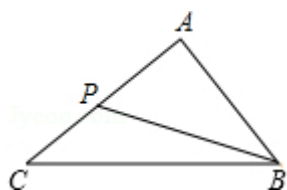


2019 年辅仁初三上数学练习 (9)

一. 选择题 (共 10 小题)

1. 如图, P 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点, 连结 BP , 则下列条件中不能判定 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$ 的是 ()



- A. $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AB}$ B. $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BP}$ C. $\angle ABP = \angle C$ D. $\angle APB = \angle ABC$

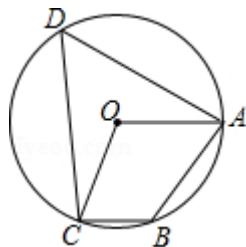
2. 下列说法: ①有一个角为 50° 的两个等腰三角形相似; ②有一个角为 100° 的两个等腰三角形相似; ③有一个锐角相等的两个直角三角形相似; ④两个等边三角形相似. 其中正确的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3. 用配方法将方程 $x^2 + 4x - 4 = 0$ 化成 $(x+m)^2 = n$ 的形式, 则 m, n 的值是 ()

- A. -2, 0 B. 2, 0 C. -2, 8 D. 2, 8

4. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 连接 OA, OC . 若 $OA \parallel BC$, $\angle BCO = 70^\circ$. 则 $\angle ABC$ 的度数为 ()

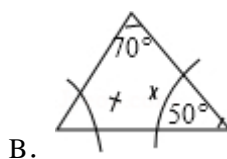
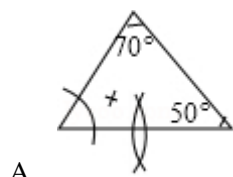


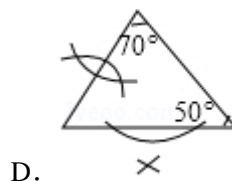
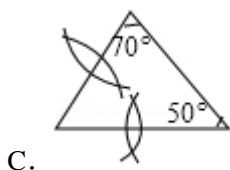
- A. 110° B. 120° C. 125° D. 135°

5. m 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根, 则式子 $2m^2 + 2m + 2017$ 的值为 ()

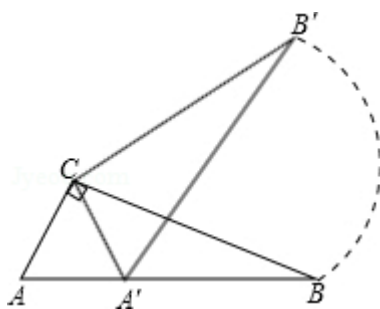
- A. 2016 B. 2017 C. 2018 D. 2019

6. 根据圆规作图的痕迹, 可用直尺成功找到三角形外心的是 ()

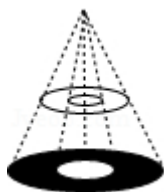




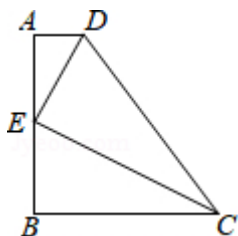
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ， $AB=2$ ．将 $\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 逆时针旋转 60° 得 $\triangle A'B'C$ ，则点 B 转过的路径长为（ ）



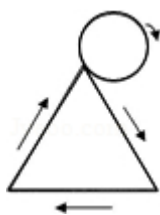
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. π
8. 圆桌面（桌面中间有一个直径为 $1m$ 的圆洞）正上方的灯泡（看作一个点）发出的光线照射平行于地面的桌面后，在地面上形成如图所示的圆环形阴影．已知桌面直径为 $2m$ ，桌面离地面 $1m$ ，若灯泡离地面 $2m$ ，则地面圆环形阴影的面积是（ ）



- A. $2\pi m^2$ B. $3\pi m^2$ C. $6\pi m^2$ D. $12\pi m^2$
9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD\parallel BC$ ， $AD<BC$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ，且 $AB=3$ ，点 E 是边 AB 上的动点，当 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDE$ 两两相似时，则 $AE=$ （ ）



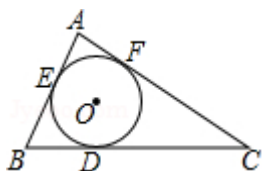
- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$ D. $\frac{3}{2}$ 或 1
10. 如图，一个等边三角形的边长与它的一边相外切的圆的周长相等，当这个圆按箭头方向从某一位置沿等边三角形的三边做无滑动旋转，直至回到原出发位置时，则这个圆共转了（ ）



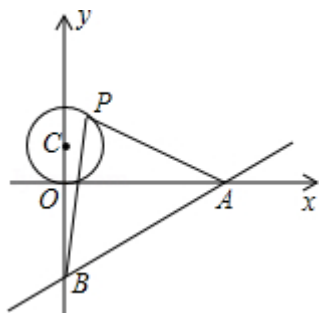
- A. 4 圈 B. 3 圈 C. 5 圈 D. 3.5 圈

二. 填空题 (共 8 小题)

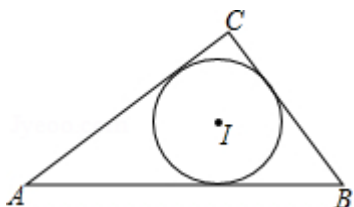
11. 一个圆锥的侧面展开图是半径为 6 的半圆, 则这个圆锥的底面半径为_____.
12. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.
13. 如图, $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 分别切 BC, AB, AC 于点 D, E, F , $\triangle ABC$ 的周长为 28cm , $BC = 12\text{cm}$, 则 $AF = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.



14. 一个底面直径是 10cm , 母线长为 15cm 的圆锥, 它的侧面积为_____ cm^2 .
15. 如图, 已知直线 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, P 在以 $C(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆上一动点, 连结 PA, PB , 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____.



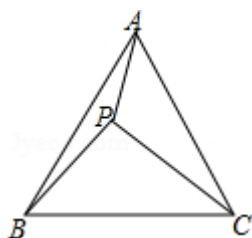
16. 如图, $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 8, BC = 5, AC = 7$, 则它的内切圆的半径为_____.



17. 如图, $AC = 1, \angle BAC = 60^\circ$, 弧 BC 所对的圆心角为 60° , 且 $AC \perp$ 弦 BC . 若点 P 在弧 BC 上, 点 E, F 分别在 AB, AC 上. 则 $PE + EF + FP$ 的最小值为_____.



18. 如图, P 为等边三角形 ABC 内的一点, 且 P 到三个顶点 A, B, C 的距离分别为 3, 4, 5, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



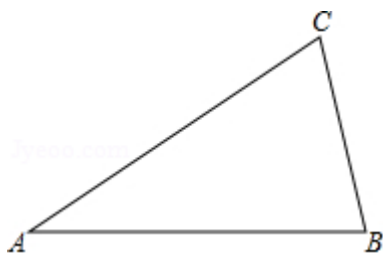
三. 解答题 (共 10 小题)

19. 解方程.

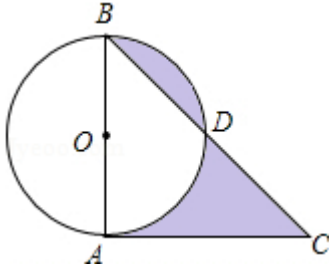
- (1) $(x - 3)^2 - 25 = 0$
- (2) $x^2 - x = 3x - 1$ (用配方法解)
- (3) $2(2x - 3) = 3x(2x - 3)$
- (4) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

20. 已知 $\triangle ABC$,

- (1) 用无刻度的直尺和圆规作 $\triangle ABD$, 使 $\angle ADB = \angle ACB$. 且 $\triangle ABD$ 的面积为 $\triangle ABC$ 面积的一半, 只需要画出一个 $\triangle ABD$ 即可 (作图不必写作法, 但要保留作图痕迹)
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 4$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____

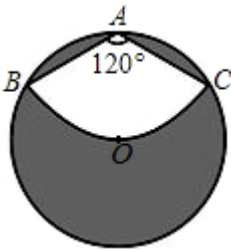


21. 如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 $AB = 2$, CA 切 $\odot O$ 于 A , BC 交 $\odot O$ 于 D , 若 $\angle C = 45^\circ$, 则
- (1) BD 的长是_____;
 - (2) 求阴影部分的面积.



22. 如图，有一直径是 1 米的圆形铁皮，要从中剪出一个圆心角是 120° 的扇形 ABC ，求：（1）被剪掉阴影部分的面积。

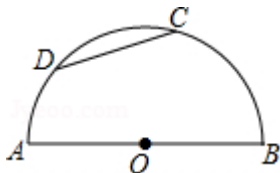
（2）若用所留的扇形铁皮围成一个圆锥，该圆锥底面圆的半径是多少？



23. 如图，半圆 O 的直径 $AB=6$ ，弦 CD 的长为 3，点 C, D 在半圆 \widehat{AB} 上运动， D 点在 \widehat{AC} 上且不与 A 点重合，但 C 点可与 B 点重合。

（1）若 \widehat{AD} 的长 $= \frac{3}{4}\pi$ 时，求 \widehat{BC} 的长；

（2）取 CD 的中点 M ，在 CD 运动的过程中，求点 M 到 AB 的距离的最小值。



24. 某厂家授权一淘宝卖家销售该厂生产的儿童写字台，双方就每套写字台的进价与销售达成如下协议：若当月的月仅售出 1 套写字台，则写字台的进价为 800 元/套，在此基础上，每多售出 1 套，进价就降低 10 元/套（即售出 2 套时，进价为 790 元/套，依此类推），但每套进价不低于 500 元。月底厂家将一次性返利付给淘宝卖家，当月所售写字台可返利 50 元/套。

（1）若该淘宝卖家当月售出 5 套，则每套写字台的进价为_____元；若该淘宝卖家当月售出 x 套，则每套写字台的进价为_____元（用含 x 的代数式表示）。

（2）如果写字台的销售价为 1200 元，该卖家计划当月盈利 9600 元，那么要卖出多少套写字台？（盈利 = 销售利润 + 返利）

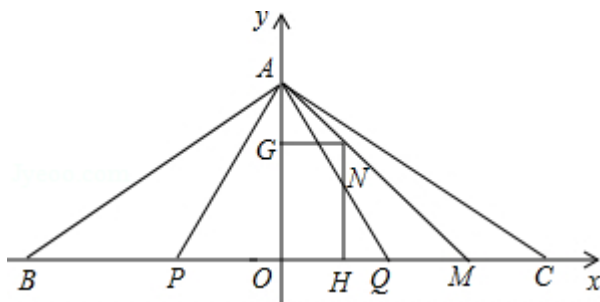
25. 已知：如图， $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称，点 B, P 关于 y 轴的对称点分别是点 C, Q 。 $BP =$

$AP=2$ ，且 P 点坐标为 $(-1, 0)$ 。

(1) 分别写出 Q 点和 C 点的坐标，并指出 $\triangle ABP$ 关于 y 轴的对称三角形；

(2) M 为线段 CQ 上一点，若以 x 轴为旋转轴，旋转 $\triangle PAM$ 一周形成的旋转体的全面积为 $5\sqrt{3}\pi$ ，求线段 AM 的长；

(3) N 为线段 AM 上一动点（与点 A 、 M 不重合），过点 N 分别作 $NH \perp x$ 轴于 H ， $NG \perp y$ 轴于 G 。求当矩形 $OHNG$ 的面积最大时 N 点的坐标。

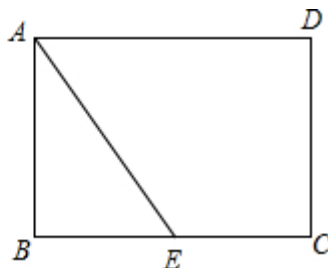
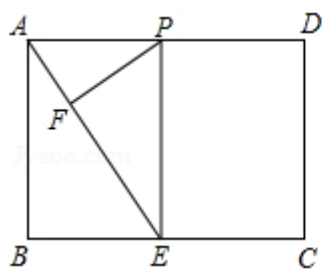


26. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=6$ ， E 是 BC 边的中点，点 P 在线段 AD 上，过 P 作 $PF \perp AE$ 于 F ，设 $PA=x$ 。

(1) 求证： $\triangle PFA \sim \triangle ABE$ ；

(2) 当点 P 在线段 AD 上运动时，是否存在实数 x ，使得以点 P ， F ， E 为顶点的三角形也与 $\triangle ABE$ 相似？若存在，请求出 x 的值；若不存在，请说明理由；

(3) 探究：当以 D 为圆心， DP 为半径的 $\odot D$ 与线段 AE 只有一个公共点时，请直接写出 x 满足的条件：_____。

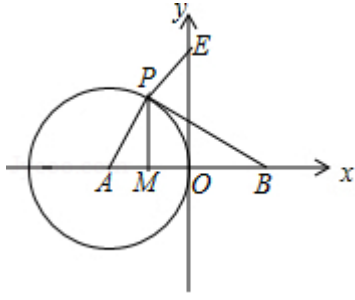


27. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 、 B 的坐标分别为 $(-2, 0)$ ， $(2, 0)$ ，点 M 是 AO 中点， $\odot A$ 的半径为 2。

(1) 若 $\triangle PAB$ 是直角三角形，则点 P 的坐标为_____。（直接写出结果）

(2) 若 $PM \perp AB$ ，则 BP 与 $\odot A$ 有怎样的位置关系？为什么？

(3) 若点 E 的坐标为 $(0, 3)$ ，那么 $\odot A$ 上是否存在一点 P ，使 $PE + \frac{1}{2}PB$ 最小，如果存在，求出这个最小值，如果不存在，简要说明理由。



28. 我们把“有两条边和其中一边的对角对应相等的两个三角形”叫做“同族三角形”，如图 1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中， $AB=AB$ ， $AC=AD$ ， $\angle B=\angle B$ ，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 是“同族三角形”。

(1) 如图 2，四边形 $ABCD$ 内接于圆，点 C 是弧 BD 的中点，求证： $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 是同族三角形；

(2) 如图 3， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $\odot O$ 的半径为 $3\sqrt{2}$ ， $AB=6$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ，求 AC 的长；

(3) 如图 3，在(2)的条件下，若点 D 在 $\odot O$ 上， $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是非全等的同族三角形， $AD > CD$ ，求 $\frac{AD}{CD}$ 的值。

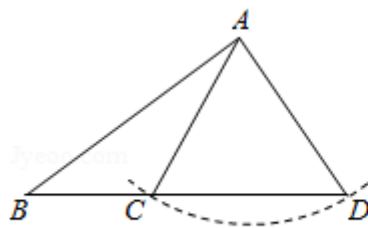


图1

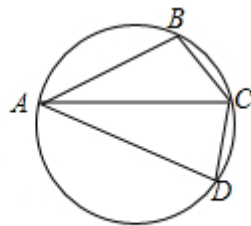


图2

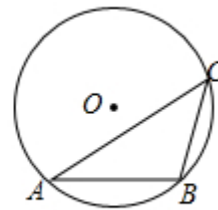


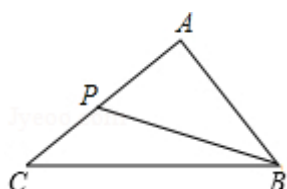
图3

2019 年辅仁初三上数学练习 (9)

参考答案与试题解析

一. 选择题 (共 10 小题)

1. 如图, P 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点, 连结 BP , 则下列条件中不能判定 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$ 的是 ()



- A. $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AB}$ B. $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BP}$ C. $\angle ABP = \angle C$ D. $\angle APB = \angle ABC$

【解答】解: A、 $\because \angle A = \angle A$, $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AB}$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACB$, 故本选项错误;

B、根据 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BP}$ 和 $\angle A = \angle A$ 不能判断 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$, 故本选项正确;

C、 $\because \angle A = \angle A$, $\angle ABP = \angle C$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACB$, 故本选项错误;

D、 $\because \angle A = \angle A$, $\angle APB = \angle ABC$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACB$, 故本选项错误;

故选: B.

2. 下列说法: ①有一个角为 50° 的两个等腰三角形相似; ②有一个角为 100° 的两个等腰三角形相似; ③有一个锐角相等的两个直角三角形相似; ④两个等边三角形相似. 其中正确的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【解答】解: ①有一个角为 50° 的两个等腰三角形不一定相似, 故本小题错误;

②有一个角为 100° 的两个等腰三角形, 100 的角一定是顶角, 故两三角形相似, 故本小题正确;

③有一个锐角相等的两个直角三角形相似, 符合有两组角对应相等的两个三角形相似, 故本小题正确;

④两个等边三角形一定相似, 故本小题正确.

故选: C.

3. 用配方法将方程 $x^2+4x-4=0$ 化成 $(x+m)^2=n$ 的形式, 则 m, n 的值是 ()

- A. -2, 0 B. 2, 0 C. -2, 8 D. 2, 8

【解答】解: $\because x^2+4x-4=0$,

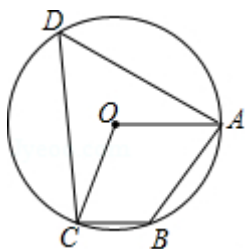
$$\therefore x^2+4x=4,$$

$$\text{则 } x^2+4x+4=4+4, \text{ 即 } (x+2)^2=8,$$

$$\therefore m=2, n=8,$$

故选: D.

4. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 连接 OA, OC . 若 $OA \parallel BC$, $\angle BCO=70^\circ$. 则 $\angle ABC$ 的度数为 ()



- A. 110° B. 120° C. 125° D. 135°

【解答】解: $\because OA \parallel BC$,

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - \angle BCO = 110^\circ,$$

$$\text{由圆周角定理得, } \angle D = \frac{1}{2} \angle AOC = 55^\circ,$$

\because 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle D = 125^\circ,$$

故选: C.

5. m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根, 则式子 $2m^2+2m+2017$ 的值为 ()

- A. 2016 B. 2017 C. 2018 D. 2019

【解答】解: $\because m$ 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根,

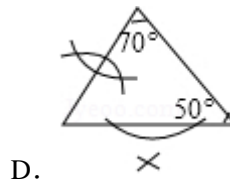
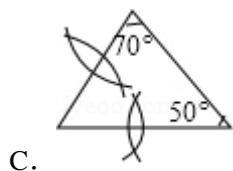
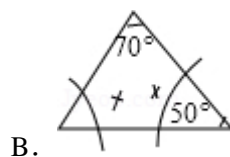
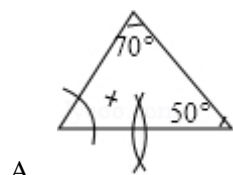
$$\therefore m^2+m-1=0,$$

$$\text{即 } m^2+m=1,$$

$$\therefore 2m^2+2m+2017=2(m^2+m)+2017=2+2017=2019.$$

故选: D.

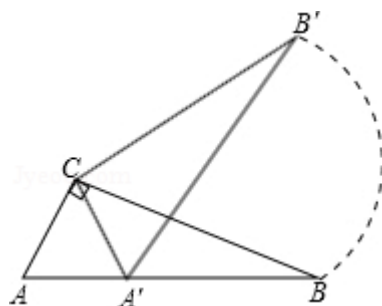
6. 根据圆规作图的痕迹, 可用直尺成功找到三角形外心的是 ()



【解答】解：三角形外心为三边的垂直平分线的交点，由基本作图得到 C 选项作了两边的垂直平分线，从而可用直尺成功找到三角形外心．

故选：C．

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ， $AB=2$ ．将 $\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 逆时针旋转 60° 得 $\triangle A'B'C$ ，则点 B 转过的路径长为（ ）



- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. π

【解答】解： \because 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ， $AB=2$ ，

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore BC = AB \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

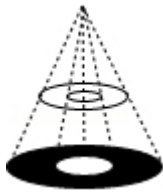
\because 将 $\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 逆时针旋转 60° 得 $\triangle A'B'C$ ，

$$\therefore \angle BCB' = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{点 B 转过的路径长为: } \frac{60\pi \times \sqrt{3}}{180} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

故选：B．

8. 圆桌面（桌面中间有一个直径为 $1m$ 的圆洞）正上方的灯泡（看作一个点）发出的光线照射平行于地面的桌面后，在地面上形成如图所示的圆环形阴影．已知桌面直径为 $2m$ ，桌面离地面 $1m$ ，若灯泡离地面 $2m$ ，则地面圆环形阴影的面积是（ ）



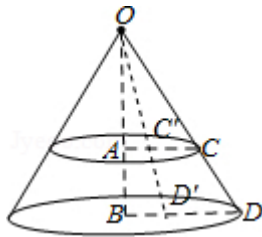
A. $2\pi m^2$

B. $3\pi m^2$

C. $6\pi m^2$

D. $12\pi m^2$

【解答】解：如图所示：



$$\because AC \perp OB, BD \perp OB,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle BOD,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}, \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{1}{BD},$$

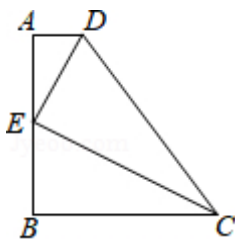
$$\text{解得: } BD = 2m,$$

$$\text{同理可得: } AC' = \frac{1}{2}m, \text{ 则 } BD' = 1m,$$

$$\therefore S_{\text{圆环形阴影}} = 2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi (m^2).$$

故选：B.

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，且 $AB = 3$ ，点 E 是边 AB 上的动点，当 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDE$ 两两相似时，则 $AE =$ ()



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{3}$

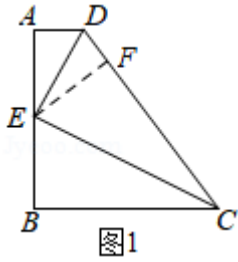
C. $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$

D. $\frac{3}{2}$ 或 1

【解答】解：分两种情况：

①当 $\angle CED = 90^\circ$ 时，如图 1，

过 E 作 $EF \perp CD$ 于 F ，



$\because AD \parallel BC, AD < BC,$

$\therefore AB$ 与 CD 不平行,

\therefore 当 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDE$ 两两相似时,

$\therefore \angle BEC = \angle CDE = \angle ADE,$

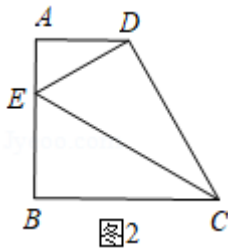
$\because \angle A = \angle B = \angle CED = 90^\circ,$

$\therefore \angle BCE = \angle DCE,$

$\therefore AE = EF, EF = BE,$

$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2};$

② 当 $\angle CDE = 90^\circ$ 时, 如图 2,



\because 当 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDE$ 两两相似时,

$\therefore \angle CEB = \angle CED = \angle AED = 60^\circ,$

$\therefore \angle BCE = \angle DCE = 30^\circ,$

$\because \angle A = \angle B = 90^\circ,$

$\therefore BE = ED = 2AE,$

$\because AB = 3,$

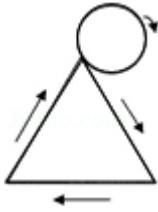
$\therefore AE = 1,$

综上, AE 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 1;

故选: D.

10. 如图, 一个等边三角形的边长与它的一边相外切的圆的周长相等, 当这个圆按箭头方向从某一位置沿等边三角形的三边做无滑动旋转, 直至回到原出发位置时, 则这个圆共转

了 ()



A. 4 圈

B. 3 圈

C. 5 圈

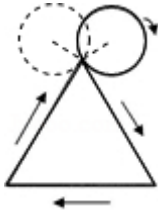
D. 3.5 圈

【解答】解：如图，设圆的周长是 C ，

则圆所走的路程是圆心所走过的路程即等边三角形的周长+三条圆心角是 120° 的弧长= $4C$ ，

则这个圆共转了 $4C \div C = 4$ 圈。

故选：A。



二. 填空题 (共 8 小题)

11. 一个圆锥的侧面展开图是半径为 6 的半圆，则这个圆锥的底面半径为 3。

【解答】解：设这个圆锥的底面半径为 r ，

根据题意得 $2\pi r = \frac{180\pi \cdot 6}{180}$ ，

解得 $r = 3$ 。

故答案为 3。

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 $k < 3$ 且 $k \neq 2$ 。

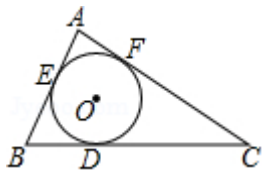
【解答】解： \because 关于 x 的一元二次方程 $(k-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4(k-2) \times 1 > 0$ 且 $k-2 \neq 0$ ，

解得： $k < 3$ 且 $k \neq 2$ ，

故答案为： $k < 3$ 且 $k \neq 2$ 。

13. 如图， $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 分别切 BC ， AB ， AC 于点 D ， E ， F ， $\triangle ABC$ 的周长为 28cm ， $BC = 12\text{cm}$ ，则 $AF =$ 2 cm 。



【解答】解：∵⊙O 是△ABC 的内切圆，分别切 BC、AB、AC 于点 D、E、F，

设 $AF=AE=x$ ； $BD=BE=y$ ； $CF=CD=z$ ，

根据题意得：

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 28 \\ y + z = 12 \end{cases},$$

解得 $x=2$ ，

∴ $AF=2cm$ ．

故答案为 2．

14. 一个底面直径是 $10cm$ ，母线长为 $15cm$ 的圆锥，它的侧面积为 $75\pi cm^2$ ．

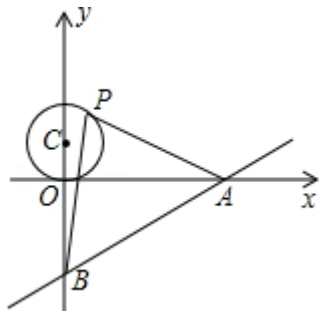
【解答】解：圆锥的底面直径为 $10cm$ ，则底面周长 $=10\pi cm$ ，圆锥的侧面积 $=\frac{1}{2} \times 10\pi \times$

$15=75\pi cm^2$ ，

故答案为： 75π ；

15. 如图，已知直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A、B 两点，P 在以 C (0, 1) 为圆心，

1 为半径的圆上一动点，连结 PA、PB，则△PAB 面积的最大值是 $\frac{21}{2}$ ．



【解答】解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D，延长 DC 交⊙C 于另一点 P' ，此时△ $P'AB$ 的面积最大，如图所示．

当 $x=0$ 时， $y=-3$ ，

∴点 B (0, -3)；

当 $y=\frac{3}{4}x-3=0$ 时， $x=4$ ，

∴点 A (4, 0)．

∵点 C (0, 1)，

$$\therefore BC = 1 - (-3) = 4, AO = 4, BO = 3, AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5.$$

$$\because \angle ABO = \angle CBD, \angle AOB = \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle CDB,$$

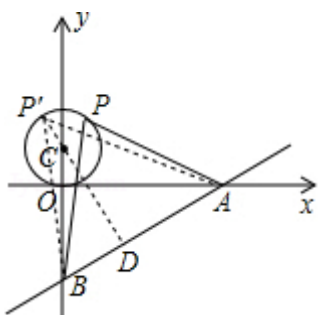
$$\therefore \frac{CD}{AO} = \frac{BC}{BA},$$

$$\therefore CD = \frac{BC \cdot AO}{BA} = \frac{16}{5},$$

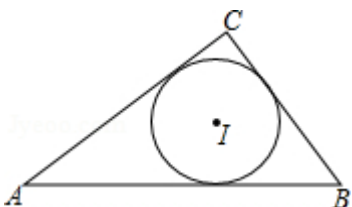
$$\therefore DP' = CD + CP' = \frac{16}{5} + 1 = \frac{21}{5}.$$

$$\therefore S_{\triangle P'AB} = \frac{1}{2} AB \cdot P'D = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{21}{5} = \frac{21}{2}.$$

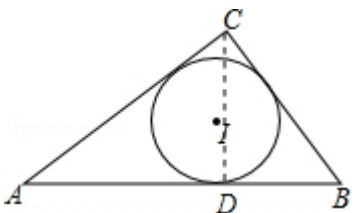
故答案为: $\frac{21}{2}$.



16. 如图, $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=8$, $BC=5$, $AC=7$, 则它的内切圆的半径为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.



【解答】解: 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D .



设 $AD=x$, 则 $BD=8-x$.

由勾股定理得: $CD^2 = AC^2 - AD^2$, $CD^2 = BC^2 - BD^2$.

$$\therefore 7^2 - x^2 = 5^2 - (8-x)^2.$$

解得: $x=5.5$.

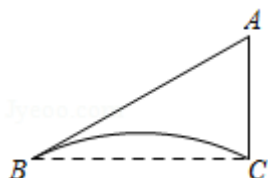
$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

由 $\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2} \times (AB+BC+AC) \times r$ 可知： $\frac{1}{2} \times (8+5+7)r = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

解得： $r=\sqrt{3}$.

故答案为： $\sqrt{3}$.

17. 如图， $AC=1$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ，弧 BC 所对的圆心角为 60° ，且 $AC \perp$ 弦 BC . 若点 P 在弧 BC 上，点 E 、 F 分别在 AB 、 AC 上. 则 $PE+EF+FP$ 的最小值为 $\sqrt{21}-3$.



【解答】解：连接 AP ， O ， OA . 分别以 AB 、 AC 所在直线为对称轴，作出 P 关于 AB 的对称点为 M ， P 关于 AC 的对称点为 N ，连接 MN ，交 AB 于点 E ，交 AC 于点 F ，连接 PE 、 PF .

$$\therefore AM=AP=AN,$$

$$\therefore \angle MAB = \angle PAB, \angle NAC = \angle PAC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle PAB + \angle PAC = \angle MAB + \angle NAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MAN = 120^\circ$$

$\therefore M$ 、 P 、 N 在以 A 为圆心， AP 为半径的圆上，

设 $AP=r$,

$$\text{易求得: } MN = \sqrt{3}r,$$

$$\therefore PE = ME, PF = FN,$$

$$\therefore PE + EF + PF = ME + EF + FN = MN = \sqrt{3}r,$$

\therefore 当 AP 最小时， $PE+EF+PF$ 可取得最小值

$$\therefore AP + OP \geq OA,$$

$\therefore AP \geq OA - OP$ ，即点 P 在 OA 上时， AP 可取得最小值，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\therefore AC=1$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ, OB = OC,$$

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形，

$\therefore OC = BC = \sqrt{3}$ ，作 $OH \perp AC$ 交 AC 的延长线于 H .

在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中， $\therefore OC = \sqrt{3}$ ， $\angle OCH = 30^\circ$ ，

$$\therefore AE^2 = PE^2 + PA^2,$$

$\therefore \triangle APE$ 为直角三角形, 且 $\angle APE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle APB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

$$\therefore \angle APF = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{在直角} \triangle APF \text{ 中, } AF = \frac{1}{2}AP = \frac{3}{2}, PF = \frac{\sqrt{3}}{2}AP = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \text{在直角} \triangle ABF \text{ 中, } AB^2 = BF^2 + AF^2 = \left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 25 + 12\sqrt{3},$$

$$\text{则} \triangle ABC \text{ 的面积是 } \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (25 + 12\sqrt{3}) = 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{故答案为: } 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

三. 解答题 (共 10 小题)

19. 解方程.

$$(1) (x - 3)^2 - 25 = 0$$

$$(2) x^2 - x = 3x - 1 \text{ (用配方法解)}$$

$$(3) 2(2x - 3) = 3x(2x - 3)$$

$$(4) 3x^2 - 4x - 2 = 0$$

【解答】解: (1) $\because (x - 3)^2 - 25 = 0,$

$$\therefore (x - 3)^2 = 25,$$

$$\therefore x - 3 = \pm 5,$$

$$\therefore x_1 = 8 \text{ 或 } x_2 = -2;$$

$$(2) \because x^2 - x = 3x - 1,$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 3,$$

$$\therefore (x - 2)^2 = 3,$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3};$$

$$(3) \because 2(2x - 3) = 3x(2x - 3),$$

$$\therefore (2 - 3x)(2x - 3) = 0,$$

$$\therefore 2 - 3x = 0 \text{ 或 } 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{2} \text{ 或 } x_2 = \frac{2}{3};$$

$$(4) \because 3x^2 - 4x - 2 = 0,$$

$$\therefore a = 3, b = -4, c = -2,$$

$$\therefore \Delta = 16 + 24 = 40,$$

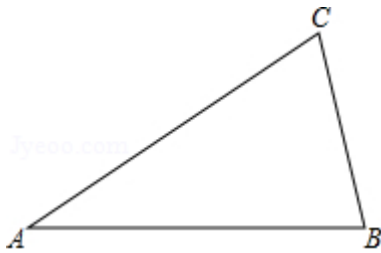
$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore x_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}.$$

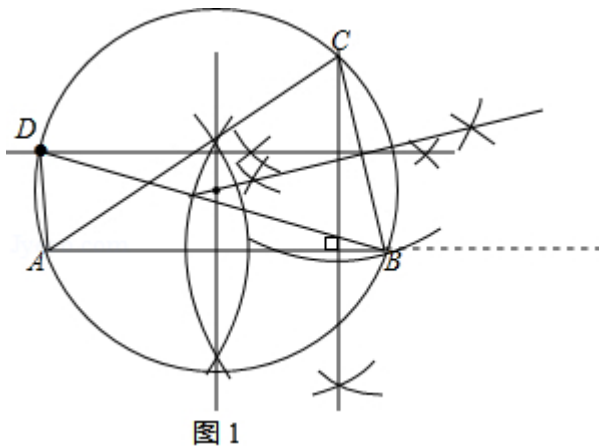
20. 已知 $\triangle ABC$,

(1) 用无刻度的直尺和圆规作 $\triangle ABD$, 使 $\angle ADB = \angle ACB$. 且 $\triangle ABD$ 的面积为 $\triangle ABC$ 面积的一半, 只需要画出一个 $\triangle ABD$ 即可 (作图不必写作法, 但要保留作图痕迹)

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 4$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 $4 + 4\sqrt{2}$



【解答】解: (1) 如图 1 所示, $\angle ABD$ 即为所求.



(2) 如图 2 所示, 作以 AB 为弦, 且 AB 所对圆心角为 90° 的 $\odot O$,

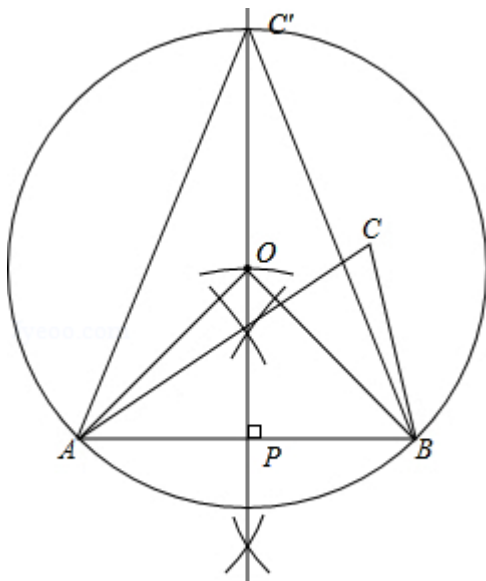


图 2

$\because C$ 点轨迹为圆上不与 AB 重合的任一点，

\therefore 当 C 在 C' 位置上时，高最长，

故面积最大，

$\because AB=4$ ，

$\therefore AP=BP=OP=2$ ，

则 $OC=OA=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore PC=2+2\sqrt{2}$ ，

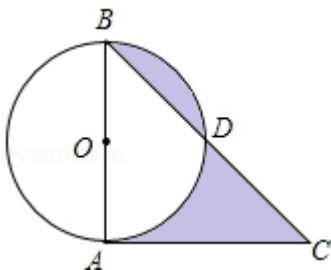
$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot PC = \frac{1}{2} \times 4 \times (2+2\sqrt{2}) = 4+4\sqrt{2}$ ，

故答案为： $4+4\sqrt{2}$ 。

21. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 $AB=2$ ， CA 切 $\odot O$ 于 A ， BC 交 $\odot O$ 于 D ，若 $\angle C=45^\circ$ ，则

(1) BD 的长是 $\underline{\sqrt{2}}$ ；

(2) 求阴影部分的面积。



【解答】 解：(1) 连接 AD ，

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore AB \perp AC$ ，

$$\because \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = AC = 2,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$\therefore D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2};$$

(2) 连接 OD ,

$\because O$ 是 AB 的中点, D 是 BC 的中点,

$\therefore OD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

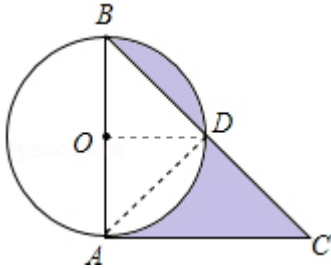
$$\therefore OD = 1,$$

$$\therefore OD \perp AB,$$

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{AD},$$

$\therefore \widehat{BD}$ 与弦 BD 组成的弓形的面积等于 \widehat{AD} 与弦 AD 组成的弓形的面积,

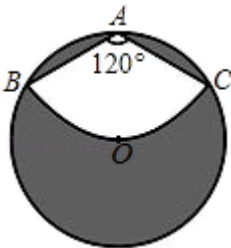
$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AC - \frac{1}{2}AB \cdot OD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 2 - 1 = 1.$$



22. 如图, 有一直径是 1 米的圆形铁皮, 要从中剪出一个圆心角是 120° 的扇形 ABC ,

求: (1) 被剪掉阴影部分的面积.

(2) 若用所留的扇形铁皮围成一个圆锥, 该圆锥底面圆的半径是多少?



【解答】解: (1) 设 O 为圆心, 连接 OA 、 OB 、 OC 、 BC , 且 OA 与 BC 交于点 D , 如图

所示:

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 中,

$$\begin{cases} OB = OC \\ AB = AC, \\ OA = OA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO \quad (SSS),$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO = 60^\circ, \text{ 又 } OA = OB,$$

$$\therefore \triangle ABO \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore AB = OA = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \text{ (米)},$$

$$\therefore S_{\text{扇形} ABC} = \frac{120\pi \times (\frac{1}{2})^2}{360} = \frac{\pi}{12} m^2,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} m^2;$$

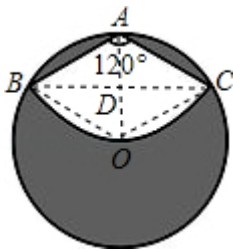
$$(2) \text{ 弧 } BC \text{ 的长 } l = \frac{120 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}{180} = \frac{\pi}{3} m,$$

设圆锥的底面半径为 r ,

$$\therefore \frac{\pi}{3} = 2\pi r,$$

$$\therefore r = \frac{1}{6},$$

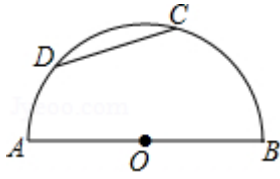
$$\therefore \text{圆锥底面圆的半径是 } \frac{1}{6} m.$$



23. 如图, 半圆 O 的直径 $AB=6$, 弦 CD 的长为 3, 点 C, D 在半圆 \widehat{AB} 上运动, D 点在 \widehat{AC} 上且不与 A 点重合, 但 C 点可与 B 点重合.

(1) 若 \widehat{AD} 的长 $= \frac{3}{4}\pi$ 时, 求 \widehat{BC} 的长;

(2) 取 CD 的中点 M , 在 CD 运动的过程中, 求点 M 到 AB 的距离的最小值.



【解答】解：（1）连接 OD 、 OC ，

$$\because CD=OC=OD=3,$$

$\therefore \triangle CDO$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle COD=60^\circ,$$

$$\therefore \widehat{CD} = \frac{60\pi \times 3}{180} = \pi,$$

又 \because 半圆弧的长度为： $\frac{1}{2} \times 6\pi = 3\pi$ ，

$$\therefore \widehat{BC} = 3\pi - \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

（2）过点 M 做 $ME \perp AB$ 于点 E ，

连接 OM ，

再 CD 运动的过程中， $CD=3$ ，

由垂径定理可知： $DM = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore \text{由勾股定理可知： } OM = \sqrt{OD^2 - DM^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{由勾股定理可知： } ME^2 = OM^2 - OE^2$$

若 ME 取最小值，则只需要 OE 最大即可，

当 C 与 B 重合时，

此时 OE 最大，

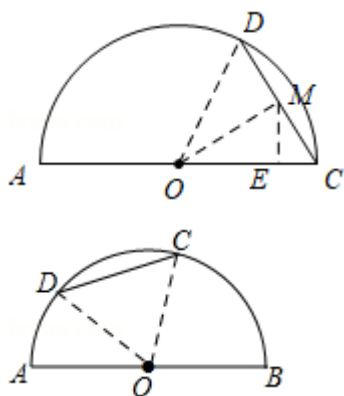
$$\because CD=OC=3,$$

$\therefore \triangle ODC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle MOC=30^\circ, \quad OM = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$\text{此时 } ME = \frac{1}{2}OM = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

即点 M 到 AB 的距离的最小值为 $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.



24. 某厂家授权一淘宝卖家销售该厂生产的儿童写字台，双方就每套写字台的进价与销售达成如下协议：若当月的仅售出 1 套写字台，则写字台的进价为 800 元/套，在此基础上，每多售出 1 套，进价就降低 10 元/套（即售出 2 套时，进价为 790 元/套，依此类推），但每套进价不低于 500 元．月底厂家将一次性返利付给淘宝卖家，当月所售写字台可返利 50 元/套．

（1）若该淘宝卖家当月售出 5 套，则每套写字台的进价为 760 元；若该淘宝卖家当，月售出 x 套，则每套写字台的进价为 $\begin{cases} 810 - 10x (1 \leq x \leq 31) \\ 500 (x > 31) \end{cases}$ 元（用含 x 的代数式表示）．

（2）如果写字台的销售价为 1200 元，该卖家计划当月盈利 9600 元，那么要卖出多少套写字台？（盈利 = 销售利润 + 返利）

【解答】解：（1） $800 - 10 \times (5 - 1) = 760$ （元）；

当 $1 \leq x \leq 31$ 时，进价 $= 800 - 10 \times (x - 1) = 810 - 10x$ （元），

当 $x > 31$ 时，进价为 500 元．

（2）设要卖出 x 套写字台．

①当 $1 \leq x \leq 31$ 时，

每套写字台的销售利润为 $1200 - [800 - 10(x - 1)] = (10x + 390)$ 元

根据题意得： $(10x + 390)x + 50x = 9600$ ，

整理得： $x^2 + 44x - 960 = 0$ ，

解得： $x_1 = -60$ （舍去）， $x_2 = 16$ ；

②当 $x > 31$ 时，根据题意得： $(1200 - 500)x + 50x = 9600$ ，

解得： $x = 12.8$ （舍去）．

答：要卖出 16 套写字台．

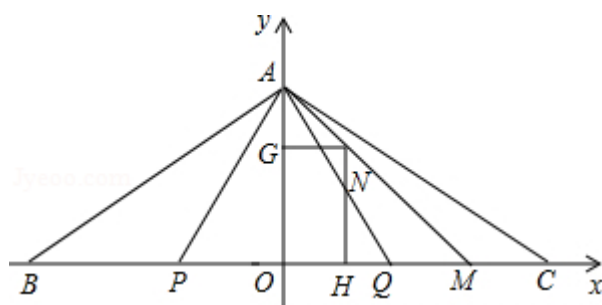
故答案为：760； $\begin{cases} 810-10x(1 \leq x \leq 31) \\ 500(x > 31) \end{cases}$ 。

25. 已知：如图， $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称，点 B 、 P 关于 y 轴的对称点分别是点 C 、 Q ， $BP=AP=2$ ，且 P 点坐标为 $(-1, 0)$ 。

(1) 分别写出 Q 点和 C 点的坐标，并指出 $\triangle ABP$ 关于 y 轴的对称三角形；

(2) M 为线段 CQ 上一点，若以 x 轴为旋转轴，旋转 $\triangle PAM$ 一周形成的旋转体的全面积为 $5\sqrt{3}\pi$ ，求线段 AM 的长；

(3) N 为线段 AM 上一动点（与点 A 、 M 不重合），过点 N 分别作 $NH \perp x$ 轴于 H ， $NG \perp y$ 轴于 G 。求当矩形 $OHNG$ 的面积最大时 N 点的坐标。



【解答】解：(1) Q 点坐标为 $(1, 0)$ ； C 点坐标为 $(3, 0)$ ； $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACQ$ 关于 y 轴对称；

(2) 在 $\text{Rt}\triangle AOP$ 中， $\because AP=2$ ， $PO=1$ ， $AO=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$ ，依题意有：

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi \times 2 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi \times AM = 5\sqrt{3}\pi, \therefore AM=3;$$

(3) 在 $\text{Rt}\triangle AOM$ 中， $\because AO=\sqrt{3}$ ， $AM=3$ ，

$$\therefore OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=\sqrt{6},$$

\therefore 点 M 的坐标为 $(\sqrt{6}, 0)$ ，设直线 AM 的解析式为： $y=kx+\sqrt{3}$ ，

$$\because \text{直线 } AM \text{ 经过点 } M(\sqrt{6}, 0), \sqrt{6}k+\sqrt{3}=0, k=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

\therefore 直线 AM 的解析式为： $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{3}$ 。设点 N 的坐标为 (x, y) ，

$$\text{则 } S_{\text{矩形 } AGOH}=xy=x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\sqrt{3}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

\therefore 当 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，矩形 $NGOH$ 的面积取得最大值，

$$\text{此时 } y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

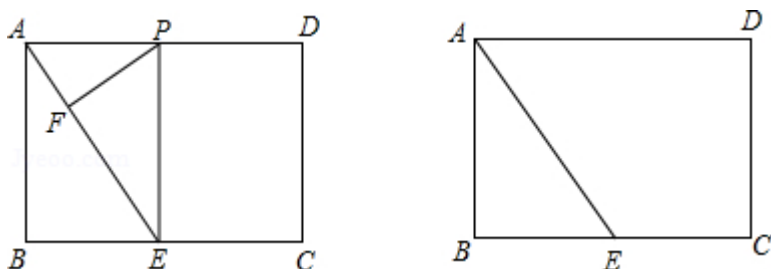
\therefore 点 N 的坐标为 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

26. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=6$, E 是 BC 边的中点, 点 P 在线段 AD 上, 过 P 作 $PF \perp AE$ 于 F , 设 $PA=x$.

(1) 求证: $\triangle PFA \sim \triangle ABE$;

(2) 当点 P 在线段 AD 上运动时, 是否存在实数 x , 使得以点 P, F, E 为顶点的三角形也与 $\triangle ABE$ 相似? 若存在, 请求出 x 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 探究: 当以 D 为圆心, DP 为半径的 $\odot D$ 与线段 AE 只有一个公共点时, 请直接写出 x 满足的条件: $x = \frac{6}{5}$ 或 $0 \leq x < 1$.



【解答】(1) 证明: 如图 1 中,

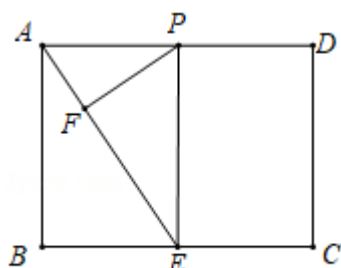


图1

\because 矩形 $ABCD$,

$\therefore \angle ABE = 90^\circ$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle PAF = \angle AEB$,

又 $\because PF \perp AE$,

$\therefore \angle PFA = 90^\circ = \angle ABE$,

$\therefore \triangle PFA \sim \triangle ABE$.

(2) 解: 分二种情况:

①若 $\triangle EFP \sim \triangle ABE$, 如图 1, 则 $\angle PEF = \angle EAB$,

$\therefore PE \parallel AB$,

\therefore 四边形 $ABEP$ 为矩形,

$\therefore PA=EB=3$, 即 $x=3$,

②如图 2, 若 $\triangle PFE \sim \triangle ABE$, 则 $\angle PEF = \angle AEB$,

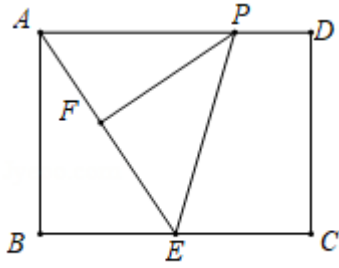


图2

$\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle PAF = \angle AEB$,

$\therefore \angle PEF = \angle PAF$.

$\therefore PE = PA$.

$\because PF \perp AE$,

\therefore 点 F 为 AE 的中点,

Rt $\triangle ABE$ 中, $AB=4$, $BE=3$,

$\therefore AE=5$,

$\therefore EF = \frac{1}{2}AE = \frac{5}{2}$,

$\because \triangle PFE \sim \triangle ABE$,

$\therefore \frac{PE}{AE} = \frac{EF}{BE}$,

$\therefore \frac{x}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{3}$,

$\therefore PE = \frac{25}{6}$, ... (8 分)

\therefore 满足条件的 x 的值为 3 或 $\frac{25}{6}$.

(3) 如图 3, 当 $\odot D$ 与 AE 相切时, 设切点为 G , 连接 DG ,

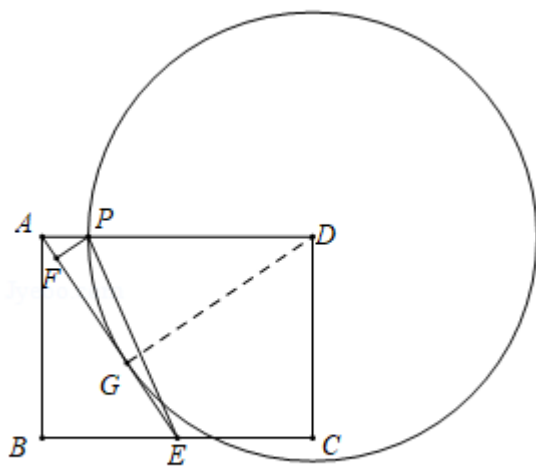


图3

$$\because AP=x,$$

$$\therefore PD=DG=6-x,$$

$$\because \angle DAG = \angle AEB, \angle AGD = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle EBA,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{DG}{AB},$$

$$\therefore \frac{6}{5} = \frac{6-x}{4},$$

$$x = \frac{6}{5},$$

当 $\odot D$ 过点 E 时,如图4, $\odot D$ 与线段有两个公共点,连接 DE ,此时 $PD=DE=5$,

$$\therefore AP=x=6-5=1,$$

\therefore 当以 D 为圆心, DP 为半径的 $\odot D$ 与线段 AE 只有一个公共点时, x 满足的条件: $x=\frac{6}{5}$ 或

$$0 \leq x < 1;$$

故答案为: $x=\frac{6}{5}$ 或 $0 \leq x < 1$.

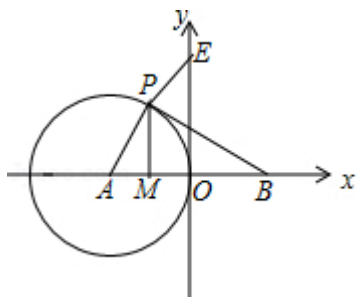
x 满足的条件: $x=\frac{6}{5}$ 或 $0 \leq x < 1$.

27. 如图,在平面直角坐标系中,点 A 、 B 的坐标分别为 $(-2, 0)$ 、 $(2, 0)$,点 M 是 AO 中点, $\odot A$ 的半径为2.

(1) 若 $\triangle PAB$ 是直角三角形,则点 P 的坐标为 $(-2, 2)$ 或 $(-2, -2)$ 或 $(-1, \sqrt{3})$ 或 $(-1, -\sqrt{3})$. (直接写出结果)

(2) 若 $PM \perp AB$,则 BP 与 $\odot A$ 有怎样的位置关系?为什么?

(3) 若点 E 的坐标为 $(0, 3)$, 那么 $\odot A$ 上是否存在一点 P , 使 $PE + \frac{1}{2}PB$ 最小, 如果存在, 求出这个最小值, 如果不存在, 简要说明理由.



【解答】解: (1) 设 $P(m, n)$,

①如图 1, 当 $\angle PAB = 90^\circ$ 时,

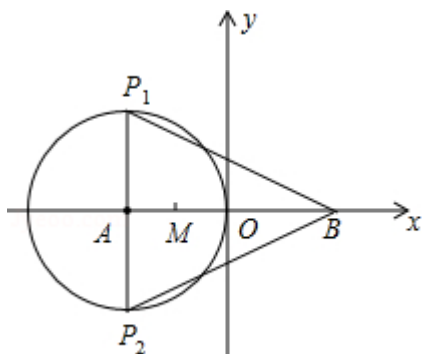


图 1

$\because \odot A$ 的半径为 2, 且 $A(-2, 0)$,

\therefore 点 $P_1(-2, 2)$, $P_2(-2, -2)$;

②如图 2, 当 $\angle APB = 90^\circ$,

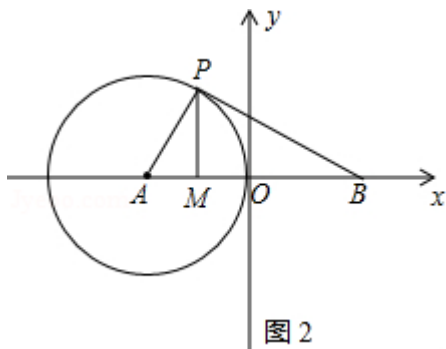


图 2

$\because A(-2, 0)$, $B(2, 0)$,

$\therefore PA^2 = (m+2)^2 + n^2 = 2^2$ ①, $PB^2 = (m-2)^2 + n^2$, $AB^2 = 16$,

由 $PA^2 + PB^2 = AB^2$ 得 $4 + (m-2)^2 + n^2 = 16$ ②

由①②得到: $m = -1$, $n = \pm\sqrt{3}$,

$$\therefore P(-1, \sqrt{3}) \text{ 或 } (-1, -\sqrt{3}).$$

故答案为 $(-2, 2)$ 或 $(-2, -2)$ 或 $(-1, \sqrt{3})$ 或 $(-1, -\sqrt{3})$.

(2) 如图 2 中, $\because PM \perp AB$,

$$\therefore \angle AMP = \angle BMP = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle APM$ 中, $\because \angle PMA = 90^\circ$, $PA = 2$, $AM = 1$,

$$\therefore PM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PMB \text{ 中, } PB = \sqrt{PM^2 + BM^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 = 4 + 12 = 16,$$

$$\because AB^2 = 16,$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PAB$ 是直角三角形.

(3) 如图 3 中, 连接 EM .

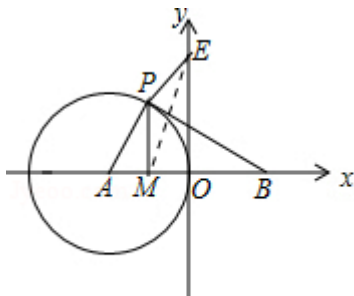


图3

$$\because PA^2 = 4, AM \cdot AB = 4,$$

$$\therefore PA^2 = AM \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{PA}{AM} = \frac{AB}{PA},$$

$$\because \angle PAM = \angle BAP,$$

$$\therefore \triangle PAM \sim \triangle BAP,$$

$$\therefore \frac{PM}{PB} = \frac{PA}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PM = \frac{1}{2}PB,$$

$$\therefore PE + \frac{1}{2}PB = PE + PM,$$

$$\therefore PE + PM \geq EM,$$

$\therefore PE + PM$ 的最小值为线段 EM 的长,

$$\therefore E(0, 3),$$

$$\therefore OE = 3,$$

$$\therefore EM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore PE + \frac{1}{2}PB \text{ 的最小值为 } \sqrt{10}.$$

28. 我们把“有两条边和其中一边的对角对应相等的两个三角形”叫做“同族三角形”，如图1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中， $AB=AB$ ， $AC=AD$ ， $\angle B=\angle B$ ，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 是“同族三角形”。

(1) 如图2，四边形 $ABCD$ 内接于圆，点 C 是弧 BD 的中点，求证： $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 是同族三角形；

(2) 如图3， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $\odot O$ 的半径为 $3\sqrt{2}$ ， $AB=6$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ，求 AC 的长；

(3) 如图3，在(2)的条件下，若点 D 在 $\odot O$ 上， $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是非全等的同族三角形， $AD > CD$ ，求 $\frac{AD}{CD}$ 的值。

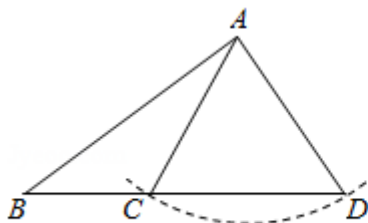


图1

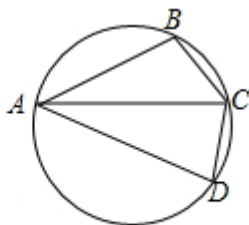


图2

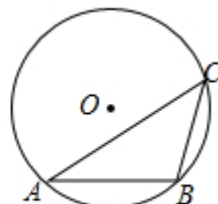


图3

【解答】(1) 证明： \because 点 C 是弧 BD 的中点，即 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，

$$\therefore BC = CD, \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\therefore AC = AC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 是同族三角形；

(2) 解：如图1，连接 OA ， OB ，作点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，

$$\therefore OA = OB = 3\sqrt{2}, AB = 6,$$

$$\therefore OA^2 + OB^2 = AB^2,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形，且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\because CE = BE = 3,$$

$$\therefore AC = AE + CE = 3\sqrt{3} + 3;$$

$$(3) \text{ 解: } \because \angle B = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle B = 75^\circ,$$

如图 2，当 $CD = CB$ 时， $\angle DAC = \angle BAC = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACD = 75^\circ,$$

$$\therefore AD = AC = 3\sqrt{3} + 3, \quad CD = BC = \sqrt{2}BE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2};$$

如图 3，当 $CD = AB$ 时，过点 D 作 $DF \perp AC$ ，交 AC 于点 F ，

则 $\angle DAC = \angle ACB = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore DF = CD \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}DF = 3\sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

综上所述： $\frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

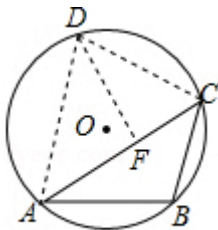


图 3

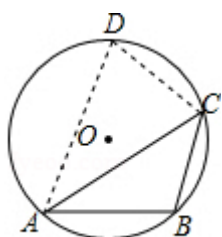


图 2

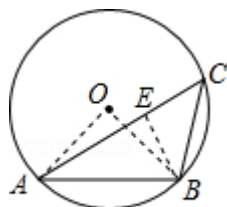


图1