

# 江西省2020年中等学校招生考试

## 数学适应性测试卷·(二)

题号	一	二	三	四	五	六	总分	累分人
得分								

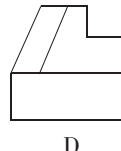
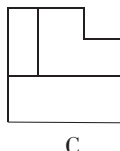
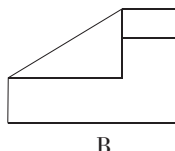
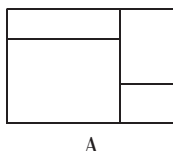
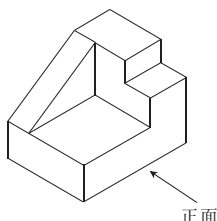
座位号

说明:本卷共有六个大题,23 个小题,全卷满分 120 分,考试时间 120 分钟.

得分	评卷人

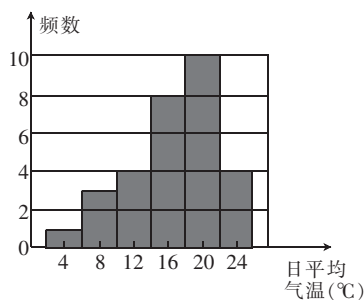
一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分.每小题只有一个正确选项)

- $-\frac{1}{2}$  的倒数是 ( )  
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- 下列运算正确的是 ( )  
A.  $a^2 + a^2 = a^4$  B.  $(-a+1)(a+1) = 1-a^2$   
C.  $3x^3 \cdot (-2x^2) = 6x^5$  D.  $(1+2a)^2 = 1+2a+4a^2$
- 如图所示的几何体的左视图为 ( )



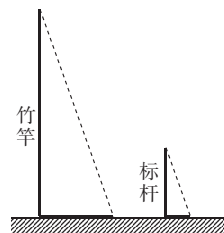
- 如图所示的是某地区今年 4 月份的日平均气温的频数分布直方图(直方图中每一组数都包括前一个边界值,不包括后一个边界值),则下列结论中错误的是 ( )

- 该地区 4 月份的日平均气温在  $18^\circ\text{C}$  以上(含  $18^\circ\text{C}$ ) 的共有 10 天
- 该直方图的组距是  $4^\circ\text{C}$
- 该地区 4 月份的日平均气温的最大值至少是  $22^\circ\text{C}$
- 组中值为  $8^\circ\text{C}$  的这一组数的频数为 3,频率为 0.1



- 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作,成书于一千五百年前,其中有首歌谣:今有竿不知其长,量得影长一丈五尺,立一标杆,长一尺五寸,影长五寸,问竿长几何?意思是:有一根竹竿不知道有多长,量出它在太阳下的影子长一丈五尺,同时立一根长为一尺五寸的小标杆,它的影长五寸(提示:1 丈=10 尺,1 尺=10 寸),则竹竿的长为 ( )

- 五丈
- 四丈五尺
- 一丈
- 五尺



- 已知关于  $x$  的抛物线  $y=ax^2+bx+c$ ,且  $a>b>c$ ,  $a+b+c=0$ . 有以下四个命题,则正确命题的序号是 ( )

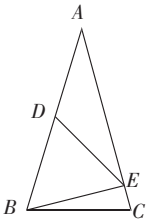
- ①抛物线  $y=ax^2+bx+c$  的开口向下；
- ②抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与  $y$  轴交于负半轴；
- ③抛物线  $y=ax^2+bx+c$  的对称轴在  $y$  轴的左侧；
- ④不等式  $4a+2b+c>0$  一定成立.

A. ①③                      B. ②③                      C. ②④                      D. ③④

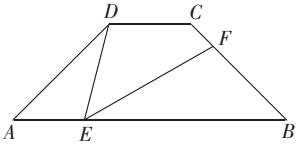
得分	评卷人

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

7. 使式子  $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$  有意义的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
8. 已知一个多边形的每个内角都等于  $108^\circ$ , 那么这个多边形的边数  $n=$ \_\_\_\_\_.
9. 新中国成立 70 年以来, 中国铁路与时俱进, 与国家共成长, 与人民同奋斗, 铁路建设成绩斐然. 铁路营业里程由 5.2 万公里增长到 13.1 万公里, 形成了世界上最现代化的铁路网和最发达的高铁网. 数据 13.1 万用科学记数法表示为\_\_\_\_\_.
10. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = \angle ABC$ ,  $BE \perp AC$ , 垂足为点  $E$ ,  $\triangle BDE$  是等边三角形, 若  $AD = \sqrt{3}$ , 则线段  $BE$  的长为\_\_\_\_\_.
11. 已知  $x_1, x_2$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+px+q=0$  的两个实数根,  $x_1+1, x_2+1$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+qx+p=0$  的两个实数根, 则  $p+q=$ \_\_\_\_\_.
12. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AD=3$ ,  $CD=\sqrt{2}$ ,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ,  $E, F$  分别是边  $AB, BC$  上的动点, 且始终保持  $\angle DEF = 45^\circ$ , 则当  $\triangle BEF$  是等腰三角形时, 线段  $AE$  的长为\_\_\_\_\_.



第 10 题图



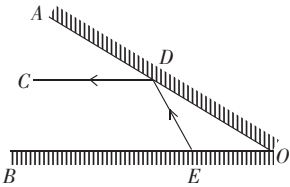
第 12 题图

得分	评卷人

三、(本大题共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

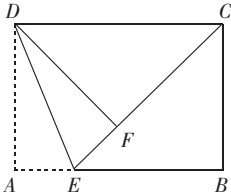
13. (1)解方程:  $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = 0$ .

(2)如图,  $\angle AOB$  的两边  $OA$ 、 $OB$  均为平面镜,  $\angle AOB=35^\circ$ , 在  $OB$  上有一点  $E$ , 从点  $E$  处射出一束光线经  $OA$  上的点  $D$  处反射后 ( $\angle ADC=\angle ODE$ ), 反射光线  $DC$  恰好与  $OB$  平行, 求  $\angle DEB$  的度数.



14. 解不等式组  $\begin{cases} x-6 < 3x, \\ 2x-1 \leq \frac{x-2}{2} + 3, \end{cases}$  并把解集在数轴上表示出来.

15. 如图, 将矩形  $ABCD$  沿  $DE$  折叠, 使得点  $A$  的对应点  $F$  落在  $CE$  上.
- (1)求证:  $\triangle CEB \cong \triangle DCF$ .
- (2)若  $AB=2BC$ , 求  $\angle CDE$  的度数.



16. 美国航天局卫星数据表明,全球从 2000 年到 2018 年新增的绿化面积中,约 $\frac{1}{4}$ 来自中国,贡献比例居全球首位. 研究人员认为其中的原因是中国在植树造林和集约农业等方面有突出的表现. 某中学组织 200 位同学参加义务植树活动,其中甲、乙两位同学分别调查了 30 位同学的植树情况,并将收集的数据进行了整理,绘制成表 1、表 2.

表 1 甲调查的九年级 30 位同学的植树情况

每人植树的棵数	7	8	9	10
人数	3	6	15	6

表 2 乙调查的三个年级各 10 位同学的植树情况

每人植树的棵数	6	7	8	9	10
人数	3	6	3	12	6

根据以上材料回答下列问题.

- (1)关于植树的棵数,表 1 中的中位数是\_\_\_\_\_ 棵;表 2 中的众数是\_\_\_\_\_ 棵.
- (2)同学\_\_\_\_\_ (填“甲”或“乙”)所抽取的样本能更好地反映此次植树活动的情况.
- (3)在问题(2)的基础上估计参加本次活动的 200 位同学共植树的棵数.

17. 如图,在四边形  $ABCD$  中, $AD\parallel BC$ , $BC=2AD$ , $E$  为  $BC$  的中点,请仅用无刻度的直尺分别按下列要求画图.(保留画图痕迹)

- (1)在图 1 中画出 $\triangle ABC$ 的  $AC$  边上的中线.
- (2)在图 2 中画出 $\triangle ACD$ 中与  $AD$  平行的中位线.

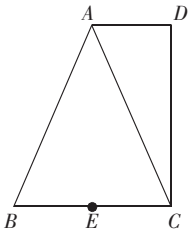


图 1

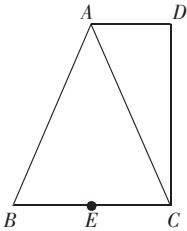


图 2

得分	评卷人

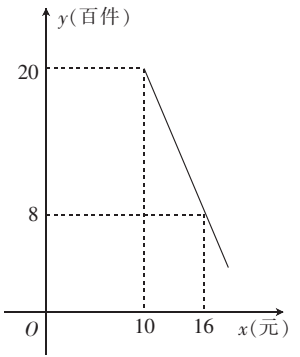
四、(本大题共 3 小题,每小题 8 分,共 24 分)

18. 中央电视台《中国诗词大会第四季》的播出,引发了新一轮中华优秀传统文化热. 某校开展了“传承文明,诵读经典”比赛活动,诵读材料有《诗经》《尚书》《礼记》《周易》和《春秋》,依次用字母  $A, B, C, D, E$  表示这五个诵读材料. 将  $A, B, C, D, E$  分别写在 5 张完全相同的不透明卡片的正面,背面朝上洗匀后放在桌面上. 比赛时小虹先从中随机抽取一张卡片,记下内容后放回,洗匀后,再由小彬从中随机抽取一张卡片,他俩按各自抽取的内容进行诵读比赛.

- (1)小虹诵读《诗经》的概率是\_\_\_\_\_.(直接写出答案)  
 (2)请用列表或画树状图的方法求小虹和小彬诵读相同材料的概率.

19. 在精准扶贫活动中,某企业将业绩良好的某商品专卖店以优惠的价格转让给某贫困村经营,并约定每月从该店的利润中,首先支付全体职工的最低生活费用 3200 元,再逐步偿还转让费(不计利息). 根据企业提供的数据,这种商品的进价为每件 10 元,每月需各种其他开支 1000 元,该店月销量  $y$ (百件)与销售价格  $x$ (元)之间的关系如图所示.

- (1)求月销量  $y$ (百件)与销售价格  $x$ (元)之间的函数关系式.  
 (2)求月利润扣除职工最低生活费用和各种其他开支后的余额  $P$  与销售价格  $x$ (元)之间的函数关系式.  
 (3)根据企业提供的数据,该专卖店的月销售量至少为 1200 件,则当商品的价格为多少元时,余额  $P$  最大? 并求出最大值.



20. 如图所示的益智玩具由一块主板  $AB$  和一个支撑架  $CD$  组成,其侧面示意图如图 1 所示,测得  $AB \perp BD$ ,  $AB=40$  cm,  $CD=25$  cm,点  $C$  为  $AB$  的中点. 现为了方便儿童操作,需调整玩具的摆放,将  $AB$  绕点  $B$  顺时针旋转,  $CD$  绕点  $C$  旋转,同时点  $D$  做水平滑动(如图 2),当点  $C_1$  到  $BD$  的距离为 10 cm 时停止运动,求点  $A$  经过的路径的长和点  $D$  滑动的距离.(结果保留整数,参考数据:  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ,  $\sqrt{21} \approx 4.583$ ,  $\pi \approx 3.142$ )

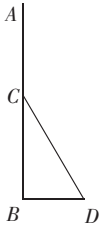


图 1

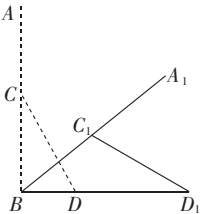
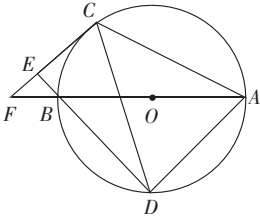


图 2

得分	评卷人

五、(本大题共 2 小题,每小题 9 分,共 18 分)

21. 如图,  $AB$  为  $\odot O$  的直径,  $C, D$  为  $\odot O$  上异于  $A, B$  的两点, 连接  $CD$ , 过点  $C$  作  $CE \perp DB$ , 垂足为点  $E$ , 直径  $AB$  与  $CE$  的延长线相交于点  $F$ .
- (1) 连接  $AC, AD$ , 求证:  $\angle DAC + \angle ACF = 180^\circ$ .
- (2) 若  $\angle ABD = 2\angle BDC$ .
- ① 求证:  $CF$  是  $\odot O$  的切线.
- ② 当  $BD=6$ ,  $\tan F = \frac{3}{4}$  时, 求  $CF$  的长.



22. **【阅读理解】**对于抛物线  $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ , 将它向右平移  $2m(m$  为正整数) 个单位长度得到抛物线  $y'$ , 则我们称抛物线  $y'$  为抛物线  $y$  的兄弟抛物线, 它们的交点叫做兄弟抛物线的奇点, 正整数  $m$  的值叫做兄弟抛物线的截值.

**【简单应用】**

- (1) 若  $m=1$ , 则抛物线  $y=x^2$  的兄弟抛物线的顶点坐标为 \_\_\_\_\_, 奇点坐标为 \_\_\_\_\_.
- (2) 若  $m=k$ , 则抛物线  $y=x^2$  的兄弟抛物线的奇点坐标为 \_\_\_\_\_. (用含  $k$  的代数式表示)
- (3) 已知抛物线  $y=\frac{1}{2}x^2$  的兄弟抛物线为  $y'$ , 且两抛物线的顶点与奇点构成直角三角形, 求截值  $m$  及兄弟抛物线  $y'$  的解析式.

**【问题解决】**

- (4) 已知抛物线  $y=x^2$ , 当截值  $m$  为 1 时, 其兄弟抛物线记为  $y_1$ , 顶点记为  $A_1$ , 奇点记为  $P_1$ ; 当截值  $m$  为 2 时, 其兄弟抛物线记为  $y_2$ , 顶点记为  $A_2$ , 奇点记为  $P_2$ ;  $\cdots$ ; 当截值  $m$  为  $n$  时, 其兄弟抛物线记为  $y_n$ , 顶点记为  $A_n$ , 奇点记为  $P_n$  ( $n$  为正整数). 若  $\triangle P_1P_nA_n$  为直角三角形, 求  $n$  的值.

得分	评卷人

## 六、(本大题共 12 分)

23. **定义:**如图 1,直线  $PQ$  同侧有两点  $M, N$ ,点  $T$  在直线  $PQ$  上,若  $\angle MTP = \angle NTQ$ ,则称点  $M, N$  为关于直线  $PQ$  的衍射点.

**理解:**(1)如图 2,在  $\triangle ABC$  中, $D, E$  分别是  $AB, AC$  上的点,且  $CD = CB, DE \parallel BC$ .

求证:点  $C, E$  为关于直线  $AB$  的衍射点.

**应用:**(2)如图 3,在  $\triangle ABC$  中, $\angle ACB = 90^\circ, D, E$  分别为  $AB, AC$  的中点,且点  $E, C$  是关于直线  $AB$  的衍射点,求  $\angle B$  的度数.

**拓展:**(3)如图 4, $BD$  是矩形  $ABCD$  的对角线, $E$  是边  $BC$  延长线上的一点,且  $CE = BC$ ,连接  $AE$  交  $CD$  于点  $F$ ,交  $BD$  于点  $P$ ,连接  $BF, CP$ .

①求证:点  $A, B$  是关于直线  $CD$  的衍射点;

②若点  $C, F$  是关于直线  $BD$  的衍射点, $CP = 2PF = 2\sqrt{5}$ ,求  $AB$  的长.

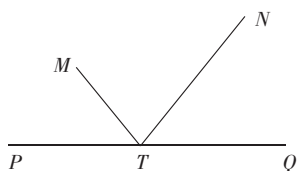


图 1

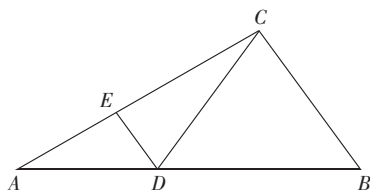


图 2

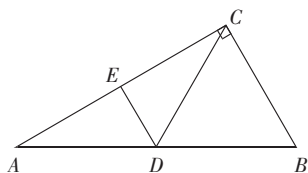


图 3

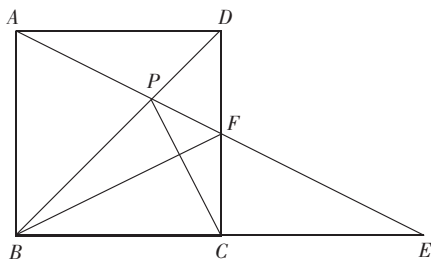


图 4



# 江西省2020年中等学校招生考试

## 数学适应性测试卷(二) · 参考答案与评分标准

1. A 2. B 3. C 4. A 5. B 6. C

7.  $x > 2$  8. 5 9.  $1.31 \times 10^5$  10.  $\sqrt{3}$  11. -4

12.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  或  $3\sqrt{2}$  或 3 提示:  $\because \angle A = \angle DEF = \angle B = 45^\circ, \angle AEF = \angle AED + \angle DEF = \angle B + \angle BFE, \therefore \angle AED = \angle BFE, \therefore \triangle AED \sim \triangle BFE$ .

①当  $EF = BF$  时,  $\triangle BEF$  是等腰直角三角形,

$\therefore \triangle AED$  是等腰直角三角形,

$$\therefore AE = AD \cdot \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

②当  $BE = BF$  时,  $AE = AD = 3$ .

③当  $EF = EB$  时,  $\angle EFB = 45^\circ$ , 即  $\triangle BEF$  是等腰直角三角形,

$\therefore \triangle AED$  是以  $AE$  为底边的等腰直角三角形,  $\therefore AE = \sqrt{2}AD = 3\sqrt{2}$ .

13. (1) 解:  $x + 1 - 2x = 0$ ,

$$-x = -1,$$

$$x = 1. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

经检验, 当  $x = 1$  时,  $x(x + 1) \neq 0$ ,

$\therefore$  原方程的解为  $x = 1$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 解:  $\because CD \parallel OB$ ,

$$\therefore \angle ADC = \angle AOB.$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ODE, \angle AOB = 35^\circ,$$

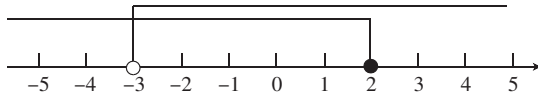
$$\therefore \angle ODE = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle AOB + \angle ODE = 35^\circ + 35^\circ = 70^\circ. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

14. 解: 解不等式  $x - 6 < 3x$ , 得  $x > -3$ ,  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

解不等式  $2x - 1 \leq \frac{x - 2}{2} + 3$ , 得  $x \leq 2$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

不等式的解集在数轴上的表示如下:



$\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

则不等式组的解集为  $-3 < x \leq 2$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

15. (1) 证明: 在矩形  $ABCD$  中,  $AD = BC, \angle A = \angle B = 90^\circ$ .

由折叠知  $AD = FD, \angle DAE = \angle DFE = 90^\circ$ ,

$$\therefore BC = DF, \angle B = \angle DFC = 90^\circ.$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle CEB,$$

$$\therefore \triangle CEB \cong \triangle DCF. (\text{AAS}) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 解: 由 (1) 知  $\triangle CEB \cong \triangle DCF$ ,

$$\therefore CD = CE.$$

$$\therefore AB = CD, AB = 2BC,$$

$$\therefore CE = 2BC.$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 30^\circ, \therefore \angle DCE = 30^\circ.$$

$$\therefore CD = CE,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CED = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

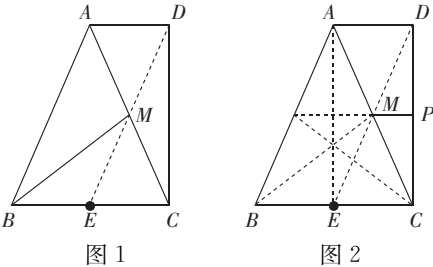
16. 解: (1) 9, 9.  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) 乙.  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(3) 由题意可得  $(3 \times 6 + 6 \times 7 + 3 \times 8 + 12 \times 9 + 6 \times 10) \div 30 \times 200 = 1680$  (棵).

答: 参加本次活动的 200 位同学一共植树 1680 棵.  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

17. 解:(1)如图 1, $BM$  即为所求. .... 3 分  
 (2)如图 2, $PM$  即为所求. .... 6 分



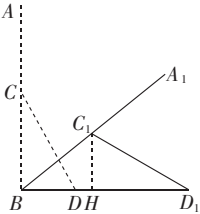
18. 解:(1) $\frac{1}{5}$ . .... 3 分  
 (2)列表如下:

	A	B	C	D	E
A	(A,A)	(B,A)	(C,A)	(D,A)	(E,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)	(D,B)	(E,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)	(D,C)	(E,C)
D	(A,D)	(B,D)	(C,D)	(D,D)	(E,D)
E	(A,E)	(B,E)	(C,E)	(D,E)	(E,E)

- ..... 5 分  
 由表可知共有 25 种等可能的结果,其中小虹和小彬诵读相同材料的结果有 5 种, .... 6 分  
 所以他俩诵读相同材料的概率为 $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ . .... 8 分

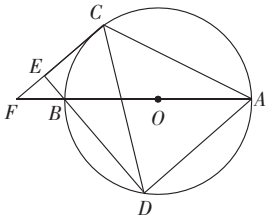
19. 解:(1)设月销量  $y$ (百件)与销售价格  $x$ (元)之间的函数关系式为  $y=kx+b$ .  
 根据题意得  $\begin{cases} 10k+b=20, \\ 16k+b=8, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k=-2, \\ b=40, \end{cases}$   
 $\therefore$  月销量  $y$ (百件)与销售价格  $x$ (元)之间的函数关系式为  $y=-2x+40$ . .... 3 分  
 (2) $P=100y(x-10)-3200-1000=100(-2x+40)(x-10)-3200-1000=-200(x-15)^2+800$ . ....  
 ..... 5 分  
 (3) $-2x+40\geq 12$ ,解得  $x\leq 14$ .  
 $\therefore$  当  $x=14$  时, $P_{\text{最大}}=-200\times(14-15)^2+800=600$ (元).  
 答:当商品的价格为 14 元时,余额  $P$  最大,最大值为 600 元. .... 8 分

20. 解: $\because AB=40$  cm, $C$  是  $AB$  的中点,  
 $\therefore BC=\frac{1}{2}AB=20$  cm.  
 $\because AB\perp BD$ ,  
 $\therefore \angle CBD=90^\circ$ .  
 在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中, $BC=20$  cm, $DC=25$  cm,  
 $\therefore BD=\sqrt{CD^2-CB^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15$  cm.  
 如图,过点  $C_1$  作  $C_1H\perp BD_1$  于点  $H$ ,  
 则 $\angle C_1HD=\angle C_1HD_1=90^\circ$ .  
 在  $\text{Rt}\triangle BC_1H$  中, $BC_1=20$  cm, $C_1H=10$  cm,  
 $\therefore \angle C_1BH=30^\circ$ , $BH=10\sqrt{3}$  cm,  
 $\therefore \angle ABC_1=60^\circ$ ,  
 故点  $A$  经过的路径的长为 $\frac{60\pi\times 40}{180}=\frac{40\pi}{3}\approx 42$  cm. .... 4 分  
 在  $\text{Rt}\triangle D_1C_1H$  中, $D_1C_1=25$  cm, $C_1H=10$  cm,  
 $\therefore D_1H=\sqrt{C_1D_1^2-C_1H^2}=\sqrt{25^2-10^2}=5\sqrt{21}$  cm,  
 $\therefore BD_1=BH+HD_1=(10\sqrt{3}+5\sqrt{21})$  cm,  
 $\therefore$  点  $D$  滑动的距离为  $BD_1-BD=10\sqrt{3}+5\sqrt{21}-15\approx 17.32+22.915-15=25.235\approx 25$  cm.  
 答:点  $A$  经过的路径的长为 42 cm,点  $D$  滑动的距离为 25 cm. .... 8 分



21. (1)证明:  $\because AB$  是  $\odot O$  的直径, 且  $D$  为  $\odot O$  上一点,

$\therefore \angle ADB=90^\circ$ ,  
 $\therefore CE \perp DB$ ,  
 $\therefore \angle DEC=90^\circ$ ,  
 $\therefore CF \parallel AD$ ,  
 $\therefore \angle DAC+\angle ACF=180^\circ$ . ..... 2 分



(2)①证明: 如图, 连接  $OC$ .  
 $\because OA=OC, \therefore \angle 1=\angle 2$ .  
 $\therefore \angle 3=\angle 1+\angle 2$ ,  
 $\therefore \angle 3=2\angle 1$ .  
 $\therefore \angle 4=2\angle BDC, \angle BDC=\angle 1$ ,  
 $\therefore \angle 4=2\angle 1$ ,  
 $\therefore \angle 4=\angle 3$ ,  
 $\therefore OC \parallel DB$ .  
 $\therefore CE \perp DB$ ,  
 $\therefore OC \perp CF$ .

又  $\because OC$  为  $\odot O$  的半径,  
 $\therefore CF$  为  $\odot O$  的切线. .... 5 分

②解: 由(1)知  $CF \parallel AD$ ,  
 $\therefore \angle BAD=\angle F$ ,

$\therefore \tan \angle BAD=\tan F=\frac{3}{4}$ ,

$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{3}{4}$ .

$\therefore BD=6$ ,

$\therefore AD=\frac{4}{3}BD=8$ ,

$\therefore AB=\sqrt{6^2+8^2}=10, OB=OC=5$ .

$\therefore OC \perp CF$ ,

$\therefore \angle OCF=90^\circ$ ,

$\therefore \tan F=\frac{OC}{CF}=\frac{3}{4}$ ,

解得  $CF=\frac{20}{3}$ . .... 9 分

22. 解: (1)(2,0),(1,1). .... 2 分

(2)(k,k^2). .... 3 分

(3)抛物线  $y=\frac{1}{2}x^2$  的兄弟抛物线为  $y'=\frac{1}{2}(x-2m)^2$ , 奇点坐标为  $(m, \frac{1}{2}m^2)$ , 兄弟抛物线的顶点坐标为  $(2m,0)$ .

$\therefore$  两抛物线的顶点与奇点构成直角三角形,

$\therefore 2 \times \frac{1}{2}m^2=2m$ ,

$\therefore m^2-2m=0$ ,

解得  $m_1=0$ (不符合题意, 舍去),  $m_2=2$ ,

$\therefore m=2$ , ..... 5 分

$\therefore$  兄弟抛物线的解析式为  $y'=\frac{1}{2}(x-4)^2=\frac{1}{2}x^2-4x+8$ . .... 6 分

(4)由题意知  $P_1(1,1), P_n(n,n^2), A_n(2n,0)$ ,

$\angle A_n$  不可能是直角.

当  $\angle P_1=90^\circ$  时, 过点  $P_1$  作  $P_1B \perp x$  轴, 过点  $P_n$  作  $P_nC \perp P_1B$ , 垂足分别为点  $B, C$ ,

则  $\triangle P_1CP_n \sim \triangle A_nBP_1$ ,

$\therefore \frac{P_1C}{BA_n}=\frac{CP_n}{BP_1}$ .

$\therefore P_1C=n^2-1, P_nC=n-1, P_1B=1, BA_n=2n-1$ ,

$\therefore \frac{n^2-1}{2n-1}=\frac{n-1}{1}$ ,

$\therefore n=2$ . .... 8 分

当  $\angle P_n=90^\circ$  时, 过点  $P_1$  作  $P_1B \perp x$  轴, 过点  $P_n$  作  $P_nC \perp P_1B$ , 垂足分别为点  $B, C$ , 过点  $A_n$  作  $A_nD \parallel y$  轴, 交  $CP_n$  于点  $D$ ,

则  $\triangle P_1CP_n \sim \triangle P_nDA_n$ ,

$$\therefore \frac{P_1C}{DP_n} = \frac{CP_n}{DA_n}.$$

$$\because DP_n = n, DA_n = n^2,$$

$$\therefore \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{n - 1}{n^2},$$

整理得  $n^2 + n - 1 = 0$ ,

$$\therefore n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

与题意不符,舍去.

综上所述,  $n = 2$ . ..... 9 分

23. (1) 证明:  $\because CD = CB, \therefore \angle CDB = \angle ABC$ .

$$\because DE \parallel BC, \therefore \angle ADE = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDB,$$

$\therefore$  点  $C, E$  为关于直线  $AB$  的衍射点. .... 2 分

(2) 解:  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $D$  为斜边  $AB$  的中点,

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle B.$$

$\because D, E$  分别为  $AB, AC$  的中点,

$\therefore DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线,

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B.$$

$\because$  点  $E, C$  是关于直线  $AB$  的衍射点,

$$\therefore \angle ADE = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDB = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ. .... 5 分$$

(3) ① 证明: 在矩形  $ABCD$  中,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle BCD = \angle ECF.$$

$$\because BC = CE, CF = CF,$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle ECF,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle EFC.$$

$$\because \angle EFC = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle AFD,$$

$\therefore$  点  $A, B$  是关于直线  $CD$  的衍射点. .... 8 分

② 解:  $\because AD = BC, \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ, \angle AFD = \angle BFC$ ,

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BCF,$$

$$\therefore CF = DF,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB.$$

$$\because DF \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DP}{BP} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{2}.$$

$$\because CP = 2PF,$$

$$\therefore \frac{DP}{BP} = \frac{PF}{CP} = \frac{1}{2}.$$

又  $\because$  点  $C, F$  是关于直线  $BD$  的衍射点,

$$\therefore \angle DPF = \angle BPC,$$

$$\therefore \triangle DPF \sim \triangle BPC,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{PF}{CP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{DF}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BC = AB = 2DF,$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中,  $AB^2 + DF^2 = AF^2$ ,

$$\therefore (2DF)^2 + DF^2 = (3\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore DF = 3, AB = 6. .... 12 分$$