思维策略。

知识内容：

（1）图形与几何/圆的概念

图形与几何/相似三角形的判定和性质及其应用

（2）图形与几何/等腰三角形的性质与判定

（3）数与运算/比、比例和百分比的有关概念及比例的基本性质

方程与代数/一元二次方程的概念及解法

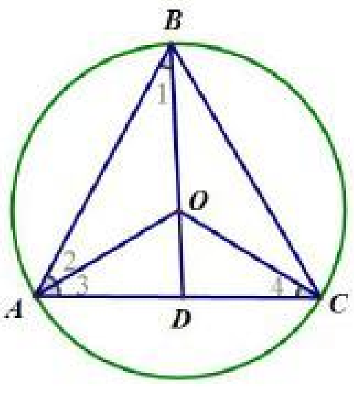
解析：

（1）如图，因为$OA=OB=OC$，所以$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

所以$2\angle 1+\angle AOB=2\angle 3+\angle AOC$

因为弦$AB=AC$，所以圆心角$\angle AOB=\angle AOC$，所以$\angle 1=\angle 3$.

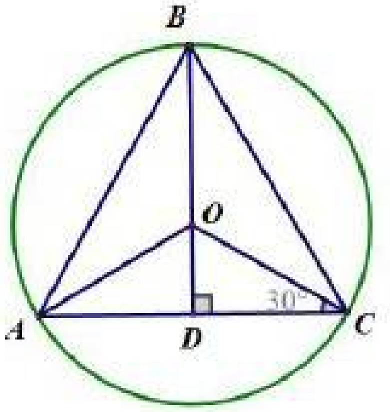
又因为$\angle ADO=\angle BDA$，所以$\triangle OAD\sim\triangle ABD$.



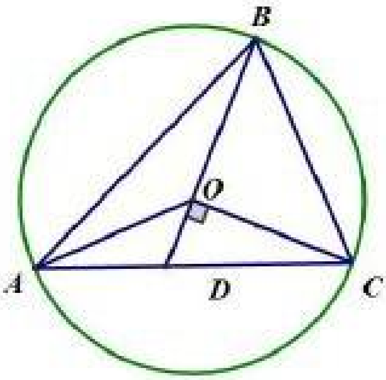
（2）$\triangle OCD$为直角三角形有两种情况：

①如图，当$\angle ODC=90°$时，$OD\perp AC$，所以BD垂直平分AC，$\therefore AB=CB$.

所以$\triangle ABC$是等边三角形，O是等边三角形的中心，此时$BC=AC=2DC=2OC\cos 30^{\circ}=\sqrt{3}$.



②如图，当 $\angle COD=90°$ 时，$\triangle BOC$ 是等腰直角三角形，此时 $BC=\sqrt{2}OC=\sqrt{2}$.



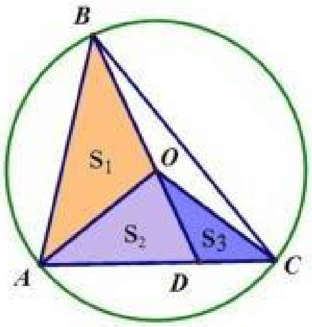
（3）如图，因为 $AB=AC$，所以 O 点到弦 AB，AC 的距离相等

所以：$S_1:S_2:S_3=AB:AD:DC$

当 S_2 是 S_1 和 S_3 的比例中项时，$S_2{}^2=S_1\cdot S_3\Rightarrow AD^2=AB\cdot CD$ 即：$AD^2=AC\cdot CD$

所以点 D 是线段 AC 的黄金分割点，$\dfrac{S_3}{S_2}=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

所以 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{S_3}{S_2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $OD=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}OB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$



答案：

（1）证明见解析

（2）$\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{2}$

（3）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. （16 年 25 题）

解：（1）过点 D 作 $DH \perp AB$，垂足为点 H；

在 Rt ΔDAH 中，$\angle AHD = 90^\circ$，$AD = 15$，$DH = 12$；

$\therefore AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 9$；

又 $\because AB =$ 　　　$\therefore CD = BH = AB - AH = 7$；

16

（2）$\because \angle AEG = \angle DEA$，又 $\angle AGE = \angle DAE$ 　$\therefore \Delta AEG \backsim \Delta DEA$；

由 ΔAEG 是以 EG 为腰的等腰三角形，可得 ΔDEA 是以 AE 为腰的等腰三角形；

① 若 $AE = AD$，$\because AD = 15$ 　$\therefore AE = 15$；

② 若 $AE = DE$，过点 E 作 $EQ \perp AD$，垂足为 Q 　$\therefore AQ = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{15}{2}$

在 Rt ΔDAH 中，$\angle AHD = 90^\circ$，$\cos\angle DAH = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{3}{5}$；

在 Rt ΔAEQ 中，$\angle AQE = 90^\circ$，$\cos\angle QAE = \dfrac{AQ}{AE} = \dfrac{3}{5}$ 　$\therefore AE = \dfrac{25}{2}$；

综上所述：当 ΔAEG 是以 EG 为腰的等腰三角形时，线段 AE 的长为 15 或 $\dfrac{25}{2}$；

（3）在 Rt ΔDHE 中，$\angle DHE = 90^\circ$，$DE = \sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{12^2 + (x-9)^2}$；

$\because \Delta AEG \backsim \Delta DEA$ 　$\therefore \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{EG}{AE}$ 　$\therefore EG = \dfrac{x^2}{\sqrt{12^2 + (x-9)^2}}$

$\therefore DG = \sqrt{12^2 + (x-9)^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{12^2 + (x-9)^2}}$

$\because DF \parallel AE \quad \therefore \dfrac{DF}{AE}=\dfrac{DG}{EG}$， $\dfrac{y}{x}=\dfrac{12^2+(x-9)^2-x^2}{x^2}$；

$\therefore y=\dfrac{225-18x}{x}$， x 的取值范围为 $9<x<\dfrac{25}{2}$；

3. （15 年25 题）

（1） 证明略

（2）$y=\dfrac{3x^2-60x+300}{x}\ (\dfrac{50}{13}<x<10)$

（3） 线段 OP 的长为 8

4. （14 年25 题）

（1） 5

（2）$\dfrac{7}{4}$

（3）$\sqrt{10}$

5. （13 年25 题）

（1）$1\le x\le 13$

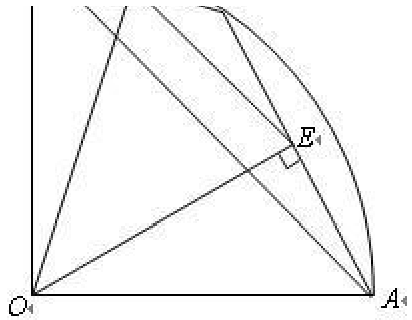
（2）$x=\dfrac{25}{13}$

（3）$x=\dfrac{65+10\sqrt{26}}{13}$ 或 $x=\dfrac{65-10\sqrt{26}}{13}$

6. （12 年25 题）

解：（1）∵$OD\perp BC$ ∴$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$ ∴$OD=\sqrt{BD^2+OD^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

（2）存在，DE 是不变的，连结 AB 且 $AB=2\sqrt{2}$



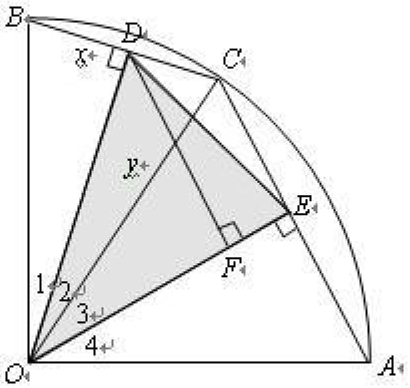
敏感点：D 和 E 是中点 ∴$DE=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$

（3）将 x 移到要求的三角形中去，∴$OD=\sqrt{4-x^2}$

由于∠1=∠2；∠3=∠4

∴∠2+∠3=45°

过 D 作 $DF\perp OE$



∴$DF=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}$

易得 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

$y=\dfrac{1}{2}DF\cdot OE=\dfrac{4-x^2+x\sqrt{4-x^2}}{4}$（$0<x<\sqrt{2}$）

7.（11 年25 题）

(1) 由 $AE=40$，$BC=30$，$AB=50$，$\Rightarrow CP=24$，又 $\sin\angle EMP=\dfrac{12}{13}\Rightarrow CM=26$。

(2) 在 Rt△AEP 與 Rt△ABC 中，∵ $\angle EAP=\angle BAC$，∴ Rt△AEP ~ Rt△ABC，

∴ $\dfrac{EP}{AP}=\dfrac{BC}{AC}$， 即 $\dfrac{EP}{x}=\dfrac{30}{40}$， ∴ $EP=\dfrac{3}{4}x$，

又 $\sin\angle EMP=\dfrac{12}{13}\Rightarrow \operatorname{tg}\angle EMP=\dfrac{12}{5}=\dfrac{EP}{MP}\Rightarrow\dfrac{12}{5}=\dfrac{\frac{3}{4}x}{MP}$， ∴ $MP=\dfrac{5}{16}x=PN$，

$BN=AB-AP-PN=50-x-\dfrac{5}{16}x=50-\dfrac{21}{16}x$ ($0<x<32$)。

(3) 当 E 在线段 AC 上时，由(2)知，$\dfrac{EM}{EP}=\dfrac{13}{12}$，即 $\dfrac{EM}{\frac{3}{4}x}=\dfrac{13}{12}$，$\Rightarrow EM=\dfrac{13}{16}x=EN$，

又 $AM=AP-MP=x-\dfrac{5}{16}x=\dfrac{11}{16}x$，

由題設设△AME ~ △ENB，∴ $\dfrac{AM}{EN}=\dfrac{ME}{NB}$，$\Rightarrow\dfrac{\frac{11}{16}x}{\frac{13}{16}x}=\dfrac{\frac{13}{16}x}{50-\frac{21}{16}x}$，解得 $x=22=AP$。

当 E 在线段 BC 上时，由题设$\triangle AME\sim\triangle ENB$，∴ $\angle AEM=\angle EBN$。由外角定理，

$\angle AEC=\angle EAB+\angle EBN=\angle EAB+\angle AEM=\angle EMP$，

∴ $Rt\triangle ACE\sim Rt\triangle EPM$，$\Rightarrow\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{EP}{PM}$，即 $\dfrac{40}{CE}=\dfrac{\frac{3}{4}x}{\frac{5}{16}x}$，$\Rightarrow CE=\dfrac{50}{3}$… 。

設 $AP=z$，∴ $PB=50-z$，

由 $Rt\triangle BEP\sim Rt\triangle BAC$，$\Rightarrow\dfrac{BE}{PB}=\dfrac{BA}{BC}$，即 $\dfrac{BE}{50-z}=\dfrac{50}{30}$，$\Rightarrow BE=\dfrac{5}{3}(50-z)$，

∴ $CE=BC-BE=30-\dfrac{5}{3}(50-z)$… 。

由 ， ，解 $\dfrac{50}{3}=30-\dfrac{5}{3}(50-z)$，得 $z=42=AP$。